

Zeitschrift: Pestalozzi-Kalender
Band: 8 (1915)
Heft: [2]: Schüler

Rubrik: Geometrie

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

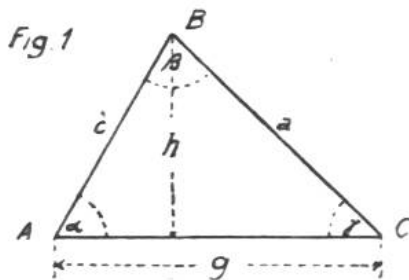
Download PDF: 09.11.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Geometrie.

Formeln zur Inhaltsberechnung von Flächen und Körpern

Dreieck.



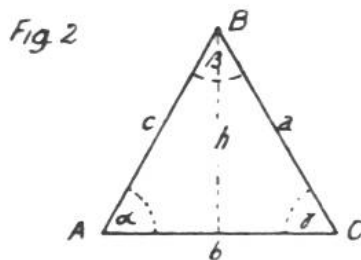
Grundlinie = g Höhe = h ; Fläche = F

$$F = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{g}{2} \cdot h = \frac{h}{2} \cdot g;$$

$$g = \frac{2F}{h}; \quad h = \frac{2F}{g}$$

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle \gamma = 180^\circ = 2R.$$

Gleichseitiges Dreieck.



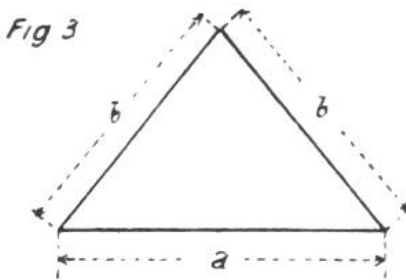
Seiten = $a = b = c$, $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \beta = \sphericalangle \gamma = 60^\circ$

$$F = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 0,433 a^2$$

(genauer $0,4330127 a^2$)

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}};$$

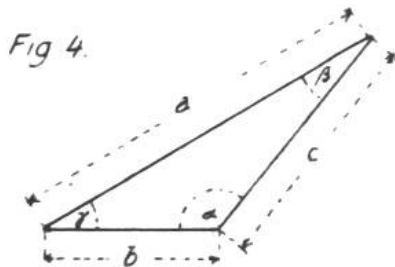
Gleichschenkliges Dreieck.



Grundlinie = a ; gleiche Seiten = b

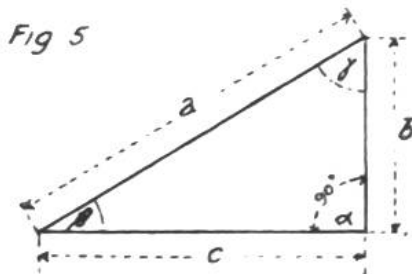
$$F = \frac{a}{4} \sqrt{(2b+a)(2b-a)} = \frac{a}{2} \sqrt{\left(b + \frac{a}{2}\right) \left(b - \frac{a}{2}\right)}$$

Ungleichseitiges Dreieck.



Seiten a, b und c , $s = \frac{a+b+c}{2}$;

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

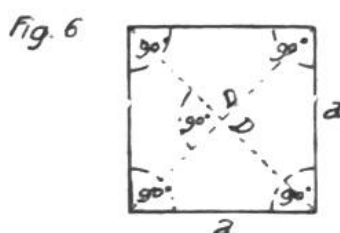


Rechtwinkliges Dreieck. $\sphericalangle \alpha = 90^\circ$

Hypotenuse = a ; Katheten = b und c ,

$$F = \frac{b \cdot c}{2}; \quad a^2 = b^2 + c^2; \quad a = \sqrt{b^2 + c^2};$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}; \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$



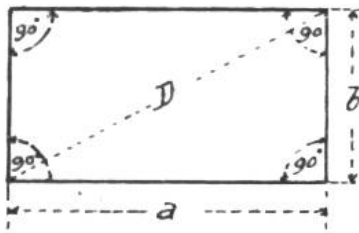
Quadrat

Seite = a ; Diagonale = D ;

$$F = a \times a = a^2 \quad a = \sqrt{a^2}$$

$$D = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2} = a \cdot 1,4142.$$

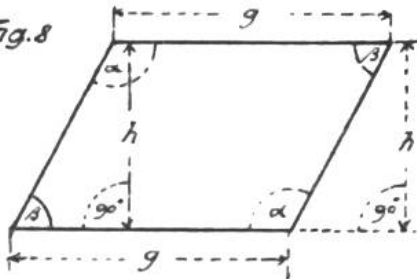
Fig. 7



Rechteck.

Seiten a und b , Diagonale D ;
 $F = a b$, $a = \frac{F}{b}$, $b = \frac{F}{a}$;
 $D = \sqrt{a^2 + b^2}$

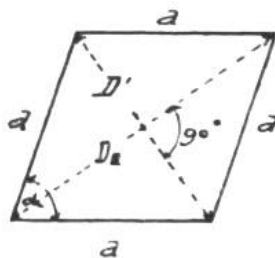
Fig. 8



Parallelogramm.

Grundlinie = g Höhe (rechtwinklig auf Grundlinie) = h
 $F = g \cdot h$, $g = \frac{F}{h}$, $h = \frac{F}{g}$;

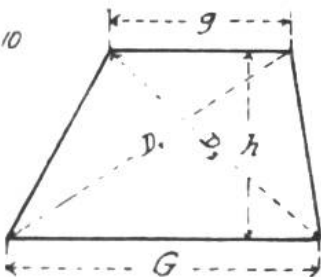
Fig. 9



Rhombus.

Gleiche Seiten a , Diagonalen D_1 u. D_2
 $F = a^2 \sin \alpha$, $F = \frac{D_1 \cdot D_2}{2}$;

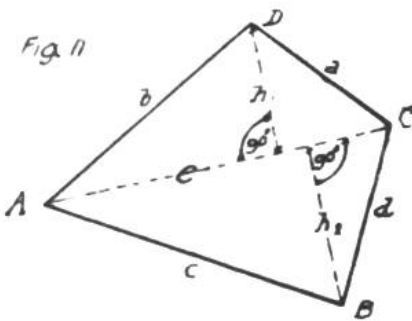
Fig. 10



Trapez.

Parallelseiten = G und g , Höhe = h
 Diagonalen = D_1 und D_2
 $F = \frac{G + g}{2} \cdot h$;

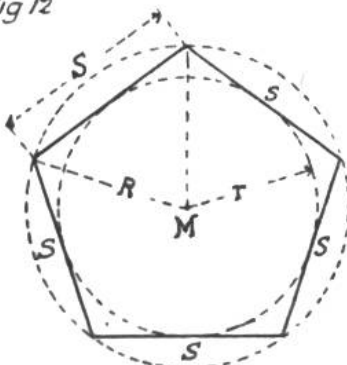
Fig. 11



Trapezoid.

Diagonale \overline{AC} und rechtwinklig darauf die Höhen h_1 und h_2
 $F = \frac{\overline{AC}}{2} \cdot (h_1 + h_2) = \frac{e}{2} \cdot (h_1 + h_2)$.

Fig. 12



Reguläre Vielecke (Polygon)

Seite = S
 Radius des umschriebenen Kreises = R ;
 Radius des eingeschriebenen Kreises = r

Polygon	R	r	S	F
Dreieck	0.577 S	0.289 S	1.732 R od 3.463 r	0.433 S ² od. 1.299 R ²
Quadrat	0.707 S	0.500 S	1.414 R = 2.000 r	1.000 S ² = 2.000 R ²
Fünfeck	0.851 S	0.695 S	1.776 R = 1.453 r	1.721 S ² = 2.378 R ²
Sechseck	1.000 S	0.866 S	1.000 R = 1.155 r	2.598 S ² = 2.598 R ²
Siebeneck	1.152 S	1.038 S	0.868 R = 0.963 r	3.364 S ² = 2.736 R ²
Achteck	1.307 S	1.208 S	0.765 R = 0.828 r	4.828 S ² = 2.828 R ²
Neuneck	1.462 S	1.374 S	0.684 R = 0.728 r	6.182 S ² = 2.892 R ²
Zehneck	1.618 S	1.540 S	0.618 R = 0.649 r	7.694 S ² = 2.939 R ²
Elfleck	1.775 S	1.704 S	0.563 R = 0.587 r	9.366 S ² = 2.973 R ²
Zwölfeck	1.932 S	1.866 S	0.518 R = 0.536 r	11.190 S ² = 3.000 R ²

