

# Le rôle de l'abstrait dans l'œuvre de B. Riemann

Autor(en): **Gattico, Emilio**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Revue de Théologie et de Philosophie**

Band (Jahr): **43 (1993)**

Heft 2

PDF erstellt am: **16.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-381500>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## LE RÔLE DE L'ABSTRAIT DANS L'ŒUVRE DE B. RIEMANN

EMILIO GATTICO

### *Résumé*

*Dire que la connaissance mathématique est réelle ne veut guère dire que les objets mathématiques soient existants. Ce sont des idées abstraites qui, comme telles, n'ont pas été composées. L'œuvre de Riemann a été choisie pour montrer que le rôle joué par ces idées est à la base d'une géométrie qui renverra à la création de la physique mathématique. On donne des exemples historiques et on propose des suggestions épistémologiques pour montrer que la catégorie de l'abstrait représente le stade le plus développé de la recherche scientifique.*

### *I. L'abstraction ou l'élargissement des connaissances*

#### *1. Introduction*

Le problème que nous désirons poser est le suivant: peut-on parler d'une primauté de la théorie sur la pratique, à savoir de l'abstrait sur le concret? Notre réponse est affirmative parce que nous pensons que les structures déductives, lorsqu'elles sont construites sans souci d'une application possible au réel, peuvent cependant se révéler plus tard des outils indispensables à la compréhension de phénomènes physiques. C'est le cas des géométries non euclidiennes pour la théorie de la relativité.

Nous allons considérer dans ce qui suit l'œuvre de Riemann, ce grand mathématicien allemand nous paraissant l'un des exemples les plus représentatifs de la position qui est la nôtre. Il ne s'agira pas de présenter son œuvre, mais de la considérer comme le symbole d'une époque qui a établi la supériorité de la catégorie de l'abstrait sur celle du concret. La découverte qu'il était possible de lire la réalité de diverses façons a permis d'élargir nos connaissances, d'en déplacer les bornes. Cela signifie que, dépassant les limites imposées habituellement par la recherche empirique, il devient possible d'élaborer un nombre illimité de constructions.

Ainsi, nous sommes amenés à réfléchir au statut des mathématiques et notre choix de la géométrie n'est pas un hasard, cette matière jouant un rôle tout à fait particulier. En effet, elle appartient de plein droit aux mathématiques (on a même dit qu'elle en était la mère) et, en même temps, elle est très liée à la réalité empirique dont elle constitue l'outil de description et de saisie le plus adéquat.

## 2. *La coupure riemannienne (locale/globale) en géométrie et en philosophie*

Lorsque Riemann développe le concept de variétés  $n$ -étendues et indique les métriques possibles qu'on peut appliquer à de tels espaces, on aboutit à une remarquable coupure tant au niveau local (géométrie) qu'au niveau global (mathématique), mais aussi au niveau philosophique. D'un côté il implique une façon différente de concevoir un concept retenu comme primaire (l'espace comme intuition transcendantale, ou loi selon laquelle se constitue la réalité de l'intuition sensible, «système de rapports qui se développent simultanément à l'expérience et à la science mais n'en dérivent pas; ce que veut dire Kant quand il dit que nous les possédons a priori» [Martinetti, 1946, p. 44]); d'un autre côté, il souligne une remarquable réflexion épistémologique sur une mathématique qui ne se borne plus à mesurer les objets, mais aussi à les décrire. Lorsque nous parlons de coupure, nous entendons ce mot dans le sens de Bachelard, quand il nous suggère de considérer une situation où deux stades culturels tout à fait différents s'opposent. Par exemple: «Entre la connaissance commune et la connaissance scientifique la rupture nous paraît si nette que ces deux types de connaissance ne sauraient avoir la même philosophie» (1956, p. 224).

## 3. *Incompréhension de la physique classique*

A l'exception des grands hommes de science que furent Galilée, Newton, Laplace, etc., qui avaient déjà entrevu cette problématique, la physique classique ne pouvait guère se rendre compte des ouvertures auxquelles nous venons de nous référer. De manière idéologique, car encore limitée, la science prétendait donner des vérités sûres et universellement valables: la crise du mécanisme n'était pas encore apparue, autrement dit on avait confiance dans la sûreté de l'évidence et on ne pouvait concevoir l'explication d'un phénomène qu'à travers le modèle mécaniste. Et surtout, on n'avait pas encore compris la nécessité d'un approfondissement à l'intérieur même de la science, et on ne pensait pas pouvoir aboutir à une conception différente de la recherche scientifique.

Il est clair que, malgré les résultats incontestables auxquels on avait abouti, il était très difficile de dépasser un certain niveau, et que sans un modèle théorique a priori, les changements étaient difficiles, mais surtout les ouvertures scientifiques à l'encontre de l'immobilisme de la recherche, voire de sa «clôture».

#### 4. *Vers la physique-mathématique*

La géométrie nous fournit un grand nombre d'exemples très significatifs de ce mouvement: elle a besoin de trouver des outils lui permettant de dépasser les bornes que lui imposent les relations avec l'expérience. Pour ce faire, la mathématique est l'instrument adéquat et devient déterminante lorsqu'elle essaie d'élargir le contexte de la géométrie, en la projetant au-delà des données empiriques. De cette manière, elle élimine aussi le parti pris idéologique qu'on vient de voir, qui avait accompagné la géométrie euclidienne pendant des siècles.

