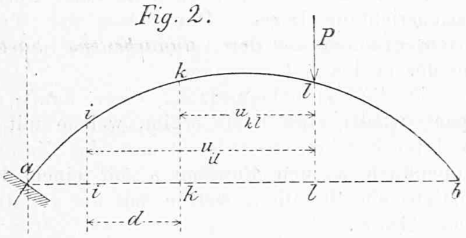
Beitrag zur Bogentheorie.

Von Dr. *J. B. Gœbel*, Ingenieur der hessischen Ludwigs-Eisenbahn in Mainz.

(Fortsetzung.)

4. Als x-Axe wählen wir die durch die beiden Auflager-Schwerpunkte gehende Horizontale, als y-Axe die durch den festen Endpunkt a der Bogenaxe gehende Verticale (Fig. 2).

Fig. 2.



Sind i und k irgend zwei auf der Bogenaxe liegende Punkte, so soll als „Bogenstück (i, k)“ der entsprechende (zwischen den Punkten i und k gelegene) Bogentheil angesehen werden. Unter dem Symbol

$$(i, k)\, l$$

soll, wenn nicht ausdrücklich ein Anderes bestimmt wird, die Einwirkung irgend einer durch den Bogenaxenpunkt l gehenden *Vertical*kraft auf das Bogenstück (i, k) verstanden sein.[5]) Selbstredend kann man sich mit jenem Symbol auch Das gegeben denken, was aus der betreffenden Einwirkung resultirt. Wir werden demgemäss auch von einer „Rotation $(i, k)\, l$“, einer „Amplitude $(i, k)\, l$“ und einem „Momentancentrum $(i, k)\, l$“ reden können. Soll durch das Symbol auch die Intensität P der zur Wirkung gelangenden Kraft gegeben sein, so schreiben wir dasselbe

$$P\,(i, k)\, l.$$

In gleicher Weise drücken wir durch das Symbol

$$(i, k)^*$$

die Einwirkung irgend eines *Kräftepaares* auf das Bogenstück (i, k) aus. Soll auch das Moment P des Kräftepaares ersichtlich sein, so schreiben wir

$$\mathfrak{P}\,(i, k).$$

Wird der, zufolge Voraussetzung, constante Werth

$$\frac{1}{\varepsilon\, J \cos\varphi} = \mu$$

gesetzt, so geht Gleichung (1) über in

$$d\,\Delta\,\delta = \mu\,\mathfrak{P}\,d\,x. \tag{2}$$

Die Amplituden sind also in Folge jener Voraussetzung nur noch abhängig von der horizontalen Ausdehnung des Bogenstückes.

Ist $\mathfrak{P}$ constant, erfolgt also bezüglich eines Bogenstückes (i, k) die Rotation $\mathfrak{P}\,(i, k)$, so setzt sich dieselbe zusammen aus Elementarrotationen, welche dem Element $d\,x$ einfach proportional sind. Die Amplitude $\mathfrak{P}\,(i, k)$ ist demnach

$$\Delta\,\delta_{\,\mathfrak{P}(i,k)} = \mu\,\mathfrak{P}\,d, \tag{3}$$

wenn hierin d den horizontal gemessenen Abstand der Punkte i und k bezeichnet.

Unter „Verticalen i, k . .“ seien die durch die resp. Bogenpunkte gehenden Verticalen verstanden.

Das Momentancentrum $(i, k)^*$ fällt offenbar mit dem Schwerpunkt der als „Massenpunkte $d\,x$“ gedachten Punkte des Bogenstückes (i, k) zusammen, d. h.:

Das Momentancentrum $(i, k)^*$ liegt auf einer Verticalen, welche den Abstand der Verticalen i und k halbirt. Sind x_i und x_k die Abscissen der Bogenpunkte i und k, so ist offenbar die Abscisse des Momentancentrums $(i, k)^*$ gleichzusetzen

$$x_{(i,k)^*} = \frac{1}{2}\,(x_i + x_k). \tag{4}$$

Wirkt im Punkte l auf das Bogenstück (i, k) eine Verticalkraft von der Intensität P, entsteht also die Rotation $P\,(i, k)\, l$, und werden mit $u_{i\,l}$ und $u_{k\,l}$ die senkrechten Abstände der Punkte i, resp. k von der Verticalen l bezeichnet, so findet man leicht, wenn man in Gleichung (2) $\mathfrak{P} = P\,u$, $d\,x = d\,u$ setzt und über das Bogenstück (i, k) hinwegintegrirt, dass die Amplitude $P\,(i, k)\, l$

$$\Delta\, d_{\,P(i,k)l} = \frac{\mu\,P}{2}\left(u_{i\,l}^{2} - u_{k\,l}^{2}\right). \tag{5}$$

Das Moment $\mathfrak{M}_{\,P(i,k)l}$ der resultirenden Rotation $P\,(i, k)\, l$ in Bezug auf die Verticale l ergibt sich als

$$\mathfrak{M}_{\,P(i,k)l} = \frac{\mu\,P}{3}\left(u_{i\,l}^{3} - u_{k\,l}^{3}\right) \tag{6}$$

oder auch, wie man durch einige Umformung erhält

$$\mathfrak{M}_{\,P(i,k)l} = \frac{\mu\,P}{4}(u_{i\,l} - u_{kl})\left[(u_{i\,l} + u_{kl})^2 + \frac{1}{3}(u_{i\,l} - u_{kl})^2\right] \tag{6a}$$

5. Fällt der Punkt l der Bogenaxe mit einem der beiden andern Punkte, etwa mit k, zusammen, d. h. greift die Verticalkraft im Endpunkt k des Bogenstückes (i, k) an, so vereinfachen sich die Gleichungen (5) und (6). Es wird $u_{kl} = 0$, $u_{i\,l} = d$, daher

$$\Delta\,\delta_{\,P(i,k)k} = \frac{\mu\,P}{2}\,d^2, \tag{7}$$

$$\mathfrak{M}_{\,P(i,k)k} = \frac{\mu\,P}{3}\,d^3. \tag{8}$$

Der senkrechte Abstand $u_{(i,k)k}$ des Momentancentrums $(i, k)\, k$ von der Verticalen k ist demnach

$$u_{(i,k)k} = \frac{2}{3}\,d, \tag{9}$$

d. h. das Momentancentrum, welches einer im Endpunkt eines Bogenstückes auf dieses einwirkenden Verticalkraft entspricht, liegt auf der der Verticalkraft entfernteren Drittheil-Verticalen des Bogenstückes.

6. Nach dem Vorhergehenden können bereits die Abscissen solcher Momentancentra, welche — bezüglich beliebiger Bogentheile — Verticalkräften und Kräftepaaren entsprechen, in sehr einfacher Weise bestimmt werden, ohne dass über den Verlauf der Curve der Schwerpunktsaxe Näheres bekannt zu sein brauchte: es bedarf nur der horizontalen Ausdehnungen der jeweiligen Bogenstücke.

Soll im Allgemeinen das einer Kraft K entsprechende Momentancentrum vollständig auffindbar sein, so müssen natürlich über die Form der Bogenaxe weitere Festsetzungen getroffen werden.

Wir nehmen die Axe des zu berechnenden Bogens als Polygon von so grosser Seitenzahl an, dass dies Polygon nahezu mit der Schwerpunktsaxe zur Deckung gebracht werden kann. Die genaue Schwerpunktsaxe grosser Bogenbrücken ist gewöhnlich ohnehin nicht eine stetige Curve, sondern meist, namentlich bei sprungweise veränderlichem Querschnitt, ein aus flachen Curvenstücken zusammengesetzter, polygonartiger Linienzug. So weicht z. B. bei der älteren Coblenzer Bogenbrücke die genaue Schwerpunktsaxe von der öfter bei Rechnungen benutzten

5) Die Einführung solcher Symbole bietet theoretisch keine weiteren Vortheile, trägt aber sehr zur Abkürzung der Redeweise bei.