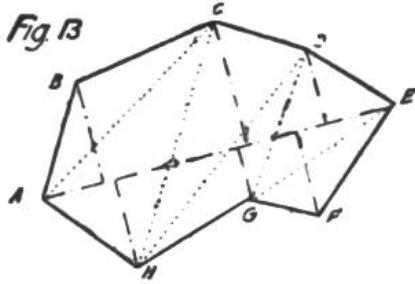


Fig. 14

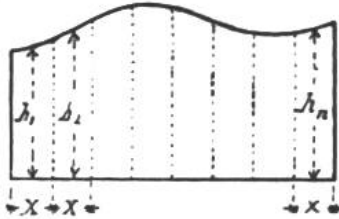


Fig. 15

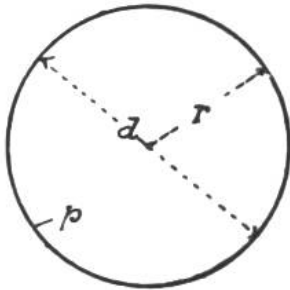


Fig. 16

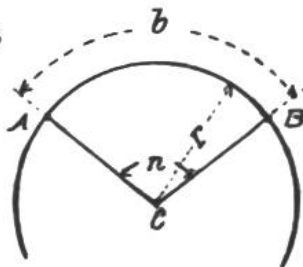


Fig. 17

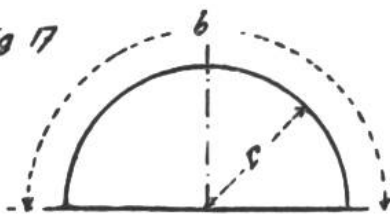
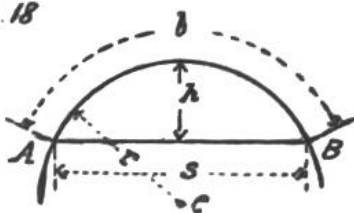


Fig. 18



Unregelmässige Vielecke od Flächen:

Fläche kann bestimmt werden durch Zerlegung des Vielecks in Dreiecke mittelst Diagonalen und Summirung der ermittelten Dreiecksflächen, oder durch Einteilung in Trapeze u. Dreiecke vermittelst der Koordinaten der Eckpunkte auf eine rechtwinklig gewählte Axe. Fig 13

Durch Zerlegung in parallele Streifen gleicher Breite Fig 14

$$F = x \cdot (h_1 + h_2 + \dots + h_n)$$

Kreis:

Durchmesser = d ; Radius = r

Umfang = p ; Inhalt = F .

$$p = d \pi = d \cdot 3.14159$$

$$= 2r \pi;$$

$$F = \frac{d^2 \pi}{4} = 0.785 d^2 = r^2 \pi$$

$$r = \sqrt{\frac{F}{\pi}} = 0.564 \sqrt{F};$$

$$d = 2 \sqrt{\frac{F}{\pi}} = 1.128 \sqrt{F}$$

Kreissector: (A.B.C) Fig. 16.

Radius = r ; Bogen = b ;

Zentriwinkel = n ;

$$F = \frac{r^2 \pi \cdot n}{360} = \frac{b \cdot r}{2}.$$

$$r = \sqrt{\frac{F}{\pi} \cdot \frac{360}{n}} = \frac{b}{\pi} \cdot \frac{180}{n};$$

$$n = 360 \cdot \frac{F}{r^2 \pi} = \frac{b}{r \pi} \cdot 180$$

$$b = 2 r \pi \frac{n}{360} = r \pi \cdot \frac{n}{180}.$$

Halbkreisbogen = $b = \pi \cdot r$.

