Einige Aufgaben aus dem Gebiete der Trägheitsellipse.

Von Professor *W. Ritter.*

Der Zweck nachfolgender Zeilen besteht darin, graphische Lösungen für einige specielle Aufgaben aus dem Gebiete der Trägheitsellipse anzugeben, die zur Zeit noch wenig oder gar nicht bekannt sind.

Wir stützen uns in unsern Entwickelungen auf folgenden Fundamentalsatz aus der Lehre von der Centralellipse:

Das Centrifugalmoment eines Systems von belasteten Punkten (bezw. einer geschlossenen Figur) in Bezug auf zwei beliebige Axen ist gleich der Summe sämmtlicher Gewichte (bezw. gleich dem Flächeninhalte der Figur), multiplicirt mit dem Abstande des Schwerpunktes von der einen Axe und mit dem Abstande des Antipoles dieser Axe von der zweiten)*

Aus diesem Hauptsatze ergiebt sich unmittelbar folgender Nebensatz:

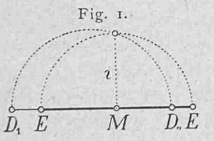
Ist das Centrifugalmoment eines Punktsystems (einer geschlossenen Figur) in Bezug auf zwei Axen gleich Null, so enthält jede dieser Axen den Antipol der andern.

Dieser ebenso einfache als fruchtbare Satz liegt allen nachfolgend beschriebenen Constructionsverfahren zu Grunde. Indessen lassen sich diese Verfahren auch rechnerisch ableiten, und wer nicht gewohnt ist, mit Antipolen und Antipolaren umzugehen, dem wird es nicht schwer fallen, die Richtigkeit der angegebenen Lösungen mit Hülfe algebraischer Rechnungen nachzuweisen.

1. *Es sei die Centralellipse für zwei belastete Punkte zu zeichnen.*

Die Ellipse für zwei belastete Punkte kann nur in der Richtung der Verbindungslinie eine von Null verschiedene Ausdehnung haben; sie schrumpft also zu einer einfachen *Linie* von bestimmter Länge zusammen.

Fig. 1.



Es seien D_1 und D_2 die gegebenen Punkte und M deren Schwerpunkt. Zeichnet man über $D_1\,D_2$ einen Halbkreis und errichtet man in M ein Loth, so wird auf diesem der Halbmesser i der Ellipse abgeschnitten; klappt man diese Strecke nach links und rechts herunter, so bekommt man die Endpunkte $E\,E$ der gesuchten Centralellipse.

Legt man nämlich durch D_1 uud D_2 zwei beliebige Geraden, so wird das auf diese bezogene Centrifugalmoment offenbar gleich Null; jede der beiden Geraden enthält demnach den Antipol der andern, das heisst, die Punkte D_1 und D_2 liegen in Bezug auf die Ellipse antipolar; sie bilden ein Paar der involutorischen Reihe, in welcher die Punkte $E\,E$ das symmetrische Paar sind.

Rechnerisch lässt sich der Beweis wie folgt leisten: Bedeuten G_1 und G_2 die beiden Gewichte, so ist nach einfachen Regeln

$$M\,D_1 = \frac{G_2}{G_1 + G_2}\,.\,D_1\,D_2 \quad \text{und}$$

$$M\,D_2 = \frac{G_1}{G_1 + G_2}\,.\,D_1\,D_2.$$

Auf M bezogen ist aber das Trägheitsmoment des Ganzen

$$(G_1 + G_2)\,i^2 = G_1\,.\,\overline{M\,D_1}^2 + G_2\,.\,\overline{M\,D_2}^2.$$

Setzt man obige Werthe von G_1 und G_2 ein, so ergibt sich

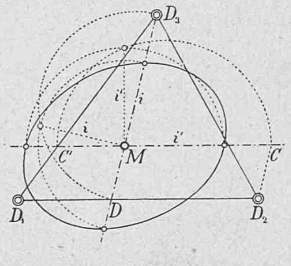
$$i^2 = M\,D_1\,.\,M\,D_2.$$

2. *Es soll die Centralellipse für drei belastete Punkte gezeichnet werden.*

D_1, D_2 und D_3 (Fig. 2) seien die gegebenen Punkte und M ihr Schwerpunkt.