Riemann nous dit: «La réponse à ces questions ne peut s'obtenir qu'en partant de la conception des phénomènes, vérifiée jusqu'ici par l'expérience, et que Newton a prise pour base, et en apportant à cette conception les modifications successives, exigées par les faits qu'elle ne peut pas expliquer... Ceci nous conduit dans le domaine d'une autre science, dans le domaine de la Physique...»<sup>1</sup>.

Il y aurait beaucoup de choses à dire sur ce point. Pour une première observation, référons-nous à Piaget (1953), lorsqu'il affirmait que jusqu'à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle les mathématiciens s'étaient partagés entre l'idéal d'une mathématique pure et celle d'une déduction mathématique du réel et que seulement ensuite ils avaient trouvé un accord constructif entre ces deux matières (physique-mathématique). Ensuite, nous pouvons affirmer avec Lévi-Leblond que: «A la naissance des théories physiques leurs formulations se présentent comme des édifices, neufs certes, mais encore recouverts d'échafaudages et parsemés de débris provenant des anciennes constructions qu'elles remplacent. Retirer les échafaudages, enlever les débris, mettre en pleine lumière la structure interne de l'édifice, la nature de la solidité de ses assises comme ses points faibles, c'est ainsi que l'on peut décrire la tâche de la physique mathématique» (1982, p. 204). Or, s'il est clair qu'il y a un «rapport intime de la mathématique de Riemann [avec] la physique mathématique, [toutefois], indépendamment de ceci, les résultats qui dérivent des recherches des mathématiques pures sont bien au-dessus de tout ce genre de particularisation. C'est un schéma général logique, système dont le

<sup>1</sup> «Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie», in *Œuvres mathématiques de Riemann*, p. 297.

contenu particulier n'est pas indifférent, ce contenu pouvant être choisi de manières diverses»<sup>2</sup>.

Riemann est assurément le savant qui s'est rendu parfaitement compte de ce problème sous-jacent à la mathématique et qui a présenté pour la première fois, de façon très claire, la possibilité de le dépasser. Cela signifie que si, auparavant, la mathématique était issue de la physique, dont elle était un outil, les constructions mathématiques abstraites nous permettent maintenant de déduire les explications du monde physique.

Plusieurs conséquences en découlent. Et l'une des plus importantes, selon nous, est que l'on peut voir comment ce dépassement montre qu'un même problème peut être vu selon différentes modalités ou, d'une manière générale, comment le rapport aux objets à connaître pourra suivre des parcours différents, mais avec une même potentialité heuristique. En généralisant nous pouvons dire avec W. C. et M. Kneale, que nous pouvons nous représenter des aspects d'une géométrie non euclidienne dans la géométrie euclidienne de la même façon que «la surface de la France peut se représenter sur une partie de la surface de l'Angleterre» (1962, p. 437).

##### 5. *Elargissement de concepts reconnus certains*

De cette position, il découle certaines conséquences. Par exemple, il n'est plus nécessaire de distinguer entre postulats (propositions évidentes en elles-mêmes) et axiomes (propositions indémontrables). Nous savons que si on possède les axiomes d'une science, le rôle de la logique est la formulation des règles permettant de déduire les théorèmes de cette science. Cela détermine sa tâche et tout enrichissement supplémentaire ne peut qu'en estomper les délimitations précises. Dès lors, nous pouvons «discuter» des propositions euclidiennes qui avaient été acceptées comme des vérités indubitables et indémontrables, et nous poser la question suivante: quelle valeur aura une géométrie qui nous oblige à accepter plusieurs propositions non intuitives? Pour y répondre, on doit commencer à discuter d'énoncés qui ne nous semblent pas intuitifs et affirmer qu'ils ont le même degré d'incertitude que ceux qui le sont. Autrement dit, on est obligé de constater que ce qu'on pensait vrai n'était qu'une possibilité, et de considérer qu'une construction par abstraction permet de penser à plusieurs mondes possibles qui pourraient trouver une confirmation empirique, ce qui était impossible auparavant.

<sup>2</sup> «Discours de M. le Professeur Felix Klein de l'Université de Göttingue, prononcé à Vienne le 27 septembre 1894», in *ibid.*, p. XXXI.

Si nous disons qu'en donnant un plan, une droite et un point, on peut avoir une et une seule parallèle à la droite donnée qui passe par le point, il est difficile d'en douter. Pour la même raison, personne ne douterait qu'en s'éloignant indéfiniment dans l'univers, en suivant des directions opposées, on ne se rencontrerait nulle part. Pourtant nous ne sommes pas certains de cela et, en même temps, nous ne sommes pas non plus certains qu'on peut avoir seulement une parallèle à une droite donnée. En y réfléchissant, on s'aperçoit qu'il s'agit de jugements pré-scientifiques.

Nous ne devrions pas parler de jugements pré-scientifiques, car la mise en forme des intuitions est déjà un processus scientifique. Si nous employons le mot «pré-scientifique», c'est seulement pour souligner le passage d'une conception inamovible de la réalité à une représentation toujours relative.