Halbkreisfläche = $F = \frac{\pi \cdot r^2}{2}$.

Viertelkreisbogen = $b = \frac{\pi \cdot r}{2}$

Viertelkreisfläche = $F = \frac{\pi \cdot r^2}{4}$.

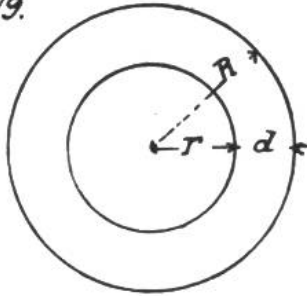
Kreisabschnitt:

Sehne = S Höhe = h . $F = \frac{2}{3} S \cdot h$.

$$\text{genau } F = \frac{r^2 \pi n}{360} - \frac{1}{2} S \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} S^2} = \frac{b r - s (r - h)}{2}$$

$$S = 2 \sqrt{h(2r-h)} \quad r = \frac{S^2}{8h} + \frac{h}{2}.$$

Fig 19.



Kreisring:

Aüsserer Radius = R ;

Innerer Radius = r

$$F = R^2 \pi - r^2 \pi.$$

$$= \pi (R+r) (R-r).$$

wenn d = radiale Breite des Kreisrings,

$$\text{so ist } F = \pi (2r+d) d.$$

Fig 20



Kreisringstück: (Konzentrisch)

Aüsserer Radius = R

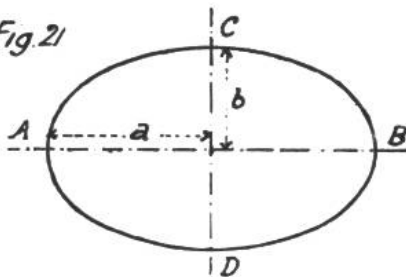
Innerer Radius = r

Zentriwinkel = n .

$$F = (R^2 \pi - r^2 \pi) \frac{n}{360} = (R^2 - r^2) \cdot \frac{\pi \cdot n}{360}$$

$$= (R+r) d \frac{\pi \cdot n}{360} = (R+r) d \cdot n \cdot 0.0087.$$

Fig 21

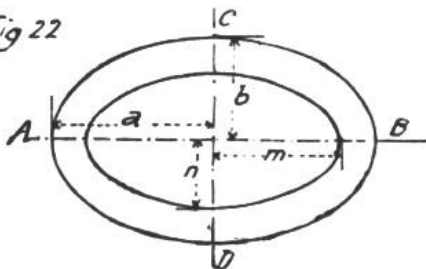


Ellipse:

Halbe Achsen der Ellipse = a und b

$$F = a \cdot b \cdot \pi;$$

Fig 22

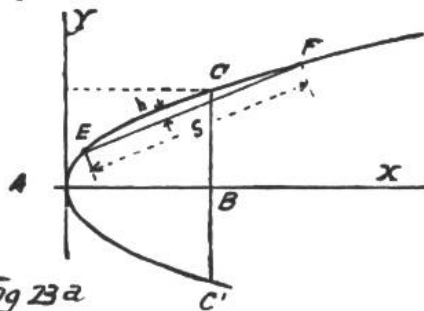


Elliptischer Ring:

Halbe Achsen der äussern Ellipse a, b ,
Halbe Achsen der innern Ellipse m, n

$$F = \pi (ab - mn).$$

Fig 23.



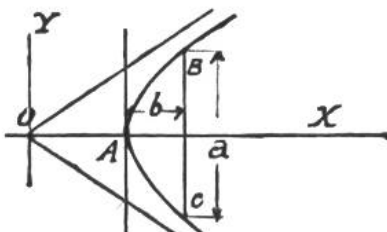
Parabelsegment ECF:

$$F = \frac{2}{3} s \cdot h, \quad s = EF.$$

Parabelfläche CAC':