Zunächst erhält man leicht zwei conjugirte Durchmesser der Ellipse, wenn man M mit D_3 verbindet und durch M eine Parallele $C\,C'$ zu $D_1\,D_2$ zieht; denn das Centrifugalmoment wird für diese zwei Durchmesser gleich Null. Da nämlich die Punkte D_1 und D_2 von $C\,C'$ gleich weit abstehen, ihre Abstände von $M D_3$ aber sich umgekehrt verhalten wie ihre Gewichte, so heben sich ihre Centrifugalmomente auf; dasjenige von D_3 ist ohnedies gleich Null.

Fig. 2.



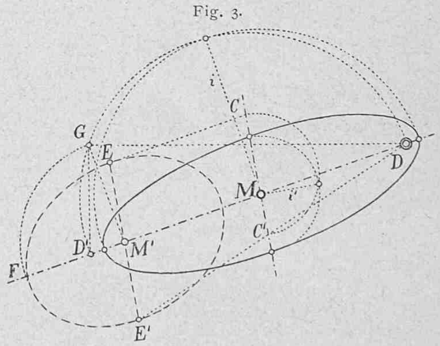
Das Centrifugalmoment verschwindet aber auch für die Linie $D_1\,D_2$ und eine beliebige durch D_3 gelegte Gerade; D_3 ist demzufolge der Antipol von $D_1\,D_2$. Auf dem Durchmesser $M D_3$ bilden somit die Punkte D und D_3 wiederum ein Paar der durch die Ellipse bestimmten involutorischen Reihe: ein Halbkreis über $D\,D_3$ schneidet demnach auf dem in M errichteten Lothe den Halbmesser i ab.

Um den andern Halbmesser i' zu finden, verbinde man D_1 mit D_3 und ziehe $D_2\,C$ parallel zu $M\,D_3$; dann verschwindet für diese beiden Geraden wieder das Centrifugalmoment des Ganzen; C' ist somit der Antipol von $D_2\,C$; folglich schneidet der Halbkreis mit dem Durchmesser $C\,C'$ über M die Strecke i' ab.

Hierdurch ist die Ellipse vollständig bestimmt. Leicht kann man aber dreimal so viele Elemente finden, indem man die Construction für die Durchmesser $M\,D_1$ und $M\,D_2$ und deren conjugirte wiederholt.

3. *Es sei die Centralellipse für eine beliebige Anzahl belasteter Punkte bekannt und es soll ein neuer Punkt angeschlossen werden.*

Fig. 3.



Die gestricht gezeichnete Ellipse M' sei gegeben und es soll der Punkt D damit verbunden werden; der gemeinschaftliche Schwerpunkt sei M.

Zunächst suche man in der gegebenen Ellipse den zu $M'\,D$ conjugirten Durchmesser $E\,E'$ und ziehe dazu eine Parallele $C\,C'$ durch M; dann bilden $C\,C'$ und $M\,D$ ein Paar conjugirter Durchmesser der neuen Ellipse; denn für die gestrichte Ellipse liegt der Antipol von $C\,C'$ auf $M\,M'$; das Centrifugalmoment des Ganzen wird daher für die beiden Durchmesser gleich Null.

Die Halbmesser i und i' der neuen Ellipse findet man hierauf folgendermassen:

Man dreht zuerst den Halbmesser $M'\,F$ der alten Ellipse um 90^0 nach $M'\,G$ und zeichnet den rechten Winkel $D\,G\,D'$; dann liegen D und D' in Bezug auf die alte Ellipse antipolar. Legt man durch diese Punkte Axen parallel zu $E\,E'$, so verschwindet daher für diese Axen das Centrifugalmoment des alten Systems und — da der neue Punkt D auf einer der Axen liegt — auch das gesammte Centrifugalmoment. D und D' liegen somit auch in Bezug auf die neue Ellipse antipolar und die Strecke i wird demgemäss durch einen Halbkreis über $D\,D'$ abgeschnitten.

Man kann hierbei die Bestimmung von D' umgehen;

*) Vergl. Schweiz. Bauzeitung, Bd. XI, S. 122.