

Graphische Lösung höherer algebraischer Gleichungen

Autor(en): **Sieber, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **37/38 (1901)**

Heft 11

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-22684>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Graphische Lösung höherer algebraischer Gleichungen.

Einleitung. Unter ähnlichem Titel hat Hr. Ing. *Smreker* in Band XVII Nr. 7 der „Eisenbahn“ einen interessanten Artikel veröffentlicht, worin er besonders die Lösung der Gleichungen zweiten und dritten Grades mittelst einer im Band XIV der „Eisenbahn“ von ihm besprochenen Kurvengattung erörterte. Diese Kurven geben jedoch nur die Wurzeln drei- bzw. viergliedriger Gleichungen, versagen also bei vollständigen Gleichungen vierten und höhern Grades. Es soll deshalb in folgendem, aufbauend auf das nämliche Fundament wie Herr *Smreker*, ein allgemeiner Weg zur Konstruktion der höhern Gleichungen mit einer Unbekannten, deren Exponenten als positive ganze Zahlen vorausgesetzt sind, gesucht werden.

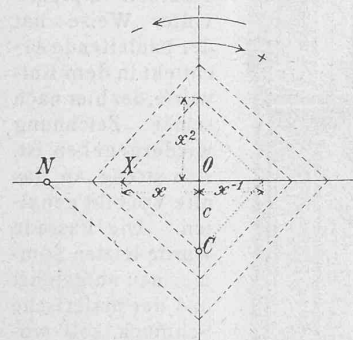


Fig. 1.

Trägt man in Fig. 1 auf dem einen Schenkel, zweier sich unter rechtem Winkel kreuzenden Achsen vom Durchschnittspunkte *O* aus die Länge *c* nach *C*, auf dem benachbarten Schenkel die Länge *x* nach *X* auf und konstruiert von *X* aus, an die Richtung *CX* anschliessend einen fortlaufenden Senkrechtenzug, dessen Scheitelpunkte auf den Achsen liegen, so

schneidet die *n*^{te} Strecke dieses Linienzuges, also nach *n* — 1 maliger Anlegung des rechten Winkels, auf dem treffenden Achsenschenkel die Länge *ON* ab und es ist

$$\frac{ON}{c} = \left(\frac{x}{c}\right)^n.$$

Betrachtet man die Grösse *c* als Masseinheit, setzt somit *c* = 1, so wird

$$ON = x^n.$$

Für die Folge wird daher *c* nicht evident erhalten, also stillschweigend = 1 genommen, und im weitern festgesetzt, dass die positive *n*^{te} Potenz beim Durchlaufen des Senkrechtenzuges in dem in der Figur als + angegebenen Drehungssinne stets auf der linken Seite der Horizontalachse abgeschnitten werden soll. Bezeichnet *μ* eine reelle ganze Zahl ≥ 0 , so fällt dann der Punkt *C*

$$\left. \begin{aligned} \text{wenn } n &= 4\mu && \text{links} \\ &= 4\mu + 1 && \text{unterhalb} \\ &= 4\mu + 2 && \text{rechts} \\ &= 4\mu + 3 && \text{oberhalb} \end{aligned} \right\} \text{ von } O.$$

Indem man den Senkrechtenzug an *CX* anschliessend rückwärts über *C* fortsetzt, erhält man successive

$$\frac{1}{x} = x^{-1}, \frac{1}{x^2} = x^{-2}, \text{ etc.}$$

Zur Konstruktion von $(-x)^n$ hätte man sich in entgegengesetztem Sinne von *C* aus um den Ursprung *O* zu bewegen, d. h. auch $-x$ in entgegengesetztem Sinne von $+x$ aufzuzeichnen und es läge sonach $(-x)^n$ bei ungeradem *n* rechts von *o*.

