

# Dynamische Theorie des Indicators

Autor(en): **Fliegner, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **17/18 (1891)**

Heft 5

PDF erstellt am: **14.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-86142>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

INHALT: Dynamische Theorie des Indicators. — Eidgenössisches Parlamentsgebäude in Bern. — Das Eisenbahnglück bei Mönchenstein. VII. — Correspondenz. — Concurrenzen: Stadterweiterungsplan für München. Rathhaus in Gelsenkirchen. — Miscellanea: Internationaler Electrotechniker-Congress in Frankfurt a. M. Aarebrücke bei Coblenz.

Bahnhofbeleuchtung der schweiz. Eisenbahnen. Electriche Centrale St. Moritz-Dorf (Engadin). Chemins de fer Egyptiens. — Vereinsnachrichten: Stellenvermittlung. — Hiezu eine Lichtdrucktafel: Eidg. Parlamentsgebäude in Bern, Entwurf von Prof. Hans Auer in Bern und Prof. Friedrich Bluntschli in Zürich. Seitenansichten.

### Dynamische Theorie des Indicators.

Von Prof. A. Fliegner.

Der Einfluss, welchen die im Mechanismus eines Indicators auftretenden Kräfte, Reibungswiderstände und Massenwirkungen auf die Genauigkeit der Indicator diagramme ausüben, ist schon gelegentlich Gegenstand von Untersuchungen gewesen. Dabei sind aber die Widerstände meiner Ansicht nach nicht richtig eingeführt und ist auch die Frage sonst nicht allseitig erledigt worden. Ich will daher hier einmal eine in dieser Richtung möglichst vollständige Theorie des Indicators zu entwickeln versuchen.

Eine solche geht allerdings nur unter einigen vereinfachenden Annahmen durchzuführen. Diese sind: Geradlinigkeit der Bewegung des Schreibstiftes und Proportionalität derselben mit der Bewegung des Indicator kolbens, dann ist es gleichgültig, welche dieser beiden Bewegungen untersucht wird; Gleichheit des Druckes im Indicator- und Maschinenzylinder; Proportionalität der Drehung der Papirtrommel mit der Bewegung des Maschinenkolbens; Constanz der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  der Kurbelwelle, so dass, wenn der Drehwinkel  $\varphi$  der Kurbel und die Zeit  $t$  von einem der todtten Punkte aus gezählt werden, folgt:

$$\varphi = \omega t \dots \dots \dots (1)$$

Zur Feststellung der Vorzeichen in den folgenden Untersuchungen soll gleich hier angegeben werden, dass die Auslenkung des Indicator kolbens aus seiner Ruhelage und die auf ihn wirkenden Kräfte im Sinne der Zusammendrückung der Feder positiv gezählt werden.

#### § 1. Entwicklung der Gleichung für die Bewegung eines Indicator kolbens.

Auf den Kolben des Indicators wirken folgende Kräfte:

1. Der im Indicator cylinder herrschende Ueberdruck  $p$  in  $kg/qm$ . Derselbe ändert sich ununterbrochen, aber bei dem hier anzunehmenden Beharrungszustande der Maschine periodisch, mit einer Länge der Periode von gewöhnlich  $\varphi = 2\pi$ . Er lässt sich daher durch eine Fourier'sche Reihe von der Form

$$p = \sum_{n=0}^{n=\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \dots \dots (2)$$

darstellen, in welcher für  $n$  alle ganzen Zahlen von 0 bis  $\infty$  einzusetzen sind.  $n = 0$  ergibt eine additionelle Constante,  $a_0$ .

Bezeichnet  $f$  den Kolbenquerschnitt in  $m^2$ , so ist der Ueberdruck auf den Kolben in  $kg$ :

$$P = fp \dots \dots \dots (3)$$

2. Die Federspannung. Dieselbe darf und muss hier proportional der Gestaltsänderung der Feder angenommen werden. Ist die Feder dann um die Länge von  $x^m$  zusammengedrückt, so lässt sich ihre Spannung

$$S = -\sigma x \dots \dots \dots (4)$$

setzen, wobei  $\sigma = \text{const.}$  die zur Erzeugung einer Längenänderung von  $1 m$  nöthige Kraft bedeutet.  $\sigma$  muss übrigens für Zusammendrückung und Ausdehnung der Feder gleich gross vorausgesetzt werden.

Die Gestaltsänderung der Feder, oder eigentlich die ihr proportionale Bewegung des Schreibstiftes dienen ihrerseits als Mass für den indicirten Ueberdruck  $p_i$ . Dieser würde also zu berechnen sein aus:

$$fp_i = \sigma x \dots \dots \dots (5)$$

3. Das Eigengewicht der bewegten Theile. Ist der Indicator cylinder in horizontaler Lage angebracht, so übt dieses Eigengewicht keinen unmittelbaren Einfluss auf die Bewegung aus. Steht dagegen der Cylinder vertical oder geneigt, so besitzt dasselbe eine Componente  $G$ , welche gewöhnlich im Sinne einer Ausdehnung der Feder wirkt. Bezeichnet  $\gamma$

den auf die Einheit des Kolbenquerschnittes kommenden Betrag dieser Componente, so wird

$$G = -f\gamma \dots \dots \dots (6)$$

4. Die Bewegungswiderstände. Hier entsteht die Frage, welche Annahme über die Widerstände der Rechnung zu Grunde gelegt werden soll. Das einfachste wäre, dieselben constant vorzusetzen, also mit  $f\varrho$  einzuführen, wenn  $\varrho$  den Widerstand für die Einheit des Kolbenquerschnittes bezeichnet. Die folgenden Untersuchungen werden aber zeigen, dass es jedenfalls richtiger ist, die Widerstände von der Geschwindigkeit der Bewegung abhängig zu setzen, und zwar scheint es genügend, dieselben der Geschwindigkeit proportional anzunehmen, d. h. gleich  $f\mu(dx/dt)$ .

Damit die Formeln jedoch in allgemeinerer Gestalt erscheinen, sollen beide Annahmen vereinigt werden. Dann ergibt sich der Widerstand zu

$$R = f \left( \mp \varrho - \mu \frac{dx}{dt} \right) \dots \dots \dots (7)$$

$\varrho$  hat immer das entgegengesetzte Vorzeichen von  $dx$ .

Um die Differentialgleichung der Bewegung aufstellen zu können, muss man noch die Masse aller bewegten Theile auf den Kolben reducirt denken. Dieselbe sei mit  $M$  bezeichnet. Dann folgt:

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = P + S + G + R \dots \dots \dots (8)$$

Setzt man hier die Kräfte  $P, S, G, R$  aus den früheren Gleichungen ein, so erhält man für  $x$  eine lösbare lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Da es mir aber weiterhin nicht auf die Kolbenstellung selbst, sondern auf den indicirten Druck  $p_i$  ankommt, so will ich gleich diesen nach Glchg. (5) angeben. Er findet sich zu:

$$p_i = \sum_{n=0}^{n=\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t) + e^{-\frac{\mu t}{2M}} (C_1 \cos \alpha\omega t + C_2 \sin \alpha\omega t) - \gamma \mp \varrho \dots (9)$$

In diesem Ausdrücke sind  $A_n, B_n$  und  $\alpha$  kürzere Bezeichnungen, und zwar bedeutet:

$$A_n \equiv \sigma \frac{(\sigma - Mn^2\omega^2) a_n - \mu n\omega b_n}{(\sigma - Mn^2\omega^2)^2 + (\mu n\omega)^2} \dots \dots (9^a)$$

$$B_n \equiv \sigma \frac{(\sigma - Mn^2\omega^2) b_n + \mu n\omega a_n}{(\sigma - Mn^2\omega^2)^2 + (\mu n\omega)^2} \dots \dots (9^b)$$

$$\alpha \equiv \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\sigma}{M} - \frac{\mu^2}{4M^2}} \dots \dots \dots (9^c)$$

$C_1$  und  $C_2$  sind die vom Anfangszustande abhängigen beiden Integrationsconstanten und  $e$  ist die Basis des natürlichen Logarithmensystems.

Die Richtigkeit der Lösung lässt sich am einfachsten durch Einsetzen von  $x = fp_i/\sigma$  aus Glchg. (9) in Glchg. (8) nachweisen.

In Glchg. (9) erscheint der indicirte Druck als aus mehreren von einander unabhängigen Theilen zusammengesetzt. Dieselben müssen weiterhin einzeln genauer besprochen werden.

Nur das vorletzte Glied,  $-\gamma$ , geht hier kurz zu erledigen. Es zeigt, dass das ganze Diagramm bei nicht horizontaler Lage des Indicators um  $\gamma$  im Sinne der achsialen Schwerkraftscomponente verschoben wird. Eine solche Verschiebung hat aber keinerlei weiteren Einfluss auf die Gestalt des Diagrammes, braucht also auch nicht besonders berücksichtigt zu werden.

#### § 2. Die Widerstände des Indicators.

Um zu erkennen, welchem Gesetze die Eigenwiderstände des Indicators folgen, muss man vom zweiten und letzten Gliede der Gleichung (9) ausgehen, also von dem Ausdrücke:

$$p_i \equiv e^{-\frac{\mu t}{2M}} (C_1 \cos \alpha\omega t + C_2 \sin \alpha\omega t) \mp \varrho \dots (10)$$

Wären die Widerstände einfach constant, so müsste in dieser Gleichung  $\mu = 0$  eingeführt,  $q$  dagegen endlich gelassen werden; das gäbe

$$p_i'' = C_1 \cos \alpha \omega t + C_2 \sin \alpha \omega t + q. \quad (11)$$

Die beiden ersten Glieder dieses Ausdruckes stellen eine Schwingungsbewegung dar, deren Periode für  $\alpha \omega T = 2\pi$  abgelaufen ist, wenn  $T$  die Zeit für eine ganze Schwingung bezeichnet. Setzt man  $\alpha \omega$  aus (9°) mit  $\mu = 0$  ein, so wird

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{\sigma}}. \quad (12)$$

Multipliziert man unter der Wurzel im Zähler und Nenner mit der Acceleration  $g$  der Schwerkraft, so stellt  $Mg/\sigma$  die Ausdehnung,  $\equiv l$ , der Feder durch ein Gewicht  $Mg$  dar, welches der auf den Indicator Kolben reducirten Masse entspricht. Damit schreibt sich Gleichung (12) auch:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (12^a)$$

$$p_i'' = e^{-\frac{\mu t}{2M}} (C_1 \cos \alpha \omega t + C_2 \sin \alpha \omega t). \quad (13)$$

Das sind auch Schwingungen, aber mit einer durch die Widerstände geänderten Schwingungszeit. Da nämlich jetzt in Glchg. (9°)  $\mu$  nicht fortfällt, so wird:

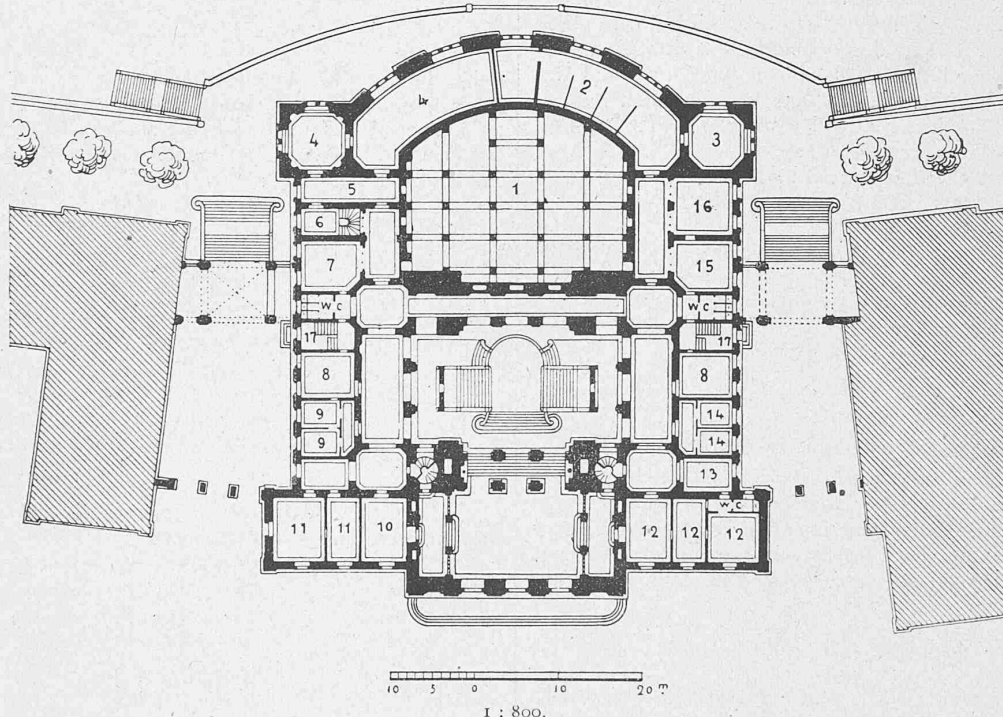
$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\sigma}{M} - \frac{\mu^2}{4M^2}}}. \quad (14)$$

Verglichen mit Glchg. (12) zeigt sich diese Schwingungszeit grösser als die vorige.