$$F = \frac{2}{3} CC' \cdot AB.$$

Fig 23a

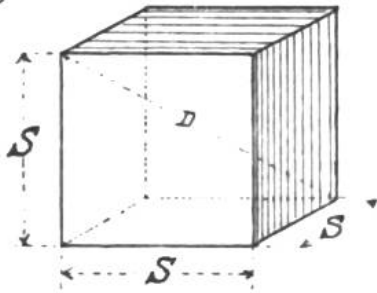


Hyperbelsegment ABC

Sehne = a , Höhe = b

$$F (\text{annähernd}) = \frac{3}{5} b \cdot a.$$

Fig 24

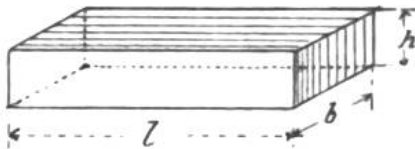
Würfel:Seite = s ; Inhalt = K ; Oberfläche = O ;

$$K = s^3; \quad O = 6s^2;$$

$$s = \sqrt[3]{K};$$

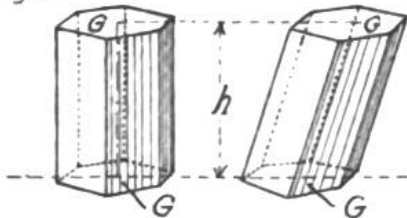
$$\text{Diagonale} = D = \sqrt{3s^2} = s\sqrt{3} \\ = s \cdot 1.732050$$

Fig 25

Parallelepiped:Länge = l ; Breite = b ; Höhe = h ;

$$K = l \cdot b \cdot h.$$

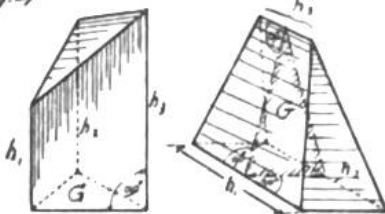
Fig 26

Prisma:Grundfläche = G ; Höhe = h ;

$$K = G \cdot h;$$

Oberfläche O = Umfang der Grundfläche $U \times h + 2G$.

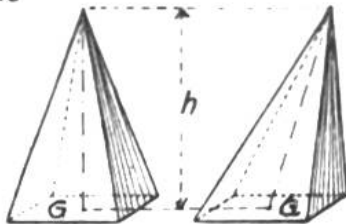
Fig 27

Schiefabgeschnittenes Prisma:Flächeninhalt des senkrechten Querschnittes = G ;Länge der Kanten = h, h_1, h_2, \dots, h_n

$$K = G \times \frac{h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_n}{n}$$

Bei mehr als 3 Kanten ist das Prisma regelmässig oder hat dasselbe wenigstens Axensymmetrie.

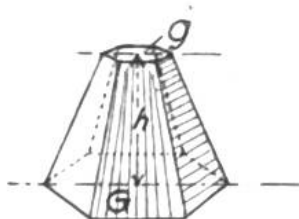
Fig 28

Pyramide:Grundfläche = G ; Höhe = h ;

$$K = \frac{G \cdot h}{3}; \quad h = \frac{3K}{G}$$

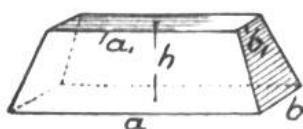
$$G = \frac{3K}{h};$$

Fig 29

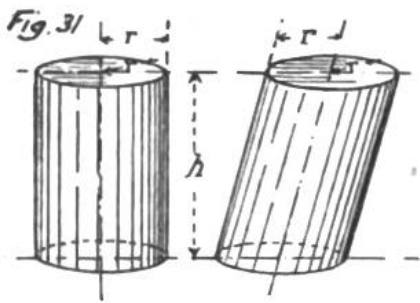
Abgestumpfte Pyramide:Inhalt der beiden Grundflächen = G u. g .

$$K = \frac{h}{3} \cdot (G + g + \sqrt{G \cdot g})$$

Fig 30

Obelisk, Wall, regelmässig aufgeschütteter Haufen.

