Zur Berechnung von eingespannten Gewölben

Autor(en): **Ritter, Hugo**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **57/58 (1911)**

Heft 12

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-82585

Band 57. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und unter genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 12.**

Zur Berechnung von eingespannten Gewölben.

Von Dipl.-Ing. *Hugo Ritter*, z. Zt. in Danzig.

Die Berechnung von eingespannten Bogen unter Zugrundelegung der Elastizitätstheorie erfordert nach der allgemeinen Methode bekanntlich ein grosses Mass von Arbeit, ob nun die Bestimmung der im Innern des Bogens wirkenden Kräfte graphisch oder analytisch erfolge. Ist der Einfluss einer beweglichen Belastung zu ermitteln, so ist diese Arbeit nicht zu umgehen, handelt es sich aber um die Berechnung von Spannungen infolge von Eigengewicht oder weniger bestimmter Belastungszustände, so ist, wie im Nachstehenden gezeigt werden soll, eine einfachere und rasche Lösung möglich. Diese Berechnungsweise gilt nicht nur für *vertikale,* sondern auch für *beliebig gerichtete Lasten,* wie sie z. B. bei Gewölben unter hohen Erddämmen auftreten, die nicht nur auf vertikalen, sondern auch horizontalen Erddruck zu untersuchen sind, oder bei bogenförmigen Dachbindern, bei denen der Winddruck berücksichtigt werden muss.

Die allgemeine Lösung dieser Aufgabe ist von Prof. Dr. W. Ritter im Jahre 1891 in einem Artikel dieser Zeitschrift (Bd. XVII, S. 13) für einen belasteten Stabring entwickelt worden. Es liegen ihr folgende drei Sätze zu Grunde:

1. Wirkt auf ein Balken- oder Bogenelement eine äussere Kraft, so kann die elastische Formänderung des Elementes, d. h. die Bewegung, die der eine Querschnitt gegenüber dem andern erfährt, als eine Drehung um den Antipol der äussern Kraft bezüglich der Elastizitätsellipse des Elementes aufgefasst werden. Die Grösse der Drehung ist gleich der Kraft multipliziert mit dem auf die Kraftrichtung bezogenen statischen Moment des im Ellipsenmittelpunkt konzentriert gedachten elastischen Gewichtes.

Die Elastizitätsellipse ist diejenige Ellipse, deren kleine halbe Axe gleich ist der vertikalen Axe der Zentralellipse des Querschnittes, also $i_1 = \sqrt{\frac{J}{F}}$ (J = Trägheitsmoment und F = Fläche des Querschnittes), und deren grosse halbe Axe den Wert hat $i_2 = \frac{\Delta s}{\sqrt{12}}$ (Δs = Länge des Elementes), wobei der Einfluss der Scherspannungen auf die Formänderungen vernachlässigt worden ist.

2. Erfährt ein beliebig gelegener Punkt nacheinander zwei unendlich kleine Verrückungen, die als Drehungen um zwei in endlichen Abständen befindliche andere Punkte aufgefasst werden können, so kann die Gesamtbewegung als Drehung um einen dritten Punkt angesehen werden, der sich als Schwerpunkt der mit den Drehwinkeln belasteten beiden Drehpunkte ergibt. Die Grösse des Gesamtdrehwinkels ist gleich der Summe der einzelnen Drehwinkel.