$C_1$  und  $C_2$  bleiben hier während der ganzen Dauer der Schwingungen ungeändert. Die als Factor hinzugekommene negative Potenz von  $e$  hat aber zur Folge, dass die Schwingungen doch immer kleiner werden, freilich streng genommen ohne je ganz zu verschwinden. Das Gesetz der Abnahme der Schwingungen ist hier auch ein an-

**Eidgenössisches Parlamentsgebäude in Bern.**

Entwurf von Professor Hans Auer.



Hochparterre.

Legende: 1. Ventilation, 2. Bibliothek, 3. Bibliothekar, 4. Buffet, 5. Garderobe, 6. Treppe für den Wirth, 7. Weibezimmer, 8. Journalistenzimmer, 9. Uebersetzer, 10. Stenographen, 11. Disponibel, 12. Hauswart, 13. Küche, 14. Toilette, 15. und 16. Drucksachen-Bureau, 17. Eingang für das Publikum.

Die beiden ersten Glieder der Glchg. (11) geben also die elastischen Schwingungen der Feder gegenüber der sonstigen Bewegung des Kolbens. Durch  $q$  werden diese Schwingungen aber in der Weise beeinflusst, dass die Mitte der Schwingung bei abnehmendem Werthe von  $p$ , um  $q$  über, bei zunehmendem um  $q$  unter die Mittellinie der übrigen Bewegung verschoben wird. Dabei nehmen die constanten Factoren  $C_1$  und  $C_2$  bei jeder Umkehrung der Kolbenbewegung andere Werthe an. Die Höhen der Wellen müssen aber gleichförmig abnehmen, bis einmal ein Wellenberg oder ein Wellenthal näher als  $q$  an die Mittellinie heranrückt; dann würden die Schwingungen aufhören. Weiterhin würde das Diagramm bei abnehmendem Druck um  $q$  zu hoch, bei zunehmendem um ebensoviel zu tief liegen. Nach den eminenten Werthen von  $p$  müsste der Kolben stehen bleiben, bis sich der Druck um  $2q$  geändert hat. Ebenso könnte nach der letzten Welle ein kurzes horizontales Stück auftreten.

Setzt man umgekehrt voraus, die Widerstände seien der Geschwindigkeit des Kolbens proportional, also  $\mu$  endlich und  $q = 0$ , so wird Glchg. (10):

deres. Da sich die Schwingungszeit nicht ändert, so müssen die Logarithmen der Ausschläge gleichförmig abnehmen.

Welchem Gesetze die Widerstände in Wirklichkeit folgen, lässt sich nur durch Versuche entscheiden. Die Schwingungen aber, welche bei gewöhnlichen Indicatoren gelegentlich auftreten, bleiben zu klein und halten nicht lange genug an, um in dieser Richtung ausgenutzt werden zu können. Man muss zu diesem Zwecke die Masse  $M$  durch Zusatzgewichte vergrössern, wie es von Slaby geschehen ist.\*) Derselbe hat dort auch ein solches Diagramm abgebildet, das an einer Gasmaschine abgenommen wurde. Misst man an ihm, so gut es an einem durch Druck wiedergegebenen Diagramm möglich ist, die Grössen der Ausschläge gegenüber dem mittleren Druck, so erhält man die Werthe der ersten Spalte in Tabelle I unter  $s$ . Die Lücke entspricht dem Vorausströmen, während dessen sich der mittlere Druck nicht einzeichnen lässt. Die zweite Spalte der Tabelle I

\*) Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1889, Bd. XXXIII, Seite 789.

enthält die Differenzen der absoluten Werthe je zweier aufeinanderfolgender Ausschläge. Es ist sofort ersichtlich, dass die Ausschläge *nicht* gleichförmig abnehmen, sondern immer langsamer, dass also nicht nur constante Widerstände wirksam sein können.

Tabelle I.

$s$	$\Delta s$	$\log s$	$\Delta \log s$
+ 18,9		1,27646	
- 17,4	1,5	1,24055	0,03591
+ 16,0	1,4	1,20412	0,03643
- 14,7	1,3	1,16732	0,03680
+ 13,4	1,3	1,12710	0,04022
- 12,2	1,2	1,08636	0,04074
+ 11,2	1,0	1,04922	0,03714
+ 7,5		0,87506	
- 6,7	0,8	0,82607	0,04899
+ 6,2	0,5	0,79239	0,03368
- 5,7	0,5	0,75587	0,03652
+ 5,3	0,4	0,72428	0,03159
- 5,0	0,3	0,69897	0,02531
+ 4,6	0,4	0,66276	0,03621
- 4,2	0,4	0,62325	0,03951
+ 4,0	0,2	0,60206	0,02119

In den folgenden Spalten der Tab. I sind die Logarithmen der Ausschläge und die Differenzen je zweier benachbarter Logarithmen angegeben. Letztere verlaufen allerdings ziemlich unregelmässig, namentlich bei den kleineren, schwieriger messbaren Wellen; doch wird man kaum fehl gehen, wenn man sie im Mittel angenähert constant annimmt. Es erscheint also richtiger, die Widerstände der Geschwindigkeit proportional zu setzen und daher in den Gleichungen  $\mu$  beizubehalten,  $q$  dagegen fortzulassen. Das Richtige dürfte allerdings sein, einen gegenüber  $\mu$  sehr kleinen Werth von  $q$  beizubehalten. Da aber seine genaue Bestimmung noch nicht möglich ist, soll  $q$  bei weiteren numerischen Rechnungen gleich Null gesetzt werden.

Um in dieser Richtung noch weiteres Versuchsmaterial zur Verfügung zu erhalten, habe ich einen älteren Indicator der Sammlung der mech. Abtheilung des Polytechnikums zur Anbringung von Zusatzmassen vorrichten lassen. Verwendbare Ergebnisse habe ich aber nicht erhalten. Die Eigenwiderstände des Instruments erreichen einen so hohen Betrag, dass sich höchstens zwei Wellen bildeten. Immerhin verlaufen aber die Ausschläge so, dass sie mit dem eben ausgesprochenen Gesetz der Widerstände nicht im Widerspruch stehen.

Die oben erwähnten Slaby'schen Versuche gestatten auch eine Berechnung des Werthes von  $\mu$ . Bezeichnet  $M_i$  eine Zusatzmasse, so nimmt für einen derartig abgeänderten Indicator Glchg. (14) die Gestalt an:

$$T_i \sqrt{\frac{\sigma}{M + M_i} - \frac{1}{4} \frac{\mu^2}{(M + M_i)^2}} = 2\pi. \quad (14^a)$$

In dieser Gleichung sind ausser  $\mu$  eigentlich auch  $\sigma$  und  $M$  unbekannt,  $\sigma$ , weil die gewöhnliche statische Bestimmung der Federscala, wie Slaby a. o. O. nachweist, nicht einwärtsfrei ist,  $M$ , weil sich die Masse der beweglichen Theile des Indicators überhaupt einer genauen Berechnung entzieht. Man müsste also mindestens mit drei verschiedenen Zusatzgewichten arbeiten, um drei Gleichungen von der Gestalt (14<sup>a</sup>) aufstellen und alle Unbekannten berechnen zu können.

Nun hat Slaby sogar vier verschiedene Zusatzgewichte benutzt. Meine Versuche aber, aus seinen Angaben auf diese Weise die drei gesuchten Grössen zu finden, schlugen fehl. Die Gleichungen werden nämlich für  $M$  quadratisch, und es ergaben von den vier möglichen Zusammenstellungen zu je drei Gleichungen mit drei Unbekannten zwei  $M$  imaginär, die beiden anderen zwar reell, aber unter sich stark verschieden und so, dass beide Vorzeichen der Wurzel möglich erscheinen. Der Grund dieses Ergebnisses ist in der Kleinheit des numerischen Werthes von  $M$  zu suchen; die unvermeidlichen Beobachtungsfehler üben einen grösseren Einfluss aus als das Glied mit  $M^2$ .

Um doch die Grösse der Widerstände wenigstens angenähert berechnen zu können, habe ich zunächst einmal den von Slaby ohne Berücksichtigung der Widerstände gegebenen Werth von  $M = 0,00974$  als richtig angenommen und ihn einer weiteren Berechnung zu Grunde gelegt, bei der dann nur noch  $\sigma$  und  $\mu$  unbekannt waren. Dabei erhielt ich aus den sechs möglichen Zusammenstellungen der vier Gleichungen (14<sup>a</sup>) zu je zweien für  $\sigma$  folgende Werthe: 2141,7 2140,4 2156,0 2131,5 2143,6 2100,4. Lässt man den letzten Werth, als unverhältnissmässig abweichend, fort, so findet sich der Mittelwerth

$$\sigma = 2142,64.$$

Für  $\frac{1}{4}\mu^2$  ergeben dann die vier Gleichungen die Werthe: 0,64870 0,63850 0,80920 0,67139, oder im Mittel 0,69195. Damit wird

$$\mu = 1,66367.$$

Unter Weglassung des verhältnissmässig grossen vorletzten Werthes von  $\frac{1}{4}\mu^2$  hätte man für  $\mu$  nur 1,5908 erhalten.

Mit diesen Werthen von  $\sigma$  und  $\mu$  sollte man eigentlich noch  $M$  berechnen und durch wiederholte Durchführung derselben Rechnung die gesuchten Grössen immer genauer bestimmen. Für die practischen Anwendungen erscheint das aber kaum nöthig. Mit dem eben gefundenen Werthe  $\sigma = 2142,64$  ergibt sich nämlich für eine Atmosphäre (1 kg/cm<sup>2</sup>) eine Bewegung des Schreibstiftes des Indicators von 5,891 mm, während Slaby ohne Berücksichtigung von Widerständen 5,900 mm findet. Die Abweichung beträgt also nur  $1\frac{1}{2}$  ‰. Eine Wiederholung der Rechnung mit etwas geänderten Werthe von  $M$  kann also für  $\sigma$  und  $\mu$  keine wesentlich anderen Ergebnisse liefern.

Ich muss hier noch auf einen Punkt hinweisen, der sich auf die Federschwingungen bezieht. Haben sich dieselben einmal eingestellt, so sollten sie doch nach Glchg. (10) in Folge der Widerstände schliesslich unmerklich klein werden, bzw. ganz verschwinden, auch wenn man nacheinander während mehrerer Umdrehungen indicirt. In Wirklichkeit ist das jedoch bekanntlich nicht der Fall. Hat der Indicator überhaupt Neigung, in Schwingungen zu gerathen, so wiederholen sich dieselben bei jeder Umdrehung wesentlich gleichartig und verschwinden gewöhnlich vor dem Ende der Umdrehung wieder vollständig. Der Grund, warum die Formeln diese regelmässige Erneuerung von Schwingungen nicht angeben, ist darin zu suchen, dass durch die Fourier'sche Reihe nur stetige Druckänderungen dargestellt werden können, während der Druck bei vielen Maschinen in der Nähe des Kolbenwechsels so rasch steigt oder sinkt, dass der Indicator dadurch wie durch eine Unstetigkeit beeinflusst wird.

Solche Anfangsschwingungen scheinen z. B. gern bei Dampfmaschinen mit stärkerer Compression aufzutreten, also bei eincylindrigen mit Umsteuerung und bei mehrstufigen. Man findet wenigstens bei solchen Maschinen öfters Diagramme mit folgendem Verlauf der Compressionscurve: Sie steigt zunächst so an, dass sie ihre hohle Seite nach innen kehrt, dann besitzt sie aber einen Wendepunkt, kehrt ihre volle Seite nach innen und schneidet sogar gelegentlich die Grenzordinate des Diagrammes nahezu senkrecht. Manchmal zeigt dieser Theil der Indicatorcurve auch ganz verschiedene Wellen. Man hat es hier also jedenfalls mit beginnenden Federschwingungen zu thun, die sich allerdings sehr bald wieder beruhigen. Doch kann man natürlich an dieser Stelle aus dem Indicatorgramm den Druck nicht mehr genau bestimmen. (Fortsetzung folgt.)