

# ? mal ? = 1 : ein Kapitel lebensvoller Mathematik

Autor(en): **Schwarz, Karl Hermann**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Prisma : illustrierte Monatsschrift für Natur, Forschung und  
Technik**

Band (Jahr): **6 (1951)**

Heft 1

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-653440>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# ? mal ? = 1

## Ein Kapitel lebensvoller Mathematik

Von Dr. Karl Hermann Schwarz

DK 511.14

Schopenhauer sagte einmal: „Der Mathematiker kommt mir vor wie ein Mann, der sich seine gesunden Beine absägen läßt, um hölzerne an deren Stelle zu setzen.“ Er könnte dabei an obiges Problem gedacht haben. Denn obwohl eine seiner Lösungen, nämlich  $1 \times 1 = 1$  schon dem sechsjährigen Anfänger der Rechenkunst klar ist, haben sich doch die größten Mathematiker der letzten 300 Jahre in verschiedener Weise mit ihm und seiner Verallgemeinerung beschäftigt.

Die Tatsache, daß diese Verallgemeinerung ein Fundamentalproblem der höheren Mathematik ist, möge den Laien vom Studium unseres Aufsatzes nicht abschrecken. Denn dessen Zweck besteht gerade darin, die schönsten Seiten des hohen Problems einmal mit der Rechenkunst 14jähriger Schüler zu bearbeiten. Ein solcher weiß bereits, daß man „? . ? = 1“ kürzer schreiben kann „ $x^2 = 1$ “. Damit haben wir die einfachste sogenannte quadratische Gleichung vor uns, mit deren erster Lösung oder „Wurzel“ das Einmaleins beginnt.

Eine quadratische Gleichung oder Gleichung zweiten Grades muß aber noch eine zweite (allerdings in Ausnahmefällen der ersten gleiche) Wurzel besitzen. Der größte deutsche Mathematiker Gauß bewies nämlich den Fundamentalsatz: Jede algebraische Gleichung mit einer Unbekannten wird durch so viele Wurzeln (= Lösungen = bestimmte Werte der Unbekannten) befriedigt, wie die größte Hochzahl (= Exponent) angibt, die in der Gleichung bei der Unbekannten vorkommt. In  $x^2 = 1$  ist diese größte Hochzahl 2. Gibt es also außer  $x_1 = 1$  noch ein  $x_2$ , das quadriert ebenfalls 1 liefert?

Tatsächlich! Denn auch  $(-1) \cdot (-1) = (-1)^2 = 1$ . Die Gleichung  $x^2 = 1$  oder ein wenig umgestellt:  $x^2 - 1 = 0 \dots \dots (1)$  wird also durch zwei verschiedene  $x$ -Werte befriedigt, nämlich  $+1$  und  $-1$ . Wie steht es mit der ihr ganz ähnlich sehenden Gleichung

oder  $x^2 + 1 = 0$   
 $x^2 = -1? \dots \dots (2)$

Welche Zahl gibt quadriert, also mit sich selbst multipliziert,  $-1$ ?

Nach der Schülerregel, daß „Minus mal Minus“ ebenso wie „Plus mal Plus“ stets Plus ergibt, kann überhaupt keine wirkliche Zahl — sie sei positiv oder negativ — mit sich selbst multipliziert, einen negativen Wert liefern, wie in unserem Beispiel  $-1$ . Der Nicht-Mathematiker würde nun vielleicht meinen, daß hier die Wissenschaft mit ihrem Latein zu Ende sei. Weit gefehlt! Die Mathematik ist ja nach einem sinnvollen Scherzwort gerade „die Wissenschaft, die mit lauter Dingen arbeitet, die sie nicht weiß“, z. B. mit der Unbekannten  $x$ . Daß man niemals eine wirkliche Quadratwurzel aus  $-1$  wissen wird, da eine solche gar nicht bestehen kann, ist für den Gelehrten durchaus kein Hindernis, sondern eher ein Ansporn, mit ihr zu rechnen.

Wir schreiben für die unwirkliche Größe einfach die unausführbare Rechnung hin, deren Ergebnis sie sein sollte, nämlich  $\sqrt{-1}$ , lies: „Quadratwurzel aus minus eins.“ Mit Hilfe dieser märchenhaften Springwurzel dringen wir in den mathematischen Zauberberg des sogenannten Imaginären ein. Der deutsche Philosoph und Miterfinder der Differentialrechnung, Leibnitz, nannte in seiner frömmeren Ausdrucksweise das Gebiet der Quadratwurzeln aus negativen Zahlen sogar den Aufenthaltsort des Heiligen Geistes. In unerreichbares Gebiet also unternehmen wir jetzt einen kleinen Ausflug. Bald erkennen wir, daß man sich dabei gar nicht mehr anzustrengen braucht als auf dem gewohnten mathematischen „Erdboden“, wenn man nur die „Springwurzel“ gut handhabt, ohne sich je um ihre ohnehin unmögliche Auflösung zu kümmern.

Zunächst mögen einmal die Gleichungen (1) und (2) miteinander multipliziert werden:

$$(x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1) = 0 \cdot 0 \dots \dots (3)$$

Ergebnis:

$$x^4 - 1 = 0 \dots \dots \dots (4)$$

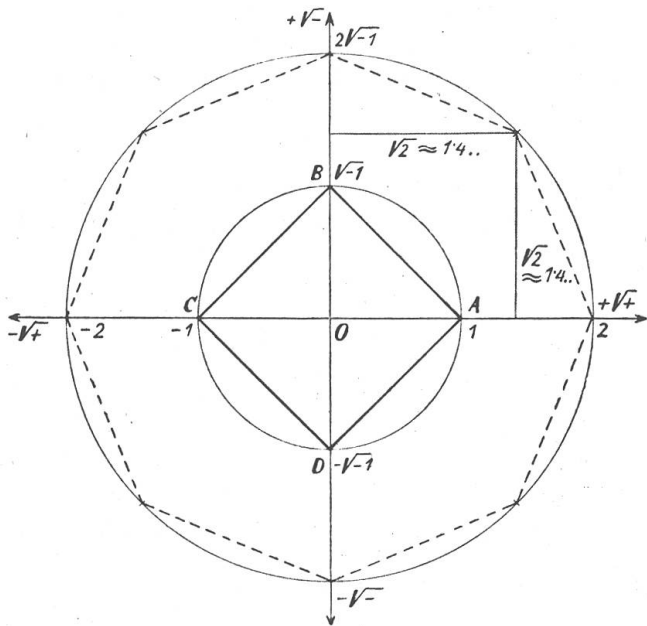


Abb. 1

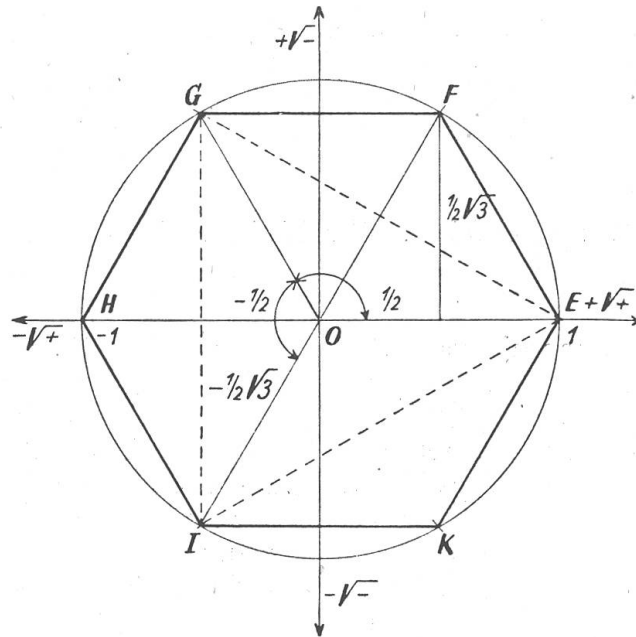


Abb. 2

Wegen der Hochzahl 4 bei  $x$  sollte diese Gleichung von nicht weniger als 4 Werten erfüllt werden, deren jeden man also an die Stelle des  $x$  setzen darf. Die vier Werte kennen wir aber bereits. Denn  $+1$  und  $-1$  ergeben sich ja als die Werte, die (1) und damit auch den ersten Klammerausdruck in (3) zu Null machen. Dasselbe leisten für den zweiten Klammerausdruck  $+\sqrt{-1}$  und  $-\sqrt{-1}$ . Und  $x^4 - 1$  wird ja als Produkt derselben beiden Klammerausdrücke ebenfalls gleich null, wenn einer von ihnen null wird.

Die Mathematik geht auf zwei Beinen (die wir nicht als hölzerne betrachten!), auf dem der Arithmetik und dem der Geometrie. So wie viele Menschen beim Springen lieber das linke Bein vorschwingen, beim Fußballspiel dagegen das rechte, bevorzugt auch der Mathematiker bald die arithmetische (algebraische), bald die geometrische Vorgangsweise. Stellen wir einmal die vier Wurzeln der Gleichung (4) geometrisch dar. Dazu genügt die Methode des vor 300 Jahren am Frühaufstehen gestorbenen französischen Philosophen Descartes:

Von einem Nullpunkt  $O$  (origo, lateinisch für Ursprung) ausgehend, wird in der Zeichenebene eine von zwei Größen nach rechts positiv, nach links negativ, die andere (wie beim Thermometer) nach oben positiv, nach unten negativ dargestellt, und zwar vollständig durch eine Strecke, z. B.  $O-A$  in unserer Abb. 1, andeutungsweise durch deren Endpunkt  $A$ . Wir wählen als Größen der ersten Art die wirk-

lichen Wurzeln oder Wurzelteile der Gleichung. Daher stellt uns Punkt  $A$  mit seinem Rechtsabstand die Wurzel  $x_1 = 1$  dar,  $C$  mit seinem Linksabstand  $x_2 = -1$ . Die dazu senkrecht abzubildenden Größen der zweiten Art seien die unwirklichen, also  $\sqrt{-1}$  enthaltenden Wurzeln oder Wurzelteile derselben Gleichung. In unserem Beispiel (4) sind das  $x_3 = \sqrt{-1}$ , dargestellt durch  $B$  über  $O$ , und  $x_4 = -\sqrt{-1}$ , dargestellt durch  $D$  unter  $O$ .

Die vier Endpunkte  $A, B, C, D$  der Wurzelbilder der Gleichung vierten Grades lassen sich aber auch, wie man in Abb. 1 sieht, als Eckpunkte des regelmäßigen Vierecks oder Quadrates auffassen, das dem Kreis um  $O$  mit dem Halbmesser 1 eingeschrieben ist. Sollte dieser erstaunliche Zusammenhang zwischen Gleichungsauflösung und Vieleckskonstruktion am Ende gar bei mehr als vier Wurzeln und Ecken ebenfalls bestehen?

Versuchen wir es noch mit dem regelmäßigen Sechseck und den 6 Wurzeln der Gleichung

$$x^6 = 1 \quad \dots \dots \dots (5)$$

Da die letztere viel schwerer aufzulösen ist als das erstere zu konstruieren, beginnen wir mit diesem (s. Abb. 2).

$(\pm 1)^6 = 1$ ; daher sind 1 und  $-1$  wieder zwei der (diesmal 6) Wurzeln und  $E (1,0)$ <sup>1)</sup> bzw.  $H (-1,0)$  ihre geometrischen Andeutungen. Man nimmt die Strecke 1 (z. B.  $O-E$ )

<sup>1)</sup> Bedeutet: Zu Punkt  $E$  gelangt man, indem man von  $O$  1. 1 nach rechts geht und von hier  $0 \cdot \sqrt{-1}$  hinauf; hingegen zu  $I (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3})$   $\frac{1}{2}$  nach links und  $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}$  hinauf.

in den Zirkel und beschreibt damit als Halbmesser um die Mittelpunkte  $O$ ,  $E$  und  $H$  Bogen. Dann erhält man bekanntlich als deren Schnittpunkte die fehlenden regelmäßigen Sechseckpunkte  $F$ ,  $G$ ,  $I$  und  $K$ . Aus den gleichseitigen Dreiecken  $O-E-F$  usw. ergeben sich nach dem von Pythagoras aus Ägypten mitgebrachten Satz (oder durch bloße Messung):

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}\right), G\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}\right), I\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}\right)^2$$

und  $K\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}\right)$ .

Aus der geometrischen Sprache in die arithmetische übersetzt: die Gleichung (5) hat die sechs Wurzeln  $x = 1$ ;  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{-1}$ ;  $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{-1}$ ;  $-1$ ;  $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{-1}$  und  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{-1}$ .

Machen wir beispielsweise mit  $x_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{-1}$  die Probe auf unsere kühne geometrische Methode der Auflösung höherer Gleichungen! Gilt  $(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{-1})^6 = 1$ ? Zunächst ist nach der Schulformel für das Kubieren:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{-1}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \\ & \quad + 3 \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{-1} + \\ & + 3 \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{-1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{-1}\right)^3 = \\ & = -\frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{-1} - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot (-1) + \\ & + \frac{1}{8} \cdot 3 \sqrt{3} \sqrt{-1} = -\frac{1}{8} + \frac{3}{8} \sqrt{3} \sqrt{-1} + \\ & \quad + \frac{9}{8} - \frac{3}{8} \sqrt{3} \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Hierin heben die beiden unterstrichenen Ausdrücke einander wegen gleichen absoluten Wertes, aber entgegengesetzten Vorzeichens zu Null auf. So treten unsere Springwurzeln aus der Umsetzung, die sie doch erst ermöglicht haben, schließlich wieder unverbraucht hinaus, wie die sogenannten „Katalysatoren“ („Hinablöser“, „Auslöser“) aus einer chemischen Umsetzung: Die Helfer aus dem Märchenland ziehen sich zurück, aber als ihr irdisches Geschenk bleibt uns  $-\frac{1}{8} + \frac{9}{8} = \frac{8}{8} = 1$ . Ein Abschütze wäre wohl sehr erstaunt, zu hören, daß er statt  $1 \times 1 = 1$  sagen könnte:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{-1}\right) \text{ mal } \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{-1}\right) \\ & \quad \text{mal } \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{-1}\right) = 1. \end{aligned}$$

Und doch stimmt es, wie wir soeben nachgerechnet haben.

Aber wenn  $x$  bereits zur dritten Potenz 1 ergibt, dann ist es — diesmal schon wegen des gewöhnlichen Einmaleins — auch zur sechsten gleich 1. Die Probe bestätigt also unsere kühne Vermutung, nur stimmt sie eigentlich schon

<sup>2)</sup> Siehe die Fußnote auf S. 38.

zu früh. Und warum? Weil der von uns gewählte „Wurzelpunkt“  $G$  ja nicht nur Eckpunkt des in  $E$  beginnenden (in Abb. 2 voll ausgezogenen) regelmäßigen Sechseckes ist, sondern zugleich auch des ebenfalls in  $E$  anfangenden (gestrichelt gezeichneten) gleichseitigen Dreieckes. Er stellt also ebenso wie  $E$  und  $I$  überdies eine der drei Wurzeln der Gleichung

$$x^3 = 1 \dots \dots \dots (6)$$

dar.

Unser Verfahren führt auch zum Ziele, wenn in der Gleichung die gegebene Zahl von 1 verschieden ist. Man versuche z. B.  $x^8 = 256$  graphisch aufzulösen! Da  $(\pm 2)^8 = 256$ , schneidet der um  $O$  zu zeichnende Kreis die wirkliche (= waagrechte) Achse statt in 1 und  $-1$ , diesmal in 2 und  $-2$  (siehe das gestrichelte Achteck in Abb. 1), hat also den doppelten Halbmesser. Die übrigen sechs Eckpunkte des ihm eingeschriebenen regelmäßigen Achteckes liefern schon bei grober Messung die sechs weiteren Wurzeln:  $1,4 + 1,4 \sqrt{-1}$ ;  $2 \sqrt{-1}$ ;  $-1,4 + 1,4 \sqrt{-1}$ ;  $-1,4 - 1,4 \sqrt{-1}$ ;  $-2 \sqrt{-1}$ ;  $1,4 - 1,4 \sqrt{-1}$ .

Tatsächlich ermöglicht es obiger, in zwei Jahrhunderten durch Moivre, Euler und Gauß begründeter Zusammenhang zwischen Geometrie und Gleichungswissenschaft, außer den hier besprochenen Gleichungen auch  $x^5 = \pm 1$ ;  $x^{10} = 1$ ;  $x^{12} = 1$  usw. wegen der leichten Konstruierbarkeit der entsprechenden Vielecke vollständig geometrisch aufzulösen. Umgekehrt vermochte Gauß aus der Lösung von Gleichungen wie  $x^{17} = 1$  die bis dahin unbekanntete Methode der Konstruktion des regelmäßigen 17-Ecks und noch komplizierterer Vielecke mit Zirkel und Lineal rein arithmetisch auszurechnen.

Mathematik ist aber auch die Kunst, Rechnungen zu ... vermeiden! In diesem Sinne erweist sich unser Problem ebenfalls als mathematisch par excellence. Zum Beispiel gehört das Ziehen dritter oder noch höherer Wurzeln zu den umständlichsten Rechnungen. Oben wurde gezeigt, wie hier die entsprechende Division des vollen Winkels ( $360^\circ$ ) durch drei oder mehr erleichternd an seine Stelle tritt. Unser „Einheitskreis“ führt weiters auch Division und Multiplikation auf die um eine Stufe einfacheren Rechnungsarten, nämlich Subtraktion und Addition zurück. Man rechne z. B. nach, daß  $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{-1}$

in Abb. 2 dargestellt durch Strecke  $O—G$ , mit sich selbst multipliziert ergibt:

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{-1},$$

dargestellt durch Strecke  $O—I$ . Nebenbei bemerkt streifen wir hier eine weitere erstaunliche Eigenschaft der Wurzeln obiger Gleichungen, daß nämlich jede eine einfache Potenz aller anderen Lösungen derselben Gleichung ist. Zu dem genannten Produkt ( $O—I$ ) nun gelangt man an Hand von Abb. 2 durch eine bloße Addition, indem man nämlich den Winkel  $EOG$  noch einmal über  $O—G$  hinaus aufträgt. Diese Addition (oder wegen der in unserem Beispiel auftretenden Gleichheit der beiden Summanden: diese Verdopplung) führt tatsächlich auch zum Punkt  $I$ . Die Vereinfachung jeder Rechnung um eine Stufe aber ist bekanntlich das Kennzeichen des sogenannten logarithmischen Rechnens.

