Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Band: 13/14 (1889)
Heft: 19

Artikel: Die Tragfähigkeit strebenloser Fachwerkpfeiler
Autor: Ritter, W.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-15626

Die Tragfähigkeit strebenloser Fachwerkpfeiler.

Von Prof. W. Ritter.

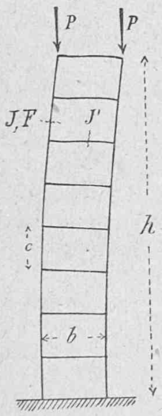
Von Seiten eines im Brückenbau viel beschäftigten Ingenieurs wurde mir vor einiger Zeit die Frage vorgelegt, wie die Tragfähigkeit eines eisernen Pfeilers bestimmt werden könne, bei welchem die schiefen Streben fehlen. Da die Frage allgemeineres Interesse bietet, möge deren Beantwortung hier veröffentlicht werden.

Meistens setzt man eiserne Fachwerkpfeiler aus vier Pfosten, Querstäben und Diagonalen zusammen. Die Tragfähigkeit für lothrechte Belastungen bestimmt man dann nach der Querschnittsfläche der Pfosten, wobei, wenn die Querstäbe weit von einander abstehen, auch die Knickgefahr der Pfosten zu berücksichtigen ist.

Lässt man jedoch die Diagonalen weg, so ist diese Berechnungsart nicht mehr zulässig, weil sich der Pfeiler jetzt wegen mangelnder Steifigkeit leichter seitlich ausbiegt. Die vier Pfosten könnten sogar zusammen nicht mehr als vier einzelne Pfosten tragen, wenn nicht durch die starre Vernietung der Querstäbe die Gefahr einer Ausbiegung vermindert würde.

Die Lösung der Aufgabe muss auf demselben Wege gesucht werden, auf dem man die Knickfestigkeit langer Druckstäbe berechnet: Man nimmt an, es sei eine kleine seitliche Ausbiegung eingetreten und stellt für diesen Fall unter Berücksichtigung der elastischen Formänderungen die Gleichgewichtsbedingungen der auftretenden Kräfte auf.

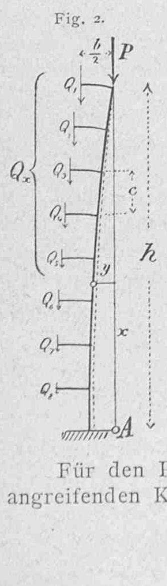
Fig. 1.



Nebenstehende Figur 1 zeigt, in welcher Weise sich bei dieser seitlichen Ausbiegung die einzelnen Stäbe krümmen. Die Querstäbe verbiegen sich sämmtlich S-förmig; es geht daraus hervor, dass sie unter dem Einflusse von Kräften stehen, die je in der Mitte des Stabes angreifen; und zwar müssen diese Kräfte lothrecht laufen, weil wagrechte Kräfte (symmetrische Construction vorausgesetzt) nicht vorkommen können.

Betrachten wir nun einen einzelnen Pfosten, zum Beispiel den rechtsseitigen, so ergeben sich als angreifende Kräfte die gegebene Last P und die noch unbekannten Kräfte Q_1, Q_2.... Setzt man P der Reihe nach mit den Kräften Q zusammen, so bekommt man die angreifenden Kräfte für die einzelnen Glieder des Pfostens; diese Kräfte nehmen nach unten langsam zu und verschieben sich etwas nach links. In der Folge dürfen wir uns die Annahme gestatten, dass die Querstäbe in unendlich kleinen Abständen auf einander folgen; dann liegen diese Kräfte auf einer stetigen (in der Figur 2 punktirten) Curve.

Fig. 2.



Wir wählen jetzt A als Anfangspunkt eines Coordinatensystems und nennen die Coordinaten eines beliebigen Punktes des Pfostens x und y. Ferner denken wir uns die Kräfte Q je über die anstossende Strecke des Pfostens vertheilt und nennen die auf die Längeneinheit treffende Kraft q. (Im Allgemeinen ist hiebei q von oben nach unten veränderlich.)

Für den Punkt x, y ergibt sich dann die Grösse der angreifenden Kraft

$$P_x = P + \int_x^h q \, . \, dx,$$

oder wenn man zur Abkürzung

$$\int_x^h q \, . \, Vx = Q_x \qquad (1)$$

setzt, $\quad P_x = P + Q_x$.

Nennt man die Querschnittsfläche des Pfostens F und den Elasticitätsmodul des Materials E, so verkürzt sich ein Element des Pfostens von der Länge dx um die Strecke

$$de = \frac{P_x \, . \, dx}{F \, . \, E}.$$

Daraus ergibt sich die *Senkung*, welche der Punkt xy erfährt,

$$e = \int_0^x \frac{P_x \, . \, dx}{F \, . \, E} = \int_0^x \frac{(P + Q_x) \, dx}{F \, . \, E}.$$

Für den linksseitigen Pfosten erhält man auf gleiche Weise $P_x = P - Q_x$, weil für diesen die Kräfte q in entgegengesetzter Richtung wirken. Der entsprechende Punkt des linken Pfostens senkt sich also etwas weniger als derjenige des rechten. Berechnet man nun e für den linken Pfosten und zieht die beiden Senkungen von einander ab, so bekommt man *den Höhenunterschied zweier entsprechender Punkte*

$$\varDelta e = 2 \int_0^x \frac{Q_x \, dx}{FE}. \qquad (2)$$

Berechnet man zweitens das Biegungsmoment der angreifenden Kräfte für den Punkt xy, so bekommt man

$$M = P \, . \, y - Q_x \, . \, {}^1\!/_2 b. \qquad (3)$$

Der Hebelarm der Kräfte Q darf hierbei constant gleich ${}^1\!/_2 b$ gesetzt werden, da die Ausbiegung des Pfostens gegenüber der Breite b verschwindend klein angesehen wird.

Nennt man das Trägheitsmoment des Pfostenquerschnittes I, so lautet die Gleichung der elastischen Linie des Pfostens

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = - M. \qquad (4)$$

Ferner ergibt sich *die Richtungsänderung des Pfostens* im Punkte xy

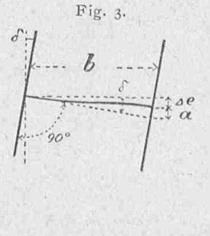
$$\delta = - \frac{dy}{dx}. \qquad (5)$$

Betrachten wir jetzt drittens noch einen Querstab und suchen wir die Strecke a, um welche die Tangenten in den beiden Endpunkten verschoben werden, wenn in der Mitte die Querkraft qc wirkt.

Im Abstande z vom linken Endpunkte hat der Stab das Moment $M = qc \, ({}^1\!/_2 b - z)$ auszuhalten. Ein Element des Stabes von der Länge dz verdreht sich somit, wenn I' das Trägheitsmoment des Querschnittes bedeutet, um den Winkel $d\delta = \frac{M \, . \, dz}{E \, . \, I'}$. Multiplicirt man diesen Werth mit $b - z$, so erhält man die Strecke, um welche sich der rechte Endpunkt infolge dessen hebt. Durch Summirung dieser Strecken findet man a. *Die Verschiebung der beiden Endtangenten* beträgt also

$$a = \int_0^b (b - z) \, d\delta = \frac{q \, b^3 c}{12 \, EI'}. \qquad (6)$$

Fig. 3.



Der Höhenunterschied $\varDelta e$ zweier entsprechender Pfostenpunkte, die Richtungsänderung δ des Pfostens und die Verschiebung a der Endtangenten eines Querstabes müssen nun miteinander übereinstimmen; und zwar ergibt sich an der Hand nebenstehender Figur 3 für jeden Querstab die Beziehung

$$\varDelta e + a = b \, \delta. \qquad (7)$$

Die Gleichungen (1) bis (7) enthalten im Principe die Lösung der Aufgabe. Die Durchrechnung eines speciellen Beispieles dürfte aber auf wesentliche Schwierigkeiten stossen, wenn nicht vereinfachende Annahmen gemacht werden.

In der Praxis wird man meistens *die Querschnitte der Pfosten und der Querstäbe constant* machen und *letztere in gleichen Abständen* von einander anbringen. Unter diesen Bedingungen lässt sich die Lösung ohne Schwierigkeit weiter führen.

Wie wir weiter unten zeigen werden, wird in diesem Falle

$$q = k \cdot \sin \frac{\pi x}{2h};$$

worin k eine Constante bezeichnet. Führen wir diesen Ausdruck in die Gleichung (1) ein, so folgt

$$Q_x = \int_x^h q \cdot dx = \frac{2kh}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2h}.$$

Ferner wird nach Gleichung (2)

$$\Delta e = 2 \int_o^x \frac{Q_x \, dx}{FE} = \frac{8kh^2}{\pi^2 FE} \sin \frac{\pi x}{2h}.$$

Setzt man sodann den Ausdruck von Q_x in die Gleichung (3) ein, so schreibt sich die Gleichung (4)

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M = -Py + \frac{khb}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2h}.$$

Die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung ist $y = A \cos \alpha x + B \sin \beta x$; da aber $\frac{dy}{dx}$ für $x = o$ verschwinden muss, ist $B = o$ und wir haben einfach

$$y = A \cos \alpha x.$$

Differenzirt man diesen Ausdruck zweimal nach x und setzt oben ein, so bekommt man

$$-EIA\alpha^2 \cos \alpha x = -PA \cos \alpha x + \frac{khb}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2h}.$$

Damit diese Gleichung erfüllt werde, muss

$$\alpha = \frac{\pi}{2h} \quad \text{und}$$

$$A = \frac{4kh^3 b}{4\pi h^2 P - \pi^3 IE}$$

sein.

Nun wird nach Gleichung (5)

$$\delta = -\frac{dy}{dx} = +A\alpha \sin \alpha x = \frac{2kh^2 b}{4h^2 P - \pi^2 IE} \sin \frac{\pi x}{2h};$$

ferner nach Gleichung (6)

$$a = \frac{q b^3 c}{12 EI'} = \frac{k b^3 c}{12 EI'} \sin \frac{\pi x}{2h}.$$

Führt man endlich die für Δe, a und δ gewonnenen Ausdrücke in die Gleichung (7) ein, so ergibt sich

$$\frac{8kh^2}{\pi^2 FE} \sin \frac{\pi x}{2h} + \frac{kb^3 c}{12 EI'} \sin \frac{\pi x}{2h} = \frac{2kh^2 b^2}{4h^2 P - \pi^2 IE} \sin \frac{\pi x}{2h}.$$

Dass sich das variable Glied aus dieser Gleichung durch Division entfernen lässt, beweist, dass unsre Annahme für den Werth q richtig war. Dass ferner die Constante k wegfällt, zeigt, (dass wie bei der Ableitung der gewöhnlichen, Euler'schen Knickformel) die Grösse der Ausbiegung von keinem Belang ist.

Streicht man die beiden gemeinschaftlichen Faktoren und löst nach P auf, so erhält man *zur Berechnung der Tragfähigkeit des Pfeilers* die Formel

$$P = \frac{\pi^2 IE}{4h^2} + \frac{E}{\dfrac{16h^2}{\pi^2 b^2 F} + \dfrac{bc}{6I'}}. \qquad (8)$$

Die Richtigkeit dieser Formel lässt sich dadurch einigermassen prüfen, dass man Grenzfälle einführt:

Setzt man zum Beispiel $I' = 0$, das heisst, lässt man die versteifende Wirkung der Querstäbe fallen, so wird $P = \frac{\pi^2 IE}{4h^2}$; das ist der bekannte Ausdruck zur Berechnung der Tragfähigkeit eines isolirt stehenden Pfostens.

Zu dem nämlichen Ausdrucke gelangt man, wenn man $b = 0$ setzt, das heisst die beiden Pfosten zusammenschiebt.

Setzt man ferner I und F gleich Null, so ist auch, wie es sein muss, die Tragkraft P Null.

Lässt man endlich I' unendlich gross werden und streicht hierbei das erste Glied, das jetzt gegenüber dem zweiten verschwindend klein ist, so folgt $P = \frac{\pi^2 b^2 FE}{16h^2}$; das ist der Ausdruck, der sich ergibt, wenn man die beiden Pfosten als fest verbunden ansieht und das Trägheitsmoment ihres Querschnittes ($\frac{1}{2} b^2 F$) in die einfache Knickformel einsetzt. —

Es sei nochmals betont, dass obige Formel starre Verbindung (Vernietung) der Pfosten und Stäbe voraussetzt.

Bei der practischen Anwendung der abgeleiteten Formel muss man selbstverständlich stets noch einen Sicherheitsfactor (5—10) einführen.

Wir haben im Bisherigen einen Pfeiler vorausgesetzt, der unten eingespannt und oben frei beweglich ist. Ist der zu berechnende Pfeiler oben und unten frei drehbar, so zerlegt man ihn in zwei gleiche Theile und berechnet die Tragfähigkeit der einen Hälfte. Ist der Pfeiler an beiden Enden eingespannt, so denkt man ihn in vier Theile zerlegt und bestimmt die Tragkraft eines Viertels.

Beachtenswerth ist, dass die Tragfähigkeit des Pfeilers mit der Breite b nicht fortwährend wächst, sondern für ein gewisses b ein Maximum wird. Um diesen *günstigsten Werth von b* zu finden, differenziren wir den Nenner des zweiten Gliedes nach b und finden

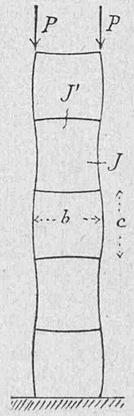
$$-\frac{32h^2}{\pi^2 b^3 F} + \frac{c}{6I'};$$

der gesuchte Werth ist daher

$$b = \sqrt[3]{\frac{192 h^2 I'}{\pi^2 c F}}. \qquad (9)$$

Aus der Formel für P geht ferner hervor, dass die Tragfähigkeit des Pfeilers unverändert bleibt, wenn man die Entfernung c der Querstäbe vergrössert, ihnen aber entsprechend grösseres Trägheitsmoment (I') gibt. Dies hat jedoch eine Grenze; denn wenn die Länge c der einzelnen Glieder des Pfostens zu gross wird, so verlieren diese ihre Steifigkeit und es tritt dann die nebenstehend dargestellte Formänderung ein.

Fig. 4.



Auch in diesem Falle lässt sich eine Beziehung zwischen den vorkommenden Kräften und Dimensionen aufstellen. Es folgt daraus, dass die Gefahr einer derartigen Verbiegung wegfällt, sobald

$$I' \geq b \sqrt{\frac{PI}{E}} \cdot \operatorname{tang.} \left(\frac{c}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} - \frac{\pi}{2} \right)$$

ist. Da jedoch dieser Ausdruck unbequem zu berechnen ist, so wird man sich in der Anwendung meistens darauf beschränken, dafür zu sorgen, dass das kleinste Trägheitsmoment des Pfostenquerschnittes

$$I \geq \frac{Pc^2}{\pi^2 E}$$

wird. (Es ist dieses die bekannte Euler'sche Knickformel für den Fall, dass beide Endpunkte drehbar sind.) Wie man sieht, wird, wenn I dieser Bedingung entspricht, der für I' angegebene Ausdruck negativ, so dass die gewünschte Sicherheit selbst bei unendlich kleinem I' vorhanden ist.

Beispiel.

Es sei gegeben:

$h = 900$ *cm*

$b = 75$ *cm* *)

$c = 75$ *cm*

$F = 19$ *cm*^{2} (Winkeleisen von 10 . 10 . 1 *cm*)

$I = 180$ *cm*^{4}

$I' = 180$ *cm*^{4}

*) Die vortheilhafteste Breite ergäbe sich nach Gleichung (9) gleich 126 *cm*, also grösser als unsere Annahme.

Auf Grund dieser Zahlenwerthe findet man die Tragfähigkeit eines einzelnen Pfostens nach Gleichung (8) für $E = 2000\ t$

$$P = \frac{\pi^2\, 180 \,.\, 2000}{4 \,.\, 900^2} + \frac{2000}{\frac{16 \,.\, 900^2}{\pi^2 \,.\, 75^2 \,.\, 19} + \frac{75 \cdot 75}{6 \,.\, 180}} =$$

$$= 1{,}1 + 114{,}3 = 115{,}4\ t.$$

Besteht der Pfeiler aus 4 Pfosten in quadratischer Stellung, und verlangt man gegenüber der theoretischen Formel eine 10fache Sicherheit, so ergibt sich *die zulässige Vertical-Belastung des ganzen Pfeilers*

$$\frac{4 \,.\, 115{,}4}{10} = 46 \text{ Tonnen.}$$

Baut man den Pfeiler mit Diagonalstreben und gestattet für den Quadratcentimeter eine Belastung von 0,7 *t*, so ergibt sich die Tragkraft gleich 4 . 19 . 0,7 = 53 Tonnen, also nicht viel grösser. Bei niedrigen Pfeilern kann es leicht vorkommen, dass letztere Zahl kleiner ausfällt als die erstere; in diesem Falle ist die Gefahr des Zerdrückens grösser als die Gefahr des Knickens. Von den beiden Zahlen ist selbstverständlich stets die kleinere massgebend.

Wir haben in diesen Entwickelungen ausschliesslich *verticale* Belastung des Pfeilers vorausgesetzt; für *horizontal* gerichtete Belastungen werden die Verhältnisse wesentlich andere. Da man den Pfeiler in diesem Falle wohl stets mit Streben versieht und ihn wo immer möglich nach unten verbreitert, so wollen wir auf eine Untersuchung der Tragfähigkeit bei fehlenden Streben nicht eintreten. Diese Untersuchung zeigt übrigens, dass die Tragkraft für horizontale Belastungen ganz bedeutend geringer ist als für verticale. Der von uns als Beispiel behandelte Pfeiler könnte nur etwa eine Tonne mit Sicherheit tragen.

Die Beförderung schwerer Personenzüge auf der Gebirgsbahn.

Zur Beförderung schwerer Züge auf der Gebirgsbahn bedient man sich nicht nur der kräftigsten Locomotiven, sondern es ist auch allgemein üblich, deren *mehrere* zu verwenden. Eine Achtkupplerlocomotive der Gotthardbahn kann (nach Stocker) eine Maximalzugkraft von 8000 *kg* ausüben, eine Sechskupplerlocomotive eine solche von 6000 *kg*. Die *wirklich in Anspruch genommene Zugkraft* ist von der Belastung und der Geschwindigkeit des Zuges abhängig. Da ein Wagen mit dem nächstfolgenden durch die Kuppelung verbunden ist, so hat die letztere den totalen Zug auszuhalten, welcher dem Widerstand der sämmtlichen hinter ihr laufenden Wagen entspricht. Mit jedem Wagen, vom Ende des Zuges an gerechnet, wird die Last vermehrt; die grösste Inanspruchnahme erleidet die Kuppelung, welche den Wagen nächst der Locomotive mit dem Zughaken der letztern verbindet. Der Zug, den diese Kuppelung mit Sicherheit auszuhalten vermag, begrenzt die Leistungsfähigkeit bezw. die Ausnützung der Zugkraft der Locomotive, wenn dieselbe dem Zuge vorgespannt ist. Dem Militärzuge vom 28. März waren zwei Achtkupplerlocomotiven vorgespannt. Bei der eingehaltenen geringen Fahrgeschwindigkeit berechnet sich der ausgeübte Zug, bei welchem eine Kuppelung gebrochen ist, auf etwa die Hälfte der grössten Zugkraft beider vorgespannten Locomotiven. Der Durchmesser des gebrochenen Kuppelbügels betrug 31 Millimeter und hätte der letztere demnach erst bei einem ruhige Zuge von etwa 23 000 *kg* zerreissen sollen. Bezüglich der Stärke der Kuppelungen stellt die internationale Uebereinkunft, welche am 1. April 1887 zwischen Deutschland, Italien, Oesterreich-Ungarn, Frankreich und der Schweiz in Kraft getreten ist, folgende Vorschriften auf:

§ 17. Kleiner Durchmesser des Querschnittes der Kuppelungsbügel (Einhängbügel) am Berührungspunkt des Zughakens: Maximum 35 Millimeter, Minimum 30 Millimeter. Zulässiges Maass für bestehendes Material; Güterwagen: Minimum 25 Milimeter; Personenwagen: Minimum 22 Millimeter.

Gemäss der Vereinbarungen der genannten Staaten darf grundsätzlich das Rollmaterial der Eisenbahnen, wenn es den festgestellten Bestimmungen entspricht, aus Gründen seiner Bauart vom internationalen Verkehr nicht ausgeschlossen werden.

Mit Kreisschreiben vom 14. Januar 1887 hat der schweizerische Bundesrath verordnet, die Gültigkeit der Vereinbarungen über „technische Einheit" habe sich auch auf den *internen Verkehr* zu erstrecken.

Die Normalkuppelungen der Gotthardbahn haben eine Stärke von 33—36 Millimeter und es ist eine solche bis jetzt noch nicht gebrochen. Die schweizerische Normalkuppelung hat eine Stärke von 33 Millimeter. Wenn daher einmal die älteren schwächeren Formen aus dem Verkehre verschwunden sein werden, so wird die Sicherheit in dieser Hinsicht wesentlich vermehrt sein. Das Vorkommen eines Kuppelbruches wird indessen auch dadurch nach competentem technischen Urtheile nicht ausgeschlossen, schon weil äusserlich unbemerkbare Beschädigungen während des Betriebes selbst vorkommen können. Man wird desshalb geneigt sein, die Inanspruchnahme der Kuppelungen um sicher zu gehen stark zu reduciren. *Dadurch wird die grösste Leistungsfähigkeit der Bergbahn für Massentransporte um wenigstens 50 Prozent reducirt;* da es im Uebrigen keinem Anstande begegnet, Züge zu führen, wie sie zwei oder selbst drei Locomotiven zu befördern vermögen.

In gewöhnlichen Zeiten kommen im Personenverkehr solche Massentransporte nicht vor; im Güterverkehr dagegen regelmässig. Bei allen Güterzügen der Gotthardbahn sind über den Berg zwei Locomotiven in Verwendung; eine derselben wird vor den Zug gespannt, die andere hinter dem Zuge als Stoss- oder Schiebelocomotive verwendet. Dadurch werden die Kuppelungen der einen Zugshälfte vollständig und diejenigen des vorderen Zugstheiles zur Hälfte entlastet. Obschon die Verhältnisse auf der Gotthardbahn mit ihren langen Curven nicht günstig sind, so ist seit dem 8. Juli 1882, an welchem Tage dieser Dienst eingeführt wurde, bis heute irgend ein Uebelstand aus demselben nicht hervorgegangen. Am 31. October 1884 beschloss die Gotthardbahn auf Grund eines Berichtes ihres Maschinenmeisters (Jakob Stocker) und des Oberbetriebsinspectors betreffend Ausdehnung des Schiebedienstes, was folgt: Der Schiebedienst findet statt auf folgenden Strecken: Erstfeld-Göschenen, Bodio-Airolo, Giubiasco-Rivera-Bironico und zwar bei Güterzügen, gemischten und gewöhnlichen Personenzügen, sobald zu deren Beförderung die Kraft einer Locomotive nicht ausreicht; bei Schnellzügen, sobald die Zugsbelastung 200 Tonnen erreicht oder übersteigt. Dabei sind alle über den Schiebedienst geltenden Vorschriften pünktlich zu beachten. Diese Vorschriften wurden bis zum September 1886 durchgeführt, ohne dass aus denselben irgend ein Uebelstand hervorging, in jenem Zeitpunkte jedoch zurückgezogen, weil das Eisenbahndepartement solche Tractionsart für gefährlich hielt. Es ist nicht zu bestreiten, dass das Schieben von Zügen unter gewissen Umständen und wenn die nöthigen Vorsichtsmassregeln nicht beobachtet werden, gefährlich sein kann. Es wird heute aber Niemand mehr auf Bahnen, wie diejenige von Paris nach Versailles, den Schiebedienst einführen wollen. Auch auf der Gotthardbahn ist er immer auf die starken Steigungen beschränkt geblieben. Wir dürfen wol behaupten, dass die Mehrzahl der Ingenieure in dieser Beschränkung den Schiebedienst nicht für gefährlich ansieht, und was wichtiger ist, *die Erfahrung hat diese Ansicht durchaus bestätigt.* Wir finden zunächst in dem französischen Eisenbahnschriftsteller *Couche* einen überzeugten Befürworter dieser Tractionsart, deren Nützlichkeit und deren schützende Wirkung er als *evident* bezeichnet. Ueber die doppelte und dreifache Locomotivbespannung unter Anwendung von Stosslocomotiven sind uns von Seite der *italienischen Mittelmeerbahn* folgende Aufschlüsse zugekommen. Wenn dort für *Personenzüge* auf Steigungen von über 18 ‰ 2 Locomotiven verwendet werden müssen, so muss die eine derselben immer an den Schluss des Zuges gestellt werden. Dieses kommt vor auf den Eisenbahnenlinien: Bussoleno-Salbertrand (Mont-Cenis), Bardonnechia-Modane (Mont-Cenis), Pontedecimo-Busalla