Konstruiert man ferner aus den Strecken *a*₀, *a*₁, *a*₂, ... *a*_{*n*-1}, welche als Werte der Verhältnisse

$$\frac{A_0}{c}, \frac{A_1}{c}, \frac{A_2}{c}, \dots, \frac{A_{n-1}}{c}$$

zu betrachten sind, in Fig. 1 a von *O*₁ ausgehend, den Senkrechtenzug *O*₁*A* in der Weise, dass bei positiven Werten *a*₀ auf der Horizontalen nach rechts von *O*₁ aus, daran anschliessend *a*₁ vertikal aufwärts, hierauf weiter *a*₂ nach links, dann *a*₃ vertikal abwärts, u. s. f., negative Werte aber je in entgegengesetztem Sinne der $+a$ mit gleichen Indizes aufgezeichnet werden, so kann man vom Endpunkte *A* der letzten Strecke *a*_{*n*-1}, mit dieser den gleichen Winkel in gleichem Sinne einschliessend, welchen *CX* mit *CO* in

Figur 1 bildet, den Strahl *AB* ziehen, welcher auf der Linie der *a*_{*n*-2} mit Berücksichtigung des Vorzeichens das Produkt *a*_{*n*-1} *x* abschneidet. Konstruiert man weiter anschliessend an *AB* einen neuen fortlaufenden Senkrechtenzug, dessen Scheitelpunkte der Reihe nach auf den Linien der *a*_{*n*-2}, *a*_{*n*-3} ... *a*₁ liegen, so erhält man auf der Linie der *a*₀ den Punkt *N*₁ und man findet, dass *O*₁ *N*₁ = *a*_{*n*-1} *x*^{*n*-1} + *a*_{*n*-2} *x*^{*n*-2} + ... + *a*₂ *x*² + *a*₁ *x* + *a*₀.

Legt man jetzt die Figuren 1 und 1 a so aufeinander, dass die Punkte *O* und *O*₁ und die Horizontalachsen zusammenfallen, so wird die Strecke *NN*₁ den Wert der Gleichung:

$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = y$$

repräsentieren. Würden auch die Punkte *N* und *N*₁ zusammenfallen,

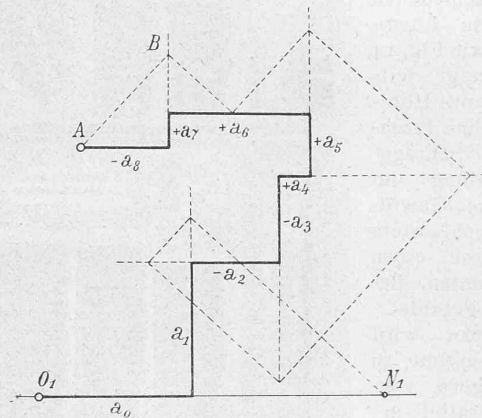


Fig. 1 a.

d. h. würde *NN*₁ = 0 sein, so hätte man also

$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (1)$$

und es müsste somit die Strecke *OX* = *x* in Fig. 1 einer Wurzel dieser Gleichung entsprechen.

Es stelle nun die Fig. 2 eine solche Kombination der Figuren 1 und 1 a dar, und es sei die Grösse *x* so bestimmt, dass die Punkte *N* und *N*₁ zusammenfallen, dass somit *x* als eine Wurzel der die Koeffizienten *a*₀, *a*₁ ... *a*_{*n*-1} enthaltenden Gleichung *n*^{ten} Grades zu betrachten ist. Infolge der getroffenen Anordnung würden sich unter allen

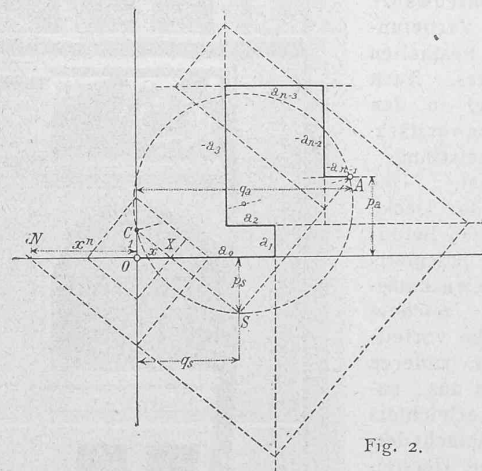


Fig. 2.

Umständen, wie man auch die Grösse *x* versuchsweise wählen möchte, die ersten von *C* und *A* ausgehenden Strahlen *CX* und *AB* in einem Punkt *S* schneiden, welcher der über *AC* als Durchmesser beschriebenen Kreislinie angehört. Im Weitern hat der Punkt *S* gewisse Bedingungen zu erfüllen, damit der durch ihn von *C* ausgehende Strahl eine der Gleichung (1) Genüge leistende Wurzel *OX* abschneide. Diese Bedingungen sind jetzt zu formulieren.