$$K = \frac{1}{6} h [(2a + a)l + (2a + a)l]$$

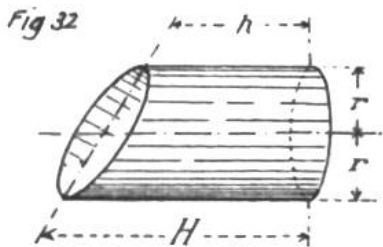


Cylinder (Walze)

$$K = r^2 \pi \cdot h \quad \text{Mantel} = 2 r \pi \cdot h$$

$$r = \sqrt{\frac{K}{\pi \cdot h}}; \quad h = \frac{K}{r^2 \pi}$$

$$\text{Mantel} = 2 r \pi \cdot h.$$

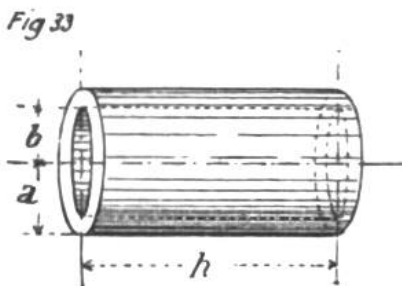


Schiefgeschnittener Cylinder

Grösste Höhe = H; kleinste Höhe = h,

$$K = r^2 \pi \cdot \frac{H+h}{2}$$

$$\text{Mantel} = \pi r (H+h)$$

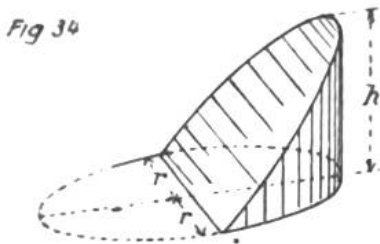


Hohlzylinder:

Innerer Halbmesser = b
äusserer Halbmesser = a, Länge = h,

$$K = \pi h (a+b) \cdot (a-b).$$

$$K = \pi \cdot h (a^2 - b^2)$$



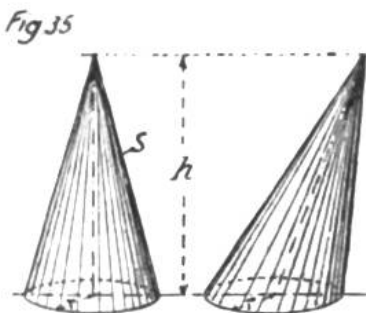
Cylinderhuf:

Radius der Grundfläche = r

Höhe des Hufes = h

$$K = \frac{2}{3} r^2 h$$

$$M = 2 r \cdot h.$$



Kegel.

Halbmesser der Grundfläche = r

Höhe = h, Seite = S

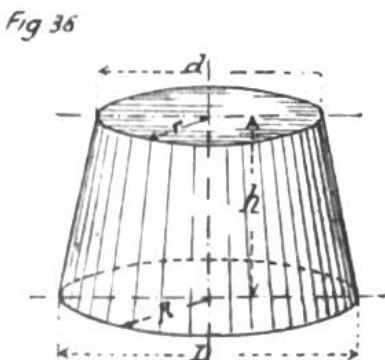
$$S = \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$\text{Mantel } M = r \pi \cdot S$$

$$\text{Ganze Oberfläche } \Theta = \pi \cdot r (r + \sqrt{r^2 + h^2}) = \pi r (S + r).$$

$$K = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot h$$

$$r = \sqrt{\frac{3K}{h \pi}}, \quad h = \frac{3K}{r^2 \pi}$$



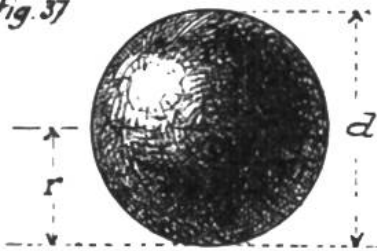
Abgestumpfter Kegel

Halbmesser der Grundflächen = R und r
Durchmesser der Grundflächen = D und d

$$K = (R^2 + r^2 + Rr) \frac{h \cdot \pi}{3} = \frac{D^2 + d^2 + d \cdot D}{12} \cdot h \cdot \pi.$$

$$\text{Mantel} = \pi S (R+r)$$

Fig. 37

Kugel:

$$\text{Radius} = r, \text{ Durchmesser} = d$$

$$\text{Oberfläche } O = 4r^2\pi = d^2\pi.$$

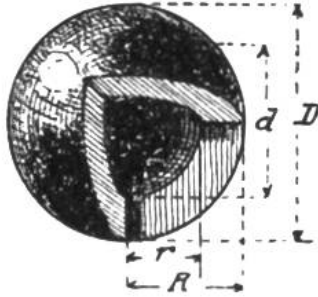
$$= 12.566 r^2$$

$$\text{Inhalt } K = \frac{4}{3}r^3\pi = \frac{d^3\pi}{6} = \frac{0.5236}{3}d^3$$

$$K = 4.189 r^3 = 0.5236 d^3.$$

$$\text{Radius } r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{O}{\pi}}, = \sqrt{\frac{3K}{4\pi}}$$

Fig. 38

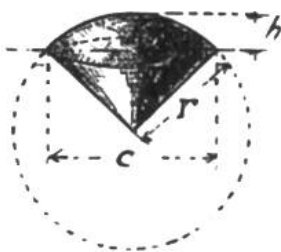
Hohlkugel:

$$\text{Äusserer Radius} = R \text{ innerer} = r.$$

$$\text{Durchmesser } D \text{ } \cdot \cdot \cdot d.$$

$$K = \frac{4\pi}{3}(R^3 - r^3) = \frac{\pi}{6}(D^3 - d^3).$$

Fig. 39

Kugelsektor:

$$\text{Radius der Kugel} = r$$

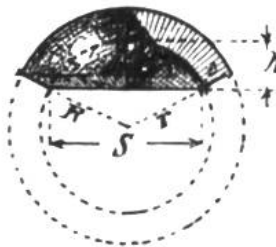
$$\text{Begrenzende Kalotte: Höhe} = h$$

$$\cdot \cdot \cdot \text{ Durchmesser} = c$$

$$\text{Oberfläche} = \frac{\pi r}{2}(4h + c)$$

$$K = \frac{2}{3}r^2\pi h = 2.094 r^2 h.$$

Fig. 40

Hohlkugelsektor:

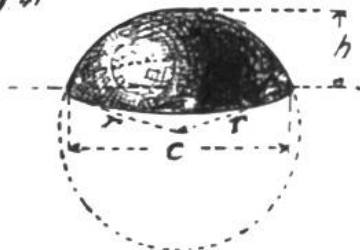
$$\text{Äusserer Radius} = R, \text{ innerer} = r$$

$$\text{Wanddicke} = s; R = r + s.$$

$$r = \frac{s^2 + 4h^2}{8h}$$

$$\text{Inhalt } K = 2.094 \frac{h}{r}(R^3 - r^3).$$

Fig. 41

Kugelsegment:

$$\text{Radius der Kugel} = r.$$

$$\text{Kalottendurchmesser} = c \text{ Höhe} = h$$

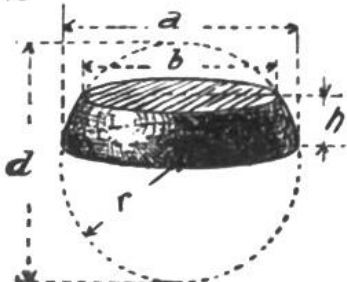
$$\text{Gewölbte Oberfläche} = O$$

$$O = 2r\pi h = \pi\left(\frac{c^2}{4} + h^2\right).$$

$$K = \frac{1}{6}\pi h(3c^2 + h^2) = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$$

$$= \pi h^2\left(r - \frac{1}{3}h\right) = \pi h\left(\frac{c^2}{8} + \frac{h^2}{6}\right).$$

Fig. 42

Kugelzone.

$$\text{Höhe der Zone} = h$$

$$\text{Halbmesser der Kugel} = r$$

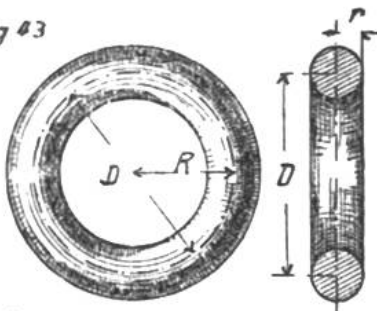
$$\text{Halbmesser der Endflächen } a \text{ und } b$$

$$\text{Mantel} = 2r\pi h.$$

$$\text{Oberfläche} = M + a^2\pi + b^2\pi.$$

$$\text{Inhalt } K = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + 3b^2 + h^2).$$

Fig 43

Cylindrischer Ring.

