Calcul de la poussée de l'arc élastique à deux pivots.

Bien que le calcul de l'arc soit devenu très familier aux ingénieurs, nous croyons rendre quelque service, en exposant ici un nouveau procédé de calcul de la poussée de l'arc à deux pivots, qui se distingue de ceux actuellement en usage par son extrême simplicité.

Pour la déduction de nos formules, nous partirons de l'expression bien connue qui donne la déformation horizontale de la corde d'un arc, et qui est établie sous la supposition que les déformations provenant de l'effort tranchant peuvent être négligées.

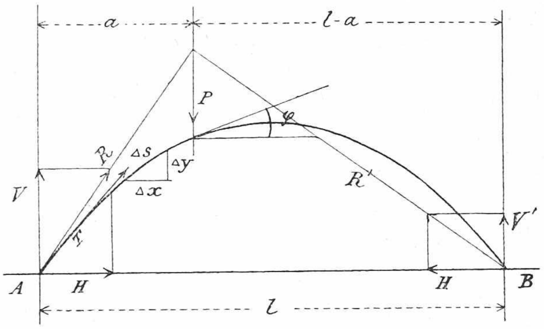
En désignant par h la déformation horizontale de la corde de l'arc, on a

1) $$h = -\sum_o^l \frac{M}{EJ}\, y\, \Delta s + \sum_o^l T \frac{\Delta x}{EF}$$

T étant l'effort tangentiel produit par une force verticale quelconque appliquée à l'arc.

La pratique enseigne que la section des nervures d'un arc varie beaucoup moins que celle d'une poutre continue, et que l'on peut, sans commettre une erreur pratiquement appréciable, la supposer constante, ainsi qu'on le fait toujours pour les poutres continues à hauteur constante.

Fig. 1.



Si nous admettons que la section de la nervure de l'arc, que nous désignerons par $\frac{1}{2}F$, soit concentrée autour de son centre de gravité, et si nous appelons d la demi-distance des centres de gravité des nervures, nous pourrons poser

$$J = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}F\right)(2\, d)^2 = F d^2$$

Introduisant cette valeur dans l'expression 1), et remarquant que E est constant, il vient

2) $$h\, E\, F = -\sum_o^l M \,.\, y \frac{\Delta s}{d^2} + \sum_o^l T \,.\, \Delta x$$

Soient P une force verticale quelconque, R et R' ses réactions, φ l'angle de la tangente de l'arc avec l'horizontale, et T la composante tangentielle de la force extérieure, nous aurons

$$T = V \sin\varphi + H \cos\varphi$$

ou

$$T = V \frac{\Delta y}{\Delta s} + H \frac{\Delta x}{\Delta s}$$

Remplaçant T par sa valeur dans le second terme du deuxième membre de l'équation 2) il vient

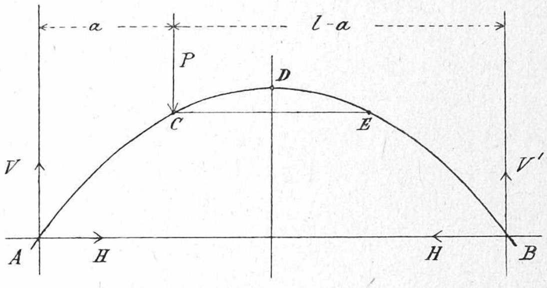
$$\sum_o^l T \Delta x = \sum_o^l V \frac{\Delta x \,.\, \Delta y}{\Delta s} + \sum_o^l H \frac{\Delta x^2}{\Delta s}$$

or

$$\sum_o^l V \frac{\Delta x \,.\, \Delta y}{\Delta s} = \sum_o^a V \frac{\Delta x \,.\, \Delta y}{\Delta s} + \sum_a^l V' \frac{\Delta x \,.\, \Delta y}{\Delta s}$$

Si nous admettons, comme c'est le cas en général, que l'arc soit symétrique, nous voyons immédiatement sur

Fig. 2.



la figure 1. ci-contre, que l'allongement de l'arc produit par V' sur le segment CD est égal au raccourcissement du segment symétrique DE, et comme $AC = BE$, nous aurons

$$\sum_a^l V' \frac{\Delta y \,.\, \Delta x}{\Delta s} = \sum_o^a V' \frac{\Delta y \,.\, \Delta x}{\Delta s}$$

d'où

$$\sum_o^l V \frac{\Delta y \,.\, \Delta x}{\Delta s} = \sum_o^a V \frac{\Delta y \,.\, \Delta x}{\Delta s} + \sum_o^a V' \frac{\Delta y \,.\, \Delta x}{\Delta s} =$$

$$= (V + V') \sum_o^a \frac{\Delta y \,.\, \Delta x}{\Delta s} = P \sum_o^a \frac{\Delta y \,.\, \Delta x}{\Delta s}$$

Pour une force verticale quelconque, nous voyons (sur la fig. 1) que nous pouvons poser, pour tout point compris entre A et P

$$M = Vx - Hy$$

et pour tout point entre P et B

$$M = V'(l - x) - Hy\,.$$

or

$$V = P \frac{l-a}{l} \quad \text{et} \quad V' = P \,.\, \frac{a}{l}$$

Substituant ces valeurs, ainsi que celle $\sum_o^l T \,.\, \Delta x$ dans la formule 2) il vient

$$hEF = -\left[\sum_o^a P \frac{l-a}{l} x \,.\, y \frac{\Delta s}{d^2} + \sum_a^l P \frac{a}{l}(l - x)\, y \,.\, \frac{\Delta s}{d^2}\right] +$$

$$+ \sum_o^l H y^2 \frac{\Delta s}{d^2} + P \sum_o^a \frac{\Delta y \,.\, \Delta x}{\Delta s} + \sum_o^l H \frac{\Delta x^2}{\Delta s}$$

Si maintenant nous supposons la corde de l'arc invariable, nous aurons $h = o$ et nous pourrons tirer de l'équation précédente la valeur de la poussée, puisque H est constant pour une seule et même charge.

$$o = P\left\{\frac{l-a}{l}\sum_o^a x \,.\, y \,.\, \frac{\Delta s}{d^2} + \frac{a}{l}\sum_a^l (l - x)\, y \,.\, \frac{\Delta s}{d^2} - \sum_o^a \frac{\Delta y \,.\, \Delta x}{\Delta s}\right\} +$$

$$+ H\left(\sum_o^l y^2 \frac{\Delta s}{d^2} + \sum_o^l \frac{\Delta x^2}{\Delta s}\right)$$

d'où l'on a

3) $$H = P \frac{\frac{l-a}{l}\sum_o^a x \,.\, y \frac{\Delta s}{d^2} + \frac{a}{l}\sum_a^l (l - x)\, y \,.\, \frac{\Delta s}{d^2} - \sum_o^a \frac{\Delta y \,.\, \Delta x}{\Delta s}}{\sum_o^l y^2 \frac{\Delta s}{d^2} + \sum_o^l \frac{\Delta x^2}{\Delta s}}$$

L'on se rend compte pratiquement que le terme $\sum_o^a \frac{\Delta y \,.\, \Delta x}{\Delta s}$ est très-petit vis-à-vis des deux autres membres du numérateur de H, on peut donc le négliger.

Pour compenser la petite augmentation que nous faisons subir au numérateur de H, nous supposerons que le rapport