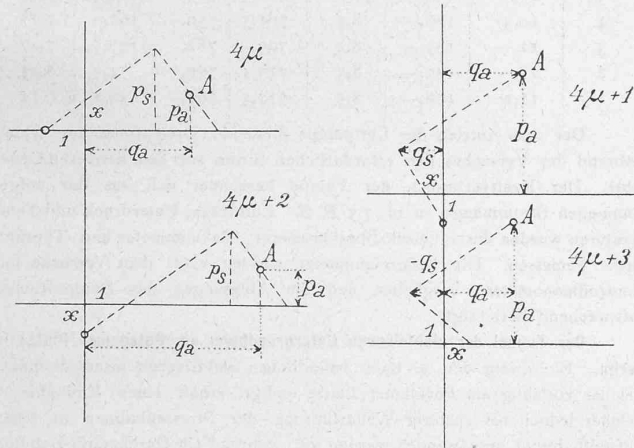
Aus den Figuren 1 a und 2 ersieht man, dass die *a* mit geradem Index auf Horizontalen, diejenigen mit un-

geradem auf Vertikallinien liegen. Die Koordinaten p_a und q_a des Punktes A von Horizontal- und Vertikalachse aus sind:

$$p_a = a_1 - a_3 + a_5 - \dots + \dots \quad (2)$$

$$q_a = a_0 - a_2 + a_4 - \dots + \dots \quad (3)$$

Das letzte Glied für p_a ist positiv bei $n = 4\mu + 2$ oder $4\mu + 3$, für q_a ist das letzte Glied positiv bei $n = 4\mu + 1$ oder $4\mu + 2$. Der Punkt A liegt bei positiven p_a und q_a über der horizontalen und rechts der vertikalen Achse.



Figuren 2 a.

Bezeichnet man die Abstände des Schnittpunktes S von der Horizontal- und der Vertikalachse mit p_s und q_s , so ergeben die Figuren 2 und 2 a

wenn n gerade:
$$p_s = \frac{q_a + p_a x \pm 1}{x + \frac{1}{x}} \quad (4)$$

wenn n ungerade:
$$-q_s = \frac{p_a + q_a x \pm 1}{x + \frac{1}{x}} \quad (5)$$

Das obere Vorzeichen von 1 ist gültig für $n = 4\mu$ oder $4\mu + 1$, das untere für $n = 4\mu + 2$ oder $4\mu + 3$; q_s ist negativ, liegt also links der Vertikalachse, bei ungeradem n und positiven p_a, q_a und x . Ferner ist zu beachten, dass bei $n = 4\mu + 1$ oder $4\mu + 2$ das $+x$ entgegengesetzt, d. h. links der Vertikalachse, resp. unterhalb der Horizontalachse abgeschnitten wird.

Falls nun $NN_1 = 0$, so hat man nach Gleichung (1):

$$a_{n-1}x + a_{n-2} = -\left(\frac{a_0}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-3}} + \dots + \frac{a_{n-3}}{x} + x^2\right) \quad (6)$$

Somit lassen sich in den entwickelten Formeln für p_s und q_s jeweils die Glieder mit a_{n-1} und a_{n-2} vermittelst der übrigen Koeffizienten ausdrücken. Man kann daher die Gleichungen (4) und (5) auch folgenderweise schreiben: für gerades n :

$$p_s = \frac{q_a \pm a_{n-2} + (p_a \pm a_{n-1})x \pm 1}{x + \frac{1}{x}} \pm \frac{\left(\frac{a_0}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-3}} + \dots + \frac{a_{n-3}}{x} + x^2\right)}{x + \frac{1}{x}} \quad (4^a)$$

für ungerades n :

$$-q_s = \frac{p_a \pm a_{n-2} - (q_a \mp a_{n-1})x \pm 1}{x + \frac{1}{x}} \pm \frac{\left(\frac{a_0}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-3}} + \dots + \frac{a_{n-3}}{x} + x^2\right)}{x + \frac{1}{x}} \quad (5^a)$$

oder
$$p_s = \frac{a_0 - a_2 + \dots - \dots a_{n-4} + x(a_1 - a_3 + \dots a_{n-3})}{x + \frac{1}{x}} \pm \frac{\left(\frac{a_0}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-3}} + \dots + \frac{a_{n-3}}{x} + x^2\right) \pm 1}{x + \frac{1}{x}} \quad (4^b)$$

$$-q_s = \frac{a_1 - a_3 + \dots a_{n-4} - x(a_0 - a_2 + \dots a_{n-3})}{x + \frac{1}{x}} \pm \frac{\left(\frac{a_0}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-3}} + \dots + \frac{a_{n-3}}{x} + x^2\right) \pm 1}{x + \frac{1}{x}} \quad (5^b)$$

Die obere Vorzeichen gelten bei $n = 4\mu$ oder $4\mu + 1$, die untere bei $n = 4\mu + 2$ oder $4\mu + 3$.