Radius des kreisförm. Querschnittes = r

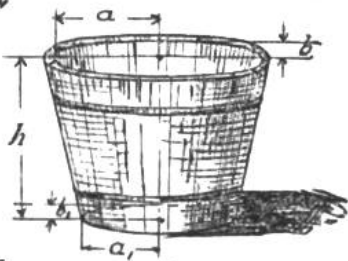
Durchmesser des Ringes = D

Radius des Ringes = R . siehe Figur.

$$K = 2\pi^2 R r^2 = 2.467 D d^2$$

$$\text{Oberfläche } O = 4\pi^2 R r = 9.87 D d.$$

Fig. 44

Kübel

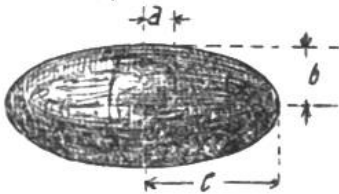
Die Endflächen sind Ellipsen mit

den Halbachsen a, b und a_1, b_1 ,

Höhe zwischen den Endflächen = h

$$\text{Inhalt } K = \frac{1}{6} \pi h [2(ab + a_1 b_1) + ab + a_1 b_1]$$

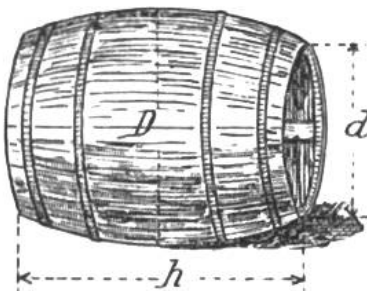
Fig 45

Ellipsoid

Bezeichnung der 3 Halbachsen = a, b, c .

$$\text{Inhalt } K = \frac{4}{3} \pi \cdot a \cdot b \cdot c.$$

Fig 46

Fass

Spunddurchmesser = D

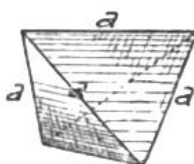
Bodendurchmesser = d

Höhe = h (resp Länge)

$$\text{Inhalt } K = 1.0453 h (0.4 D^2 + 0.2 Dd + 0.15 d^2)$$

Reguläre Polyeder:

Fig 47

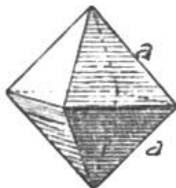


Tetraeder: (4 gleichseitige Dreiecksflächen)

Länge der Kante = a ; $O = a^2 \sqrt{3} = 1.732 a^2$

$$K = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2} = 0.11785 a^3$$

Fig. 48

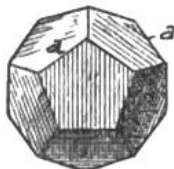


Oktaeder. (8 gleichseit. Dreiecksflächen)

Kante = a ; $O = 2a^2 \sqrt{3} = 3.464116 a^2$

$$K = \frac{a^3}{3} \sqrt{2} = 0.4714045 a^3$$

Fig. 49

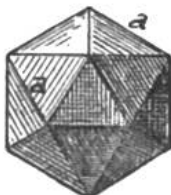


Dodekaeder (12 regelmässige Fünfecke)

Kante = a ; $O = 3a^2 \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$
 $= 20.645729 a^2$

$$K = \frac{a^3}{4} (15 + 7\sqrt{5}) = 7.663119 a^3$$

Fig. 50



Icosaeder 20 gleichseitige Dreiecksflächen.

Kante = a ; $O = 5a^2 \sqrt{3} = 8.6602545 a^2$

$$K = \frac{5}{12} a^3 (3 + \sqrt{5}) = 2.181695 a^3$$