Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Band: 5/6 (1885)
Heft: 11

Inhaltsverzeichnis

Die secundären Spannungen in Fachwerken.

Von Professor *W. Ritter.*

Die übliche statische Berechnung der Fachwerke fusst bekanntlich auf der Annahme, dass die in den einzelnen Stäben wirkenden Kräfte genau mit deren Schwerpunktsaxen zusammen fallen, dass also diese Stäbe ausschliesslich nur auf Zug oder auf Druck in Anspruch genommen werden. Diese Annahme ist jedoch nur richtig, wenn die Knotenpunkte als Gelenke construirt sind, die sich ohne Reibungswiderstand drehen können. Da aber die Stäbe bei der in Europa üblichen Constructionsweise an den Knotenpunkten starr miteinander vernietet werden, so folgt, dass die Stabkräfte etwas aus der Axe heraustreten und hierbei im Materiale Spannungen hervorrufen, die sich zu den schon aus der axialen Inanspruchnahme entstehenden hinzufügen. Man nennt diese Spannungen meistens secundäre zur Unterscheidung von den durch reinen Zug oder Druck sich bildenden primären Spannungen.

Die Frage der secundären Spannungen ist in den letzten Jahren von gelehrten und practischen Technikern vielfach studirt worden, und es zeigt diese Thatsache, welche Wichtigkeit diesem Thema zugemessen wird.

Meistens wog hierbei das Bestreben vor, allgemeine Regeln abzuleiten, mittelst deren die Grösse dieser Spannungen annähernd taxirt, beziehungsweise abgeschwächt werden könnte; seltener ist die Aufgabe verfolgt worden, die secundären Spannungen für ein bestimmtes Beispiel genau zu berechnen; die höchst langwierigen arithmetischen Operationen, die hierzu nöthig sind, schrecken auch in der That davon ab. Im Nachfolgenden soll nun ein Verfahren erläutert werden, das ebenfalls diesen letzteren Zweck verfolgt, dabei aber sich einer *graphischen* Operation bedient, durch welche die Zahlenrechnung bedeutend reducirt und die Lösung eines bestimmten Falles wesentlich kürzer wird.

1. *Winkeldeformationen.*

Da die Stäbe eines Fachwerkes in verschiedenem Sinne in Anspruch genommen werden, sich theils verlängern, theils verkürzen, so erleiden die Winkel, welche je zwei Stäbe miteinander einschliessen — gelenkförmige Knoten vorausgesetzt — kleine Aenderungen, und es handelt sich zunächst darum, diese Winkeldeformationen zu berechnen.

Verlängern sich die drei Seiten $s_1\, s_2\, s_3$ des Dreieckes $A_1\, A_2\, A_3$ (Figur 1) um bez. $ds_1\, ds_2\, ds_3$, so werden im Allgemeinen auch die Winkel $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3$ sich ändern; bezeichnet man die Aenderung des Winkels α_1 mit $d\,\alpha_1$, so findet man eine Beziehung zwischen dieser und den Längenänderungen durch Differenziren der bekannten Gleichung

$$s_1^2 = s_2^2 + s_3^2 - 2\, s_2\, s_3 \cos \alpha_1 \,.$$

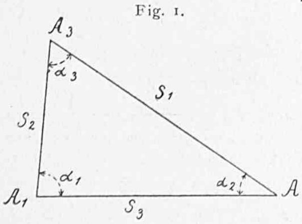
Man erhält

$$2\, s_1\, ds_1 = 2\, s_2\, ds_2 + 2\, s_3\, ds_3 - 2\, s_2 \cos \alpha_1\, ds_3$$
$$- 2\, s_3 \cos \alpha_1\, ds_2 + 2\, s_2\, s_3 \sin \alpha_1\, d\,\alpha_1$$

und hieraus

$$d\,\alpha_1 = \frac{s_1\, ds_1 - s_2\, ds_2 - s_3\, ds_3 + s_2 \cos \alpha_1\, ds_3 + s_3 \cos \alpha_1\, ds_2}{s_2\, s_3 \sin \alpha_1}\,.$$

Fig. 1.



Ersetzt man hierin $s_2 - s_3 \cos \alpha_1$ durch $s_1 \cos \alpha_3$ und $s_3 - s_2 \cos \alpha_1$ durch $s_1 \cos \alpha_2$ und berücksichtigt, dass der Nenner des Bruches dem doppelten Flächeninhalt F des Dreiecks gleich ist, so folgt

$$d\,\alpha_1 = \frac{s_1\, ds_1 - s_1 \cos \alpha_3\, ds_2 - s_1 \cos \alpha_2\, ds_3}{2\, F}\,.$$

Die Aenderung, welche ein Fachwerkstab in seiner Länge erleidet, lässt sich leicht berechnen, wenn die in dem Stabe pro Flächeneinheit wirkende Kraft, die sogenannte specifische Spannung σ, sowie die Länge des Stabes bekannt ist; es verhält sich nämlich jederzeit die Längenänderung ds zur ganzen Länge s, wie die Spannung σ zum Elasticitätsmodul E; oder es ist

$$ds = \frac{\sigma\, s}{E}\,. \qquad (1)$$

Drückt man in obiger Gleichung die ds in dieser Weise aus (wobei E constant angenommen werden darf), so bekommt man

$$d\,\alpha_1 = \frac{s_1\, \sigma_1\, s_1 - s_1 \cos \alpha_3\, \sigma_2\, s_2 - s_1 \cos \alpha_2\, \sigma_3\, s_3}{2\, E\, F}\,.$$

Ersetzt man noch das erste s_1 durch $s_2 \cos \alpha_3 + s_3 \cos \alpha_2$, so wird

$$d\,\alpha_1 = \frac{(s_2 \cos \alpha_3 + s_3 \cos \alpha_2)\, \sigma_1\, s_1 - s_1 \cos \alpha_3\, \sigma_2\, s_2 - s_1 \cos \alpha_2\, \sigma_3\, s_3}{2\, E\, F}$$
$$= \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)\, s_1\, s_2 \cos \alpha_3 + (\sigma_1 - \sigma_3)\, s_1\, s_3 \cos \alpha_2}{2\, E\, F}\,.$$

Theilt man diesen Ausdruck in zwei Brüche, ersetzt im ersten $2\, F$ durch $s_1\, s_2 \sin \alpha_3$ und im zweiten durch $s_1\, s_3 \sin \alpha_2$, so erhält man

$$E \,.\, d\,\alpha_1 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)\, s_1\, s_2 \cos \alpha_3}{s_1\, s_2 \sin \alpha_3} + \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)\, s_1\, s_3 \cos \alpha_2}{s_1\, s_3 \sin \alpha_2}$$

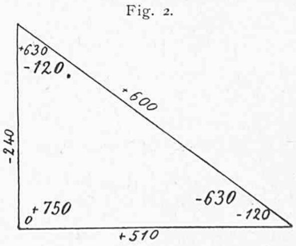
oder endlich

$$E \,.\, d\,\alpha_1 = (\sigma_1 - \sigma_2) \operatorname{cotg} \alpha_3 + (\sigma_1 - \sigma_3) \operatorname{cotg} \alpha_2\,. \qquad (2)$$

Mit Hülfe dieser übersichtlichen Gleichung lassen sich die drei Werthe $E \,.\, d\,\alpha$ leicht berechnen. Am besten schlägt man dabei folgenden Weg ein: Man berechnet zuerst, indem man die Stabkräfte durch die Stabquerschnitte dividirt, die Werthe σ und schreibt sie, am besten in Kilogrammen pro cm^2, auf die Mitten der Dreiecksseiten, wobei Zugspannungen mit dem $+$, Druckspannungen mit dem $-$ Zeichen zu versehen sind. Dann subtrahirt man, dem Umfang des Dreiecks links herum folgend, je zwei σ von einander, multiplicirt die Differenz mit der Cotangente des eingeschlossenen Winkels und schreibt das Product in letzteren ein. Endlich subtrahirt man, dem Umfange jetzt rechts herum folgend, je zwei dieser Zahlen und schreibt die Differenz je in die dritte Ecke. Dann sind diese letzteren Zahlen gleich den $E \,.\, d\,\alpha$, ebenfalls in kg pro cm^2 ausgedrückt.

Zum besseren Verständniss sei hier ein Beispiel beigefügt, bei welchem die drei Seiten sich wie $3:4:5$ verhalten (Fig. 2), so dass die drei $\operatorname{cotg} \alpha$ beziehungsweise gleich $^4/_3$, $^3/_4$ und 0 werden.

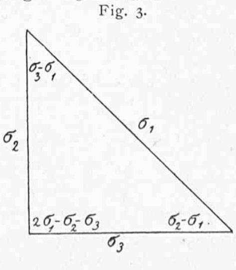
Fig. 2.



Sind die Cotangenten der Winkel unregelmässige Zahlen, so kann man sie der Bequemlichkeit wegen vorerst ebenfalls einschreiben, so dass in jede Ecke drei Zahlen zu stehen kommen.

Sind im Gegentheil die beiden spitzen Winkel gleich 45^0, so kann man nach dem in Figur 3 angegebenen Schema die Werthe $E \,.\, d\,\alpha$ direct, ohne Zwischenrechnungen, eintragen.

Fig. 3.



Dass die Summe der drei Winkeländerungen in jedem Dreieck gleich null sein muss, sieht man ohne Weiteres ein.

Die Werthe $d\,\alpha$ selbst braucht man nicht zu kennen; in der Folge treten sie stets mit E multiplicirt auf.