Man findet durch Ausrechnung dieser Gleichungen

bei $n = 2 : p_s = -x$
 $n = 3 : q_s = a_0 + x$
 $n = 4 : p_s = a_1 + \frac{a_0}{x} + x$
 $n = 5 : q_s = a_0 - a_2 - \frac{a_1}{x} - \frac{a_0}{x^2} - x$
 $n = 6 : p_s = a_1 - a_3 - \frac{a_2}{x} - \frac{a_0}{x^2} - \frac{a_1}{x^3} - \frac{a_0}{x^4} - x$
 $n = 7 : q_s = a_0 - a_2 + a_4 + \frac{a_3}{x} - \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^3} - \frac{a_0}{x^4} + \frac{a_1}{x^5} + \frac{a_0}{x^6} + x$
 $n = 8 : p_s = a_1 - a_3 + a_5 + \frac{a_4}{x} - \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_0}{x^3} + \frac{a_3}{x^4} - \frac{a_1}{x^5} + \frac{a_2}{x^6} - \frac{a_0}{x^7} + x$

Diese Formeln enthalten nun die Bedingungen, welche der in der Kreislinie über AC liegende Punkt S zu erfüllen hat.

Allgemeiner Gang der Konstruktion. Behufs Konstruktion der Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades ist nun folgender Weg einzuschlagen:

Auf dem rechtwinkligen Achsensystem hat man den Punkt C der eingangs gegebenen Anweisung gemäss und den Punkt A entsprechend den Koordinaten p_a und q_a aufzutragen und hierauf die Kreislinie um AC zu ziehen. Sodann wird in den Figuren 1 und 2 verwandter Weise der für n zutreffende Wert p_s oder q_s für verschiedene willkürlich angenommene x_i konstruiert und die Resultate mit Berücksichtigung des Vorzeichens von der zuständigen Achse aus je in der Vertikalen oder Horizontalen des betreffenden Peripheriepunktes S_i aufgetragen oder auch auf die Strahlen CS_i hinüberprojiziert; die so erhaltenen Punkte bestimmen eine Hilfskurve, deren Schnitte mit der Kreislinie AC diejenigen Strahlen CS anzeigen, welche die reellen Wurzeln $OX = x$ auf der OC konjugierten Achse abschneiden. Je nach Umständen wird man zur Erzielung grösserer Genauigkeit x , d. h. das Verhältnis $\frac{OX}{OC}$ auch aus den Koordinatenunterschieden der Punkte S und C oder S und A ermitteln.

(Schluss folgt.)

Miscellanea.

Versuche an einer 300pferdigen de Laval-Dampfturbine. In den Böhm.-Krumenauer Papierfabriken zu Pötschmühle wurden bei Versuchen mit einer de Laval-Dampfturbine von 300 P. S. e., welche einen Drehstrom-Generator von 350 cos φ K. W. bei 330 Volt Spannung mit ruhenden Ankerwickelungen und umlaufendem Magnetrad in Tätigkeit setzt, nach einem Berichte in der «Zeitschr. d. Vereines deutscher Ing.» folgende Ergebnisse erzielt.

Die Dampfturbine ist für eine Eintrittsspannung an den Düsen von 9 Atm. Ueberdruck eingerichtet und mit 8 Unterdruck- und 4 Hochdruckdüsen ausgerüstet. Beim normalen Betriebe kommen nur die Unterdruckdüsen, welche 9 mm Durchmesser haben, zur Anwendung, während die Hochdruckdüsen mit 20 mm Durchmesser nur bei der Inbetriebsetzung, oder bei sinkender Dampfspannung oder sinkendem Unterdrucke in Wirkung treten, um die Leistung aufrecht zu erhalten.

Das Turbinenrad macht 10500, die beiden Vorgelegewellen 750 Umdrehungen i. d. Minute. Je 10 quadratisch geflochtene Hanfseile von 30 mm² Querschnitt übertragen die Kraft von den beiden Vorgelegewellen auf den Drehstromgenerator mit 350 minütl. Umdrehungen. Der zur An-