Ainsi on pourrait dire que l'on peut avoir plusieurs parallèles à une droite, bien qu'elles passent par le même point, ou que deux sujets qui s'éloignent indéfiniment dans l'univers pourraient se retrouver face à face. Celui qui dirait le contraire aurait tout autant raison que celui qui soutiendrait cette proposition.

Il s'agit d'un rapport entre unité et multiplicité où, encore une fois, mathématique et philosophie se mêlent. Nous pouvons bien affirmer qu'une multiplicité de structures mathématiques ne peut exister qu'à titre de possibilité, comme par exemple: il n'y a pas de limites au nombre des mots que nous pourrions prononcer, alors que ce que l'on peut dire en utilisant ces mots est limité. Malheureusement nous n'avons pas résolu la question: nous pouvons penser avoir un nombre fini de mots, mais le nombre des combinaisons que nous pouvons obtenir sera illimité.

A ce niveau-là nous pourrions produire des constructions qui peuvent être tout à fait exactes du point de vue grammatical (celui de la logique de la langue). En revanche, si nous considérons le sens de ces propositions, nous nous apercevons que plusieurs d'entre elles n'en ont guère ou qu'elles ne suivent pas les règles de la sémantique.

## II. *Théorie et pratique*

### 1. *La thèse riemaniennne*

«Les déterminations métriques exigent l'indépendance entre les grandeurs et le lieu, ce qui peut se réaliser de plusieurs manières. L'hypothèse qui s'offre d'abord, et que je développerai ici, est celle dans laquelle la longueur des lignes est indépendante de leur position, et où par suite chaque ligne est mesurable au moyen de chaque autre» (Riemann, 1968, p. 286). Ici Riemann engage son système en recourant à une hypothèse

unique: si on donne une  $V$ -variété (nous pouvons la concevoir comme la grandeur) ses lignes ont une longueur qui ne dépend plus de la position. Autrement dit, en partant d'une ligne on peut mesurer toutes celles qu'on veut. Cela signifie aussi qu'il est possible de mesurer une ligne qui part d'un point en employant les différentielles des coordonnées du point même.

Partons, par exemple, de deux points  $P$  et  $P'$  qui appartiennent à  $V_n$ . En partant du point  $P$  (où  $P \in V$ ) nous pouvons le déterminer à travers  $x_1 \dots x_i \dots x_n$  coordonnées. Si ensuite nous arrivons à déterminer  $P'$  en employant les coordonnées  $x_1 + dx_1 + \dots + x_i + dx_i + \dots + x_n + dx_n$ , il est nécessaire de retrouver la longueur  $ds$  de l'élément linéaire selon les différentielles  $dx_1 + \dots + dx_i + \dots + dx_n$ . De plus, dans la variété  $V_n$  on suppose trois conditions:

1.  $ds^2 = a_{ik} dx_i dx_k$  (forme différentielle quadratique);
2.  $a_{ik} = a_{ki}$ . (Il s'agit des fonctions assignées des  $x_i$  qui ont la caractéristique d'être continues, univoques, indéfiniment dérivables);
3.  $ds$  est invariant par rapport à chaque changement de coordonnées obtenues en substituant les  $x_i$  à d'autres  $n$ -variables.

La variété  $V_n$ , qui respecte ces trois conditions, est appelée «espace de Riemann».

La nouveauté essentielle, qui libère des liaisons séculaires avec la géométrie d'Euclide et qui représente une importante coupure théorique, est fondée sur le fait que le choix arbitraire des coefficients  $a_{ik}$  du  $ds$  permet la construction d'un nombre infini de géométries.

Si nous prenons l'équation:  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$  nous sommes reconduits à la métrique euclidienne qui, dès lors, n'est plus que l'une parmi les métriques possibles.

## 2. Questions liées à la nouvelle conception de l'espace

«On sait que la géométrie admet comme données préalables non seulement le concept de l'espace, mais encore les premières idées fondamentales des constructions dans l'espace. Elle ne donne de ces concepts que des définitions nominales, les déterminations essentielles s'introduisant sous forme d'axiomes. Les rapports mutuels de ces données primitives restent enveloppés de mystère; on n'aperçoit pas bien si elles sont nécessairement liées entre elles, ni jusqu'à quel point elles le sont, ni même a priori si elles peuvent l'être» (*idem*, 280). C'est avec ces propositions, aujourd'hui très connues, que débutent les pages les plus célèbres de l'histoire de la mathématique: il en ressort un nombre illimité de géométries en fonction du choix des coefficients  $a_{ik}$  du  $ds$ . Dans l'espace physique, elles peuvent être ramenées à trois variétés, autrement dit à une courbure positive, négative ou nulle.

Déjà à son époque, Riemann soulignait qu'au niveau empirique il était impossible d'exclure avec certitude l'une de ces trois courbures. Et ses mises au point marquèrent un développement scientifique très important puisqu'elles projetaient la recherche dans un domaine cette fois relativiste, et non plus absolu. Ainsi, «ces faits, comme tous les faits possibles, ne sont pas nécessaires; ils n'ont qu'une certitude empirique, ce sont des hypothèses. On peut donc étudier leur probabilité, qui est certainement très considérable dans les limites de l'observation, et juger d'après cela du degré de sûreté de l'extension de ces faits en dehors de ces mêmes limites...» (*idem*, 281).