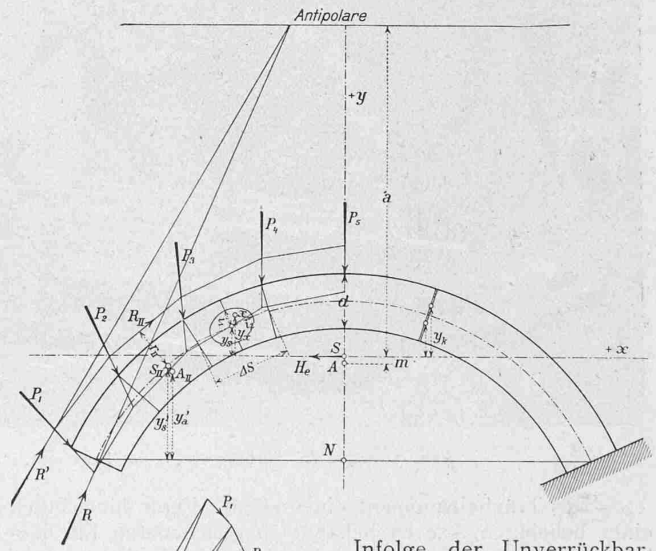
3. Wenn für ein Kräftesystem mit zwei verschiedenen Polen zwei Seilecke konstruiert werden, so schneiden sich die zwischen gleichen Kräften liegenden Seiten der beiden Seilecke in einer Graden, der sogen. Polaraxe, die parallel der Verbindungslinie der beiden Pole ist. Das eine Seileck ergibt sich aus dem andern, wenn dem Kraftsystem eine weitere Kraft beigefügt wird, die in der Polaraxe liegt und deren Grösse durch die Distanz der beiden Pole dargestellt wird.

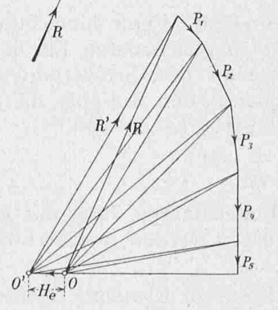
Man denkt sich nun den Bogen durch Querschnitte in eine Anzahl Elemente von gleicher Länge zerlegt und die Belastung in den Schnittpunkten konzentriert (vgl. die Abbildung). Dann lassen sich bekanntlich unendlich viele Drucklinien in den Bogen einzeichnen, welche die Gesetze des Gleichgewichtes befriedigen. Von allen diesen wird aber nur eine einzige den wirklich vorhandenen innern Spannungen entsprechen, und um diese zu finden, muss von den Gesetzen der elastischen Formänderungen Gebrauch gemacht werden.

Zunächst zeichnet man mittels beliebig gewähltem Pole O' eine Drucklinie, dann stellt jede Seite des Seileckes die Resultierende aller auf das entsprechende Element wirkenden äussern Kräfte dar. Hält man nun den Bogen an seinem rechten Auflager fest und denkt sich das linke frei beweglich, so wird sich dieses infolge der Elastizität des Materials unter dem Einfluss der auf den Bogen wirkenden Kräfte verschieben. Betrachtet man vorerst nur ein einziges Element, z. B. das zweite, als elastisch, so dreht die Resultierende R_{II} nach Satz 1 den einen Querschnitt des Elementes II gegenüber dem andern, folglich auch das freischwebende Bogenende um A_{II}, den Antipol der Kraft bezüglich der Elastizitätsellipse, und der Drehwinkel ist

$$\Delta \delta_{II} = R_{II} \cdot r_{II} \cdot \Delta g_{II} = \frac{R_{II} \cdot r_{II} \cdot \Delta s}{E \cdot J_{II}}$$

Betrachtet man nun ein Element nach dem andern als elastisch, so dreht sich das linke Bogenende nach einander um alle Antipole der einzelnen Elemente.





Infolge der Unverrückbarkeit der Widerlager kann jedoch diese Bewegung in Wirklichkeit nicht eintreten und muss im Bogen eine der Drehung entgegen wirkende Ergänzungskraft wirken. Die Gesamtverdrehung ist nach Satz 2 gleich der Summe der Einzelverdrehungen, den Drehpunkt für diese Gesamtbewegung findet man als Schwerpunkt der in ihren Drehpunkten als Kräfte wirkenden Drehwinkel. Die Kraft, die diese Drehung wieder rückgängig zu machen hat, muss, da sie den ganzen Bogen beeinflusst, in der Antipolaren zu diesem Punkt hinsichtlich der Elastizitätsellipse des ganzen Bogens liegen. Ihre Grösse ergibt sich aus der Beziehung:

$$H_e \cdot a \cdot \Sigma(\Delta g) = \Sigma(\Delta \delta)$$

zu: $$H_e = \frac{\Sigma(\Delta \delta)}{a \cdot \Sigma(\Delta g)}$$

Handelt es sich um *symmetrische* Bogen, so liegt sowohl der Schwerpunkt der elastischen Gewichte S, wie auch der Drehpunkt A auf der vertikalen Symmetrieaxe des Bogens und die Antipolare steht infolgedessen auf dieser senkrecht. Die gesuchte Ergänzungskraft ist also eine horizontale Kraft. Trägt man sie im Kräftepolygon von dem beliebig gewählten Pole O' den Kräften R' entgegengesetzt auf, so findet man nach Satz 3 den Pol O für die richtige Drucklinie. Die Seiten des beliebig angenommenen und diejenigen des richtigen Seilpolygons schneiden sich auf der Antipolaren, und dadurch ist auch die Lage der endgültigen Drucklinie gefunden. Die im Bogen auftretenden Spannungen ergeben sich nach bekannten Regeln.

Zur Bestimmung der Entfernung a der Antipolaren vom Schwerpunkt S ist der Halbmesser i der Elastizitätsellipse des ganzen Bogens erforderlich, da

$$a = \frac{i^2}{m},$$

wo m den Abstand des Antipols vom Schwerpunkt bedeutet.

Die Wasserturbinen des Elektrizitätswerks Sao Paulo.

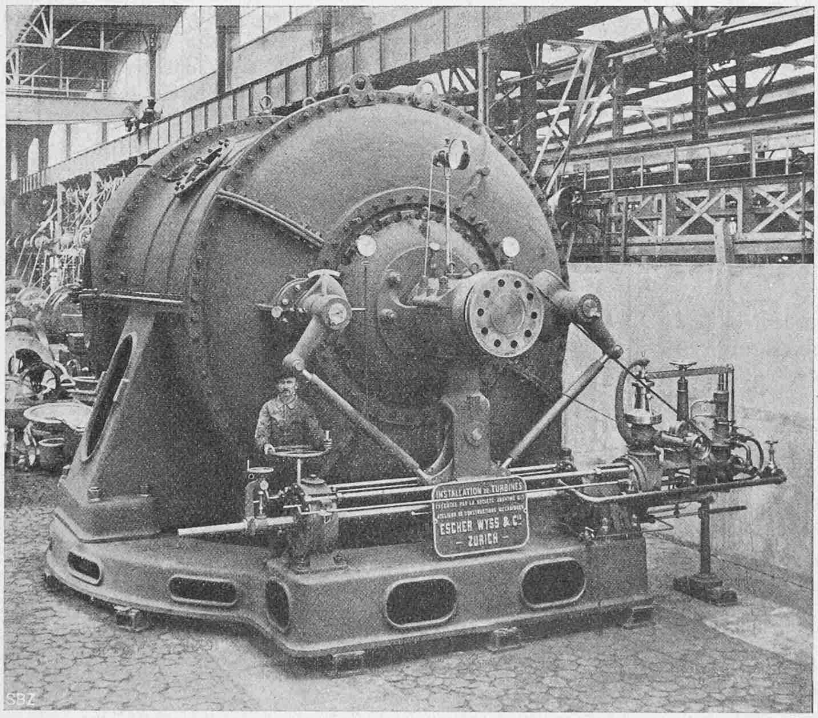


Abb. 3. 4500 *PS*-Turbine Nr. V mit Regulator.

Das Trägheitsmoment einer ebenen Figur hinsichtlich einer beliebigen Axe ist bekanntlich gleich deren Flächeninhalt multipliziert mit dem Abstand des Schwerpunktes von der Axe und mit dem Abstand des Antipols dieser Axe hinsichtlich der Trägheitsellipse. Es ist also

$$i^2 = \frac{\Sigma\,(\varDelta g \cdot y_s \cdot y_x)}{\Sigma\,(\varDelta g)}$$

Für Bogen mit geringen Bogenstärken kann mit genügender Genauigkeit $y_x = y_s$ gesetzt werden, wodurch die Arbeit etwas vereinfacht wird.

Was die Einteilung des Bogens in Elemente betrifft, so wird man deren Zahl möglichst beschränken; bei stark wechselndem Trägheitsmoment dürfen die Elemente jedoch nicht zu gross angenommen werden, damit man für J noch ohne grossen Fehler einen Durchschnittswert einführen kann.

Es empfiehlt sich, den Pol O' so zu wählen, dass die erste Drucklinie der Mittellinie des Bogens möglichst ähnlich verläuft und dass ihre Seiten also die Verlängerungen der kleinen Halbaxen der Ellipsen angenähert senkrecht schneiden. Dann werden die Antipole A auf diesen Geraden liegen und ist zu ihrer Bestimmung nur der kleine Halbmesser erforderlich. Als Mittelpunkt der Ellipsen kann mit genügender Genauigkeit der Schwerpunkt des durch die Querschnitte begrenzten Stückes der Bogenmittellinie gewählt werden.

Bezeichnet man die Bogenstärke mit d und betrachtet man einen Bogenring von der Breite 1, so ist das Trägheitsmoment:

$$J = \frac{d^3}{12},$$

das elastische Gewicht $\varDelta g = \dfrac{12 \cdot \varDelta s}{d^3 \cdot E}$

und die kleine Halbaxe der Elastizitätsellipse der Elemente

$$i_1 = \frac{d}{\sqrt{12}}$$

Beachtet man diese Ausdrücke und nimmt die Länge der Elemente als konstant an, so ergeben sich zur *Bestimmung von Grösse und Lage der Ergänzungskraft H_e* folgende Formeln:

Der Abstand des Mittelpunktes der Gesamtellipse von der Bogensehne:

$$NS = \frac{\Sigma\left(\frac{y_s}{d^3}\right)}{\Sigma\left(\frac{1}{d^3}\right)}$$

Der Abstand des Antipols A von der Bogensehne:

$$NA = \frac{\Sigma\left(\frac{R \cdot r \cdot y_a}{d^3}\right)}{\Sigma\left(\frac{R\,r}{d^3}\right)}$$

Daraus $m = NS - NA.$

Das Quadrat des kleinen Halbmessers der Ellipse ist

$$i^2 = \frac{\Sigma\left(\frac{y^2_s}{d^3}\right)}{\Sigma\left(\frac{1}{d^3}\right)}$$

und der Abstand der Antipolaren vom Schwerpunkt

$$a = \frac{i^2}{m}$$

Schliesslich ergibt sich die Zusatzkraft zu

$$H_e = \frac{\Sigma\left(\frac{R \cdot r}{d^3}\right)}{a \cdot \Sigma\left(\frac{1}{d^3}\right)}$$

Ist die Querschnittsänderung des Bogens gering, so kann man sein Trägheitsmoment als konstant ansehen, wodurch sich obige Formeln durch Wegfall der Grösse d wesentlich vereinfachen.

Die Grössen R, r, d usw. greift man in der Zeichnung ab, trägt sie am besten in Tabellenform auf und bestimmt dann die Produkte und Summen. Als Genauigkeitsprobe für die Berechnung kann gelten, dass die in den Antipolen der richtigen Seilpolygonseiten angreifenden Drehwinkel einander das Gleichgewicht halten müssen.

Die Bestimmung der *Eigengewichtsspannungen* wird man, da es sich hierbei um grosse Kräfte handelt und möglichste Genauigkeit der Berechnung erwünscht ist, besser auf folgende Weise vornehmen. (Vgl. Prof. *E. Mörsch:* Berechnung von eingespannten Gewölben, in „Schweiz. Bauzeitung", Bd. XLVII, S. 83 bezw. 89.)

Man gibt dem Gewölbe eine derartige Form, dass seine Axe mit einer Stützlinie für Eigengewicht zusammenfällt, was sich durch Versuchsrechnung leicht erzielen lässt. Dann kann die Hülfsdrucklinie als ein zur Bogenmittellinie ähnlicher Polygonzug konstruiert werden. Das Einzeichnen der Drucklinie ist aber nicht nötig, da die Hebelarme r alle von gleicher Länge sind. Es genügt, diese beliebig gewählte Grösse auf den Verlängerungen der kleinen Ellipsenhalbmesser vom Mittelpunkt der Ellipsen aus aufzutragen und darauf gestützt die Antipole zu bestimmen. In dem Ausdruck für NA kann die Grösse r weggelassen werden, und in dem für H_e wird man sie besser vor das Summenzeichen setzen. Im übrigen bleibt die Berechnung der Zusatzkraft dieselbe.

Da nun die Lage der ersten Drucklinie beliebig ist, auf die Grösse der Ergänzungskraft also keinen Einfluss hat und nur ihren Abstand a vom Schwerpunkt S bedingt, kann diese ebensogut in die Bogenmittellinie gelegt werden. In diesem Falle kommen die Antipole der einzelnen Elemente ins Unendliche zu liegen, somit auch der Drehpunkt der Zusatzkraft. Und zwar fällt dieser bei symmetrischen Bogen mit dem unendlich fernen Punkt der y-Axe zusammen; die Kraft H_e liegt somit in der x-Axe. Eine Bestimmung der *Grösse* von H_e ist auf diesem Wege nicht möglich, wohl aber lässt sich die *Lage* der Drucklinie finden, indem jetzt deren Seiten sich mit den entsprechenden Linien der Bogenmittellinie auf der x-Axe schneiden müssen.

Das Einzeichnen der Drucklinie zur Bestimmung der Randspannungen ist aber in diesem Falle nicht nötig. Man erhält letztere einfacher und auch genauer aus der Formel:

$$\sigma = \frac{R}{F} \pm \frac{H_e \cdot y_k}{W}$$

Der erste Ausdruck gibt gleichmässig über den Querschnitt verteilte Druckspannungen, der zweite liefert im Bogenteil oberhalb der x-Axe für den obern Rand der Querschnitte Druckspannungen und für den untern Zugsspannungen, im unterhalb der Axe liegenden Teil umgekehrt.

Die Berechnung von *unsymmetrischen* Bogen kann in der gleichen, vorstehend beschriebenen Weise vorgenommen werden, nur erfordert sie mehr Arbeit, da sie sich auf den ganzen Bogen zu erstrecken hat. Von der Gesamtellipse sind beide Halbaxen zu bestimmen, da der Antipol A im allgemeinen nicht mehr auf der kleinen Halbaxe liegen, die Antipolare deshalb beide Axen schneiden wird.

Danzig, im Dezember 1910.

Die Wasserturbinen und Regulatoren des Elektrizitätswerks Sao Paulo, Brasilien.

Gebaut von *Escher Wyss & Cie.* in Zürich.

Die Zentrale der Tramway, Light and Power Co. Sao Paulo enthielt bis vor kurzem vier hydroelektrische Einheiten zu je rund 1500 PS Maximal-Leistung; Turbinen und Generatoren waren amerikanischer Herkunft, letztere aus verschiedenen, z. T. ältern Maschinen kombiniert, wie in der Abbildung 1 im Grundriss (Gruppe I bis IV) zu erkennen.

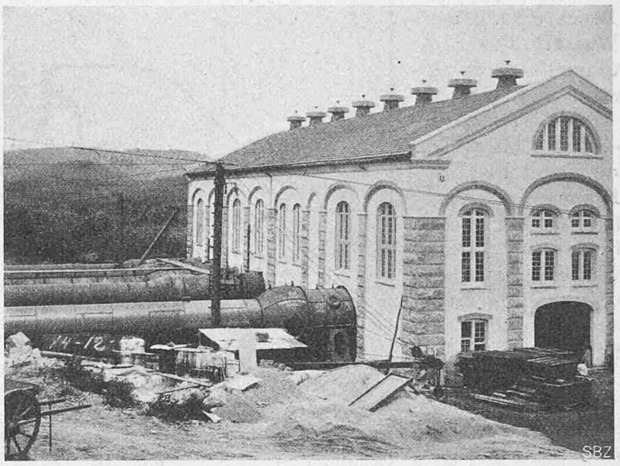


Abb. 2. Ansicht der Zentrale nach Einbau der Turbine V.