Unser erweitertes Einmaleins liefert also außer der Auflösung aller „binomischen“ Gleichungen

und der Konstruktion der regelmäßigen Vielecke auch die Fundamente des logarithmischen Rechnens. Schließlich sei zur vollen Befriedigung des Praktikers überdies darauf hingewiesen, daß die Zeichenebene unserer beiden Abbildungen mit ihrer waagrechten Achse aller wirklichen Werte und ihren darüber und darunter sich erstreckenden Ebenen des Imaginären eine Grundlage der neuzeitlichen Elektrotechnik geworden ist. Der Radiotechniker etwa, der auf Schritt und Tritt mit einer Überlagerung von Gleich- und Wechselspannungen zu rechnen hat, kann beide in einer Rechnung oder Zeichnung vereinigen, indem er die Wechselkomponenten als  $\sqrt{-1}$ -Größen einsetzt.

Es sind also ziemlich lebensvolle Schritte nach vielen Richtungen, zu denen die beiden Beine der Mathematik befähigen. Sollte Schopenhauer sie nur darum hölzerne genannt haben, weil er als Tertianer das Pech hatte, in Mathematik durchzufallen?

## Können Bäume die Witterung vergangener Zeiten anzeigen?

### Jahresringe und Klimaperioden

Von Gerhard Schindler

DK 581.143.3.056 : 551.506.8

Es gibt wohl kaum etwas, das zu erforschen sich menschlicher Erkenntniswille nicht vorgenommen hätte. Dazu gehört unter anderem auch die Aufhellung von Zusammenhängen zwischen dem Zustandekommen von Baumringen und der abgelaufenen Witterung. Wie viele gehen achtlos an einem eben gefällten Baumstamm vorbei, auch wenn er geradezu herrliche Ringe erkennen läßt. Nicht so der Forscher. Sein geschultes Auge erkannte, daß hier innerhalb der einzelnen Ringe doch wieder Unterschiede festzustellen sind. Einmal darauf aufmerksam geworden, entwickelte sich eine richtige Untersuchungsmethode daraus, die dann immer weiter ausgebaut wurde. 200 bis 500 Jahre alte Bäume boten offensichtlich die ersten rohen Anhaltspunkte. Vergleiche mit alten Klimajahrbüchern ließen erkennen, daß in trockenen Jahren enge Jahresringe angelegt werden, in feuchten solche mit weiterem Abstand. Nicht immer jedoch gilt diese einfache Regel. Schon allein die Tatsache, daß im Innern des Stammes weite Ringe angetroffen werden, gegen die Rinde zu viel engere, führte zu mancherlei Schwierigkeiten. Die Ursache ist darin zu suchen, daß ein junger Baum viel rascher wächst als ein alter. Eingehendes Studium zeigte, daß es ferner noch nicht ganz sicher

ist, ob der Baum alljährlich wirklich nur einen Ring erzeugt. Mancher Leser hörte wohl schon davon, daß wir mitunter zwei Vegetationszeiten feststellen können: der Baum blüht im Herbst noch ein zweites Mal, wenn vorher ungewöhnlich günstige äußere Bedingungen ihm das erlauben. Am Rande sei noch erwähnt, daß Kahlfraß, etwa durch Raupen, ebenfalls zu einem zweiten Jahresring führen kann.

Umgekehrt können durchaus zwei Ringe bei schlechten Witterungs- und Standortverhältnissen in einem auslaufen. Damit sind wir aber auch schon bei der gleich wichtigen Voraussetzung des Standorts. Er ist letztlich auch bestimmend für die Reaktionsfähigkeit des Baumes. Als weiterer nicht zu unterschätzender Faktor wäre noch die Gattung des Baumes zu nennen. Laubbäume eignen sich im allgemeinen schlecht für die angeführten Untersuchungen. Wertvoll sind alte Bäume. Das ist insofern klar, weil unsere zusammenhängenden Witterungsaufzeichnungen bestenfalls nur bis zur zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts zurückreichen. Bis dahin können wir die Bäume bloß zur Festigung der Methode brauchen: vor diesem Zeitpunkt jedoch sollen sie allein großzügige Angaben über den Witterungsablauf erlauben.