C'est alors qu'on préconise l'avènement d'une physique théorique où la métrique de l'espace, au moins dans les voisinages les plus proches de la matière, serait dérivée des phénomènes qui ont lieu et les expliquerait. Or, le domaine métrique (ou l'instrument de mesure) n'est jamais donné définitivement de façon exacte, même si la rigueur de sa procédure est garantie. Au contraire la métrique, connexe à la matière, se modifie en rapport avec les processus et les transformations de la matière même. Dans un sens plus général, on ne peut plus considérer la métrique comme une forme statique mais comme un élément du contenu physique de la matière, et on doit ainsi la concevoir, elle aussi, comme passible de changements continus. Cela signifie que dans le domaine de la géométrie on peut avoir des propriétés d'étendue et des propriétés métriques, où les premières produisent seulement une série discrète de cas (les déterminations expérimentales qui s'y réfèrent sont seulement possibles), tandis que les secondes produisent un continu de ces possibles.

En revenant à Riemann, nous lisons: «Dans le cours des considérations que nous venons de présenter, nous avons d'abord séparé les rapports d'étendue ou de région des rapports métriques, et nous avons trouvé que, pour les mêmes rapports d'étendue, on pourrait concevoir différents rapports métriques» (*idem*, p. 294-295). Et sur la même page encore: «il existe, entre les simples rapports d'étendue et les rapports métriques cette différence essentielle que, dans les premiers, où les cas possibles forment une variété discrète, les résultats de l'expérience ne sont, à la vérité, jamais complètement certains, mais ne sont pas inexacts; tandis que, dans le second, où les cas possibles forment une variété continue, toute détermination de l'expérience reste toujours inexacte, quelque grande que puisse être la probabilité de son exactitude approchée» (*idem*, p. 295). Notons qu'il faut bien distinguer entre *Unbegrenztheit* et *Unendlichkeit*, car à la première notion, on lie une certitude empirique (probabilité) plus grande qu'à n'importe quelle expérience externe, tandis que la seconde ne dérive pas nécessairement de la première (si l'espace possède un  $a > 0$ , il est, dans tous les cas, un espace illimité mais fini).



### 3. *Conséquences empiriques et abstraites*

Un travail qui part d'une réflexion abstraite et aboutit dans le concret nous montre que la réalité que nous étudions est polymorphe, et que les connaissances que nous en avons sont toujours relatives au contexte dans lequel nous nous plaçons. En revanche, cela signifie aussi que chaque contexte a une géométrie qui lui est propre, et que c'est la faculté d'abstraction qui nous indique les réalités possibles que nous pourrions trouver. Qui plus est, l'abstraction nous «explique» très clairement la réalité que nous considérons au fur et à mesure de l'occasion qui se présente, car nous pouvons la confronter et la mettre en relation avec toutes les autres. Or, du point de vue empirique, on peut contrôler l'exactitude des résultats lorsqu'on a terminé une recherche et en corriger certaines parties au cours du travail qu'on est en train de faire: les résultats ne seront toujours que probables et surtout strictement locaux. Par contre, avec une perspective abstraite comme point de départ, à l'absence de restrictions s'oppose la nécessité d'une exactitude formelle, qui est la seule condition pour dépasser la perspective locale typique de l'empirisme et pour pouvoir produire des résultats relativement globaux. Evidemment, cela comporte l'introduction de nouveaux concepts, alternatifs sans être opposés, à savoir celui d'ensemble de  $n$ -ordonnées qui remplace ceux de ligne, de point, de droite, etc.

### 4. *Le nouveau rapport théorie/pratique: statut des hypothèses*

Quel est maintenant le rapport que l'on doit concevoir entre abstraction et réalité ou, plus généralement, entre théorie et pratique? Nous le trouvons aussi dans l'œuvre de 1854, qui marque le passage d'une conception métaphysique de l'espace (qui rappelle celle de Herbart) à une conception empirique.

Ainsi la théorie remplit le double rôle d'être première par rapport à l'expérience, laquelle toutefois ne doit pas être définie comme moins importante, mais comme une détermination possible de la théorie elle-même. Toutefois si nous acceptons qu'on peut avoir  $n$ -déterminations métriques d'une grandeur  $n$ -étendue et que l'espace physique représente un cas spécifique de variétés tridimensionnelles, il faut considérer l'espace physique en partant de l'expérience. Plus précisément, Riemann dit qu'on ne peut pas tirer les propositions géométriques de concepts généraux de grandeur, tandis que les propriétés d'après lesquelles l'espace se différencie par rapport à d'autres variétés tridimensionnelles possibles peuvent être tirées de l'expérience (*idem*, p. 281). Le but à atteindre est alors le suivant: produire une liste, aussi complète que possible, des faits les plus simples à partir desquels nous pouvons étudier les métriques de l'espace.

On est bien loin, surtout avec Riemann, de postuler quelque chose ou quelque événement comme premier par rapport aux autres. Il ne s'agit pas non plus de classer les faits par rapport à la métrique qu'on aura choisie pour les décrire, car ceux-ci n'auraient plus de signification si nous affirmons qu'elle ne pourra jamais être déterminée. En effet, nous pouvons proposer beaucoup de systèmes d'éléments simples qui suffisent à déterminer des métriques de l'espace... Ces faits, comme tous les faits, ne possèdent qu'une certitude empirique, ils ne sont pas nécessaires. Riemann appelle *hypothèses* ces faits: «Le mot hypothèse a maintenant un signifié un peu différent par rapport à Newton, on entend désormais comme hypothèses tout ce que la pensée ajoute aux phénomènes» (B. Riemann, 1902, p. 525). En partant d'une base théorique, on se réfère à la réalité, qui a la fonction de présenter de nouvelles hypothèses (mais jamais des données vraies) pour l'accroissement de la connaissance.

Ici, la géométrie peut être retenue comme l'outil le meilleur pour mettre en relation les catégories de l'abstrait et du concret. Sans revenir au tout de son histoire, on peut soutenir que la primauté doit être assignée à l'abstrait, cette catégorie étant en mesure de synthétiser toutes les possibilités que l'univers mathématique nous offre et, en même temps, d'analyser, dans sa plus simple expression, les cas spécifiques que nous examinons à travers l'expérience. Cela implique «que nous ne devons pas renoncer à corriger et intégrer nos conceptions des faits empiriques avec la réflexion» (*idem*, p. 523). Au contraire, si on ne procède pas ainsi, il adviendra ce que Kant fit dans *Kritik der reinen Vernunft*, c'est-à-dire jeter l'enfant avec l'eau du bain (*idem*, p. 524).

##### 5. Vers la méthode hypothético-déductive

Riemann a montré que, du point de vue théorique, nous pouvons trouver autant de métriques que nous voulons selon les espaces considérés. Les géométries non euclidiennes et la géométrie euclidienne nous en proposent trois. Il s'agit alors de développer celle qui est la plus utile en raison de ses propres buts. Qui plus est, nous devons partir maintenant d'une hypothèse en renonçant à prendre comme point de départ un ensemble de propositions considérées comme sûres et certaines. Autrement dit, nous devons dorénavant partir de propositions du type suivant:

«*Si l'univers est fini et illimité, alors on peut y adapter une géométrie sphérique*»

et non plus de propositions comme:

«*La somme des angles internes d'un triangle est égale à 180°*»

Avec ce changement naît l'idée d'une géométrie équivalente à un ensemble de systèmes hypothético-déductifs caractérisé par la primauté de l'abstrait, signifiant que l'on a dépassé une conception de la science centrée sur des postulats évidents, puisqu'on s'aperçoit que l'on peut avoir d'autres conceptions.

Dans l'ancienne géométrie qui part de l'évidence empirique, on a des propositions générales qui concernent des ensembles de choses (jamais une seule chose); on a ensuite des propositions universelles qui ont la caractéristique d'être nécessairement vraies et pas seulement vraies de fait. Enfin il faut subsumer des variétés spécifiques en les incluant dans des règles générales. La conséquence des ouvertures apportées par les géométries non euclidiennes avait été de montrer que les définitions n'étaient que des conventions et que les propositions universelles jouaient le rôle d'hypothèses.

Au début, ces ouvertures ne cherchaient qu'à conserver la problématique kantienne privilégiant la géométrie euclidienne pour l'analyse de l'espace (Poincaré), mais ensuite elles ont conduit à une conception purement formelle (Hilbert). Qui plus est, on a pu démontrer que la cohérence des espaces géométriques pouvait aussi trouver une application physique par rapport à des espaces particuliers, la structure de l'espace étant maintenant relative à l'univers choisi.

Si nous nous bornons aux droites examinées dans l'espace physique, le cinquième postulat euclidien est vrai. Il s'agit d'une affirmation évidente en elle-même dont, toutefois, le mathématicien peut très facilement se débarrasser. Depuis que les géométries non euclidiennes sont nées (et surtout la géométrie sphérique riemannienne), étudier les mathématiques exige de modifier son rapport avec la géométrie. Au départ, une abstraction doit permettre de choisir la géométrie la plus convenable et, ensuite, de se borner à traiter des conséquences logiques d'un système d'axiomes. Autrement dit, les théories mathématiques, voire géométriques, ne sont plus des propositions vraies parce qu'elles ont été obtenues en partant de postulats vrais et évidents: il ne s'agit donc que de propositions tirées logiquement d'autres propositions, admises à titre hypothétique.

### III. *Possibilité, nécessité, vérité*

#### 1. *La nouveauté épistémologique de Riemann: de la nécessité à la possibilité*

Lorsque Riemann affirme que l'expérience nous montre trois types d'espaces (courbure positive, négative et nulle) et qu'on ne peut soutenir que l'un d'eux est meilleur que les autres, il choisit pourtant l'espace à

courbure constante négative, car il pense qu'un espace illimité, mais fini, est plus empirique qu'un autre. Malgré les critiques de certains philosophes et particulièrement de Milhaud, on observe (et pour notre propos il est important de le relever), qu'il souligne la possibilité de  $n$ -espaces, c'est-à-dire d'un nombre infini de mondes. Cette théorie, dont l'idée remonte à Leibniz, nous place dans une perspective épistémologique tout à fait nouvelle.

Etant donné qu'il y a plusieurs possibilités, existe-t-il quelque attitude que l'on puisse estimer nécessaire? Si nous donnons la primauté à l'abstraction, nous devons nous poser cette question de façon différente. Nous disposons, bien sûr, d'un moyen pour obtenir plusieurs constructions qui ont toutes la caractéristique d'être cohérentes et valables, et non contradictoires entre elles. Mais devons-nous les accepter toutes ou pouvons-nous en préférer une par rapport aux autres, en sachant qu'elles sont toutes valides? Ne serait-il pas préférable alors d'opter pour une perspective strictement empiriste qui nous donne quelque assurance à l'égard de certains faits, et que l'on peut toujours modifier sans toucher aux principes premiers? Nous pensons que non et l'histoire des sciences montre que ce problème peut être considéré de façon différente.

Un fait, une théorie, deviennent nécessaires lorsqu'on a satisfait aux questions (abstraites, mais aussi concrètes), que la connaissance nous pose. Piaget-Garcia (1983) suggèrent que l'on parvient à une construction nécessaire lorsqu'on a pu construire une structure ordonnant toutes les possibilités utilisables. En même temps, quand on a atteint un résultat, on possède déjà les bases pour envisager d'autres solutions possibles. Autrement dit, ce processus est toujours relatif: satisfaire à une série de questions ne doit pas faire croire que le problème est résolu. Au contraire, on peut penser à une extension des degrés de certitude, mais sans l'entendre comme un résultat définitif, car elle représente toujours une position momentanée où les décalages se mêlent aux progrès. Nous avons donc une nouvelle notion de nécessité, qui ne s'impose «qu'après avoir été rendue possible par les états antérieurs et elle engendre à son tour de nouvelles possibilités» (Piaget, 1977, p. 236).

Il nous semble que l'étude de Riemann est l'un des exemples les plus significatifs pour illustrer cette dialectique entre possibilité et nécessité, parce qu'elle nous montre que les affirmations qui semblent évidentes en elles-mêmes ne le sont plus si nous cherchons à sortir de certains schémas postulés comme uniques.

Le problème est important, car on touche au concept de vérité. Pour en traiter, quelques précisions permettront de le clarifier.

Un système  $F$  (du premier ordre) est appelé cohérent s'il n'existe aucune proposition  $A$  (où  $A \in F$ ), telle que la formule ( $A$  et  $(\neg A)$ ) soit un théorème de  $F$ . Si on dit que les axiomes sont des propositions vraies, il

n'y a pas de problème: il suffit de procéder par le biais d'une méthode déductive correcte et les propositions qu'on obtient sont vraies. Toutefois nous venons de voir qu'avec la possibilité d'abstraire plusieurs propositions possibles (qui ont la possibilité d'être vraies) les axiomes deviennent des énoncés qui ne sont ni vrais ni faux. Or sans ces conditions on ne peut parler de cohérence que si (et seulement si) il existe une proposition qui n'est pas un théorème.

Ayant découvert plusieurs façons de représenter la géométrie non euclidienne dans les systèmes d'Euclide, on peut constater que les trois systèmes géométriques sont équivalents par rapport à la relation *être cohérent* (les trois propriétés d'une relation d'équivalence — réflexivité, symétrie, transitivité — sont vérifiées). Nous avons aussi vu que la référence à la nature abstraite, ou conventionnelle, de la géométrie, nous a conduits à concevoir la notion de vérité d'une autre façon. Autrement dit, cette cohérence fait «apparaître la dissociation entre la vérité expérimentale concernant l'espace physique et les vérités théoriques possibles» (Fraisse, 1982, p. 40).

Mais on pourrait aussi penser qu'il est préférable de se borner à l'expérience, pour éviter d'affronter des problèmes assez étranges. En effet, nous partons du fait qu'il y a une vérité et ensuite nous constatons qu'il peut y en avoir plusieurs. Bien sûr, on pourrait y voir un jeu. Toutefois l'histoire des sciences montre que Einstein, par exemple, a choisi la géométrie sphéro-elliptique et qu'il faut bien une raison pour préférer un jeu à un autre. Sans chercher à savoir ce qu'est la vérité en soi (ce serait impossible), nous pouvons néanmoins nous poser la question suivante: existe-t-il une géométrie vraie?

## 2. *Le problème de la vérité et la géométrie*

La question n'est pas rhétorique, car elle implique la mise en jeu de deux concepts: celui d'adéquation ou de vérité empirique et celui de validité ou de vérité logique. Nous savons que les expressions qui sont des théorèmes sont celles qui sont valides, c'est-à-dire soit toujours vraies soit vraies pour toutes les valeurs de leurs variables libres. Autrement dit: une formule *A* est logiquement valide si, et seulement si, *A* est vraie pour chaque interprétation.

Toutefois depuis Goedel (1931) on sait que les théorèmes d'un système formel ne peuvent jamais représenter la totalité des principes sémantiques dont on vient de parler. On sait aussi que les logiciens du siècle passé se sont arrêtés à ce stade et que, de ce fait, les tentatives de Frege et aussi de Peano, qui prétendaient trouver les fondements des mathématiques, n'ont pas abouti. En fait, un système ne peut être adéquat qu'à la condition d'être évalué avec d'autres critères que les expressions valides. Dans les *Principia*

*Mathematica*, par exemple, pour dériver la théorie complètement codifiée de la mathématique, on a besoin de l'axiome du choix et de celui de l'infini.

Ces précisions montrent qu'une théorie peut être adéquate, mais que cela n'implique pas qu'elle soit aussi non contradictoire. La contradiction est une raison suffisante pour produire une proposition fausse, mais elle n'en est pas une condition nécessaire. Autrement dit, on décide de la fausseté de plusieurs propositions ou raisonnements, mais en se bornant à des considérations empiriques, sans en examiner la cohérence logique. Or, si nous nous limitons à ce niveau, la question se pose de savoir si nous avons le droit de dire qu'une théorie est vraie ou fausse?

Il faut être attentifs à ce point, car nous ne pouvons pas nous borner à donner une démonstration de validité, la démonstration d'une théorie n'étant pas équivalente à sa vérité. Si on donne une proposition, on doit établir tout de suite si elle est vraie ou non, sans aucune médiation, le rôle de la démonstration résidant seulement dans la nécessité de montrer que la proposition est non contradictoire (ou le contraire). Mais si on ne part pas de prémisses vraies, il peut arriver qu'une démonstration correcte aboutisse à de fausses conclusions. Pour les mêmes raisons il peut arriver qu'une démonstration fausse nous conduise à des conclusions vraies.

Or le mérite que nous pouvons attribuer à Riemann est d'avoir mis en évidence la valeur sémantique du concept de vérité, donc d'avoir mis en rapport un langage (métriques différentielles) et un univers d'objets auxquels il voulait se référer. Ainsi, comme on peut le lire dans les premières pages de sa *Habilitationschrift*, on ne peut pas parler d'une géométrie qui étudierait un seul monde considéré comme champ d'objets et de situations unique, puisqu'il y a plusieurs mondes possibles; chacun d'eux rend compte d'une théorie mathématique spécifique qui n'est cependant jamais la seule possible.

### 3. *Nécessité de sortir de l'expérience immédiate*

En nous fondant sur l'évidence immédiate nous aurions donc la possibilité de décider si une théorie est fausse par rapport à une autre. Si on sort de l'expérience immédiate, la réalité physique nous montre aussi qu'il y a des conditions qui nous amènent à préférer une théorie à une autre et qu'il n'est plus possible de conserver intacte la valeur épistémique (ou idéologique) de la philosophie traditionnelle (par exemple, la géométrie de Riemann a été adoptée dans la théorie de la relativité générale en fonction de la concentration des masses dont l'influence se manifeste dans la zone d'espace considérée). A partir de Riemann naissent de nouvelles conceptions de l'espace, qui non seulement dépassent la métaphysique kantienne

qui parlait d'un espace absolu, mais qui montrent encore la nécessité de sa conception relative. Certes, l'espace dont parle Riemann et ses contemporains nous donne encore l'impression d'être un espace réel, bien qu'hypothétique; et d'autre part, on sait qu'il faudra attendre Hilbert pour disposer d'une conception vraiment formelle. Toutefois, à ce niveau déjà, on voit apparaître des problématiques très importantes. Dorénavant l'espace n'est plus défini seulement comme une totalité de points, car on peut aussi le représenter comme composé de droites<sup>3</sup>. En voici un exemple:

Les trois propositions suivantes (qu'on peut faire correspondre aux géométries hyperbolique, euclidienne et sphérique) fournissent trois possibilités:

- A) la somme des angles internes de n'importe quel triangle est plus petite que  $180^\circ$ ;
- B) la somme des angles internes de tous les triangles est  $180^\circ$ ;
- C) la somme des angles internes de chaque triangle est plus grande que  $180^\circ$ .

Ces trois propositions ont été démontrées rigoureusement, mais aucune d'entre elles ne trouve de contrôle empirique qui suffise à indiquer quelle est la vraie possibilité, bien qu'évidemment personne ne niera que chaque triangle a une somme précise et unique de ses angles internes et donc que deux possibilités sur trois sont fausses, quoique non contradictoires. Nous pensons que ce problème doit être étudié en adaptant les connaissances à la situation spécifique qu'on doit affronter, sans être guidé par une thèse philosophique quelconque. Le rôle de l'abstraction atteint sans doute ce but: nous pouvons donc «construire une géométrie générale parfaitement logique qui renferme la géométrie habituelle comme un cas particulier»<sup>4</sup>.

### *Conclusions*

Une nouvelle évaluation du rôle de l'abstraction apparaît donc comme un élément indispensable au progrès de toute la science en général et de la logique en particulier. En considérant la science en général, l'abstraction a une double fonction. En premier lieu, elle permet de montrer quelles sont les différentes possibilités pour étudier un problème sans être obligé de se limiter au résultat forcément inachevé de l'enquête empirique. En second lieu, elle fournit un grand éventail pour lire les résultats des recherches.

<sup>3</sup> Plücker dit, dans ses *Analytisch-geometrische Entwicklungen*, II<sup>e</sup> partie, 1831, qu'on peut représenter différemment les équations selon l'espace choisi. Il présente l'espace quadrimensionnel de droites.

<sup>4</sup> «Discours de M. le Professeur Felix Klein de l'Université de Göttingue, prononcé à Vienne le 27 septembre 1894», p. XXXI.

Dans le cas de la logique en particulier, l'abstraction nous permet de développer des concepts en considérant toutes leurs potentialités, autrement dit de mieux les comprendre. On peut donc voir, dans la logique, d'une part une abstraction tirée de procédés actuels, et d'autre part une construction formelle à partir de laquelle on dérive ensuite une interprétation. Ces deux conceptions de la logique, toujours actuelles, favorisent l'élargissement de son champ d'investigation.

Notre réflexion a essayé de montrer que Riemann a bien exalté cette modalité de connaissance. Il est juste de dire alors — avec Mandelbrot (1982) — que les vrais «monstres» mathématiques ne sont nés qu'au XIX<sup>e</sup> siècle, au cours de deux révolutions contre Euclide; l'œuvre de Riemann est l'exposition par excellence de ces bouleversements. Et le fait que «ces mathématiciens [aient été] des espèces de visionnaires, jouissant d'une vue très en avance sur leur temps (certains textes... de Riemann n'ont presque pas été compris pendant cinquante ans)» (Dieudonné, 1982, p. 30), nous aide à souligner trois points de son œuvre qui sont encore très actuels.

Le problème affronté par Riemann «c'est tout un monde inconnu intéressant à la fois le philosophe et le géomètre, que s'ouvre avec une extraordinaire puissance d'abstraction. Un domaine particulier s'y trouve qui se rapproche des réalités accessibles à notre existence, dans ce sens qu'on y peut déplacer une figure sans altérer ses dimensions et fonder des démonstrations sur la méthode de superposition»<sup>5</sup>.

Nous avons donc considéré la géométrie de Riemann comme un moyen pour mettre en valeur la primauté de la catégorie de l'abstrait dans la recherche mathématique. Dès ses débuts, la mathématique se présente comme une discipline formelle et abstraite qui permet de découvrir l'existence de plusieurs réalités possibles. Ainsi la connaissance, qui est strictement liée aux réalités, peut avoir plusieurs modalités de construction et de développement. Notre espoir est que cette conception du savoir ne se borne pas aux disciplines qui, par tradition, sont les plus aptes à la recevoir, c'est-à-dire la mathématique et la physique, mais qu'elle soit étendue aussi à d'autres disciplines. Leur mathématisation nous paraît le moyen le plus sûr pour atteindre ce but.

#### BIBLIOGRAPHIE

AGAZZI E., PALLADINO D., *Le geometrie non euclidee*, Milano, Mondadori, 1978.

BACHELARD G., *Le matérialisme rationnel*, Paris, PUF, 1956.

BOCHENSKI M. Joseph, *Formale Logik*, Freiburg-München, Verlag Karl Alber, 1956.

<sup>5</sup> Hermite C., «Préface» aux *Œuvres mathématiques de Riemann*, p. XI.



- BOYER B. Carl, *A History of Mathematics*, Wiley and Sons, 1968 (Tr. it. *Storia della matematica*, Milano, Mondadori, 1976).
- DIEUDONNÉ J., «Mathématiques vides et mathématiques significatives» (*Penser les mathématiques*, Paris, Seuil, 1982, 15-37).
- FRAISSE R., «Les axiomatiques ne sont-elles qu'un jeu?» (*Penser les mathématiques*, Paris, Seuil, 1982, 39-57).
- HERMITE C., «Préface» aux *Œuvres mathématiques de Riemann*, p. X (*Œuvres mathématiques de Riemann*, traduit par L. LAUGEL, Nouveau Tirage, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1968, pp. I-XXI).
- HUGHES G.E., CRESSWELL M. J., *An Introduction to Modal Logic*, Wellington, 1968 (Tr. it. *Introduzione alla logica modale*, Milano, Il Saggiatore, 1973).
- KLEIN F., «Discours de M. le Professeur Felix Klein de l'Université de Gottingue, prononcé à Vienne le 27 septembre 1894» (*Œuvres mathématiques de Riemann*, traduit par L. LAUGEL, Nouveau Tirage, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1968, pp. XXIV-XXXIII).
- KNEALE W. C., KNEALE M., *The Development of Logic*, Oxford, Clarendon Press, 1972.
- MAGNANI L., *Le geometrie non euclidee*, Bologna, Zanichelli, 1978.
- MANDELBROT B., «Des monstres de Cantor et de Peano à la géométrie fractale de la nature» (*Penser les mathématiques*, Paris, Seuil, 1982, 226-251).
- MARTINETTI P., *Kant*, Milano, Fratelli Bocca, 1946.
- MENDELSON E., *Introduction to Mathematical Logic*, New Jersey, 1964 (Tr. it. *Introduzione alla Logica Matematica*, Torino, Boringhieri, 1972).
- PIAGET J., *Logica e Psicologia*, Firenze, La Nuova Italia, 1968.
- PIAGET J., «Essai sur la nécessité», Genève, *Archives de Psychologie*, XLV, 175, 1977, pp. 235-251.
- PIAGET J., GARCIA R., *Psychogenèse et histoire des sciences*, Paris, Flammarion, 1983.
- RIEMANN B., «Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie» (*Œuvres mathématiques de Riemann*, traduit par L. LAUGEL, Nouveau Tirage, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1968, pp. 279-297).
- RIEMANN G., «Erkenntnistheoretisches (II) — Versuch einer Lehre von den Grundbegriffen der Mathematik und Physik als Grundlage für die Naturerklärung (in *Gesammelte Mathematische Werke, Nachträge*, Vaduz, Sandig. Reproduction de l'édition Dover, New York, 1902, pp. 521-525).
- SAWYER W. W., *Prelude to Mathematics*, Middlesex, Penguin Books LTD, Harmondsworth, 1966.