Zur Erweiterung des Werkes wurde der Firma Escher Wyss & Cie. in Zürich versuchsweise eine grössere Turbine (Nr. V) von 4500 PS in Auftrag gegeben, die als Doppelfrancisturbine mit Oeldruckregulator zur Ausführung kam. Abbildung 2 zeigt die Zentrale nach Einbau der Turbine V, Abbildung 3 diese Turbine selbst samt Regulierung, in einer Werkstattaufnahme. Die Ergebnisse waren so befriedigend, dass das Werk nicht nur nacheinander drei

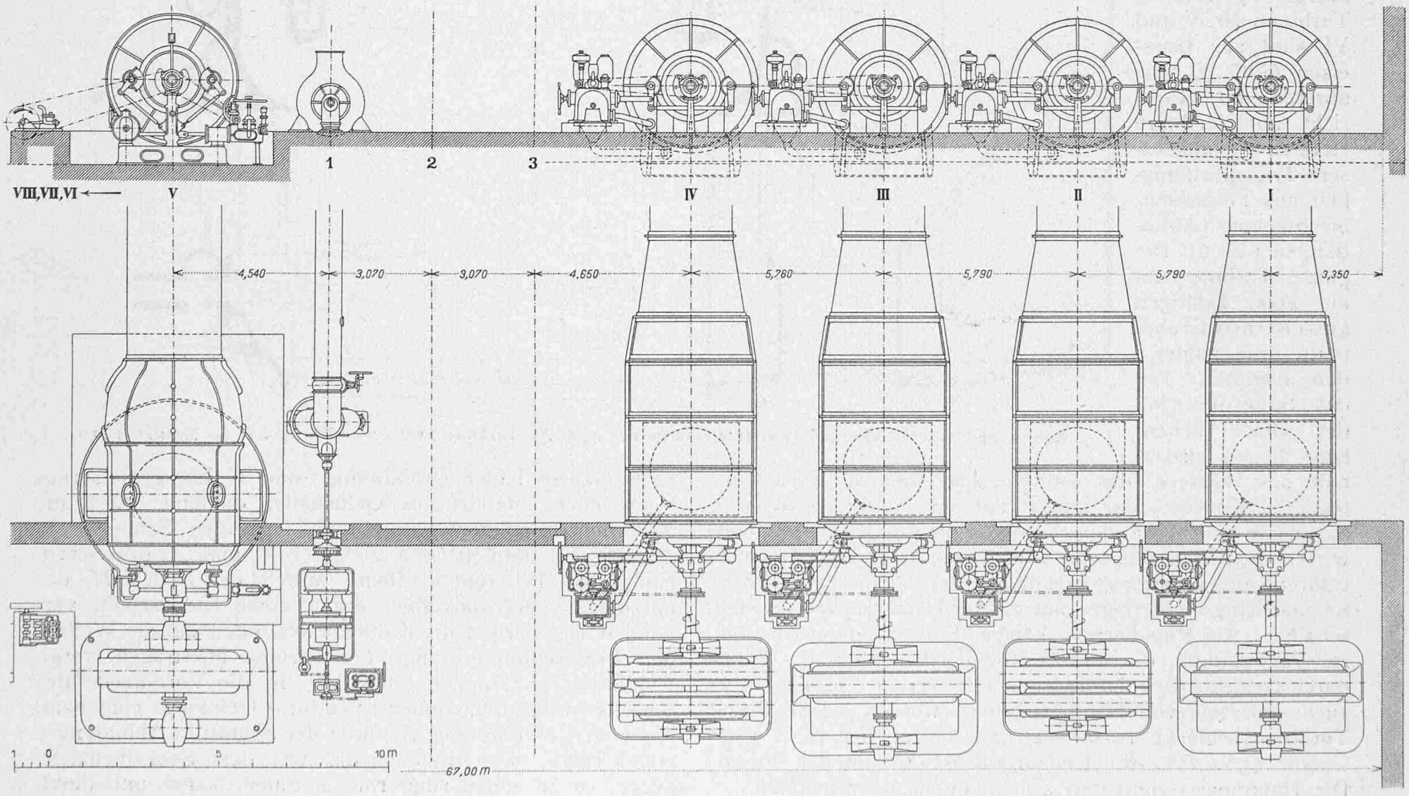


Abb. 1. Anordnung der 4500 PS-Turbinen Nr. I bis V im Elektrizitätswerk Sao Paulo. — Grundriss und Längsschnitt der Zentrale 1 : 200.