Band 62. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und unter genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 15.**

Ueber graphische Integration von totalen Differentialgleichungen.

Von Prof. Dr. *Ernst Meissner*, Zürich.

1. Einleitung.

Die meisten Probleme der Mechanik und Physik führen bei ihrer mathematischen Fassung auf Differentialgleichungen, aus denen die unbekannten Funktionen bestimmt werden müssen. Sind diese von mehreren Veränderlichen abhängig, so hat man es mit partiellen, kommt deren nur eine einzige vor, so hat man es mit totalen Differentialgleichungen zu tun. Letztere treten in der Mechanik besonders häufig auf. Sie sind dort meist von der zweiten Ordnung.

Für die analytische Lösung totaler Differentialgleichungen liegen eine Reihe von Integrationsmethoden vor, die aber nur in den einfachern Fällen zum Ziele führen, d. h. für die gesuchte Funktion einen Ausdruck in elementaren Funktionen (x^n, e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\lg x$ etc.) zu finden erlauben; denn in der Mehrzahl der Fälle werden durch die Differentialgleichungen neue Funktionen definiert, die sich überhaupt nicht elementar darstellen lassen. So führen viele Bewegungsaufgaben, z. B. das Pendel- und Kreiselproblem auf elliptische Funktionen, während andere Funktionen erfordern, die auch dem Mathematiker unbekannt sind. (Das Dreikörperproblem in der Himmelsmechanik).

Nun ist für den Techniker und Physiker der Standpunkt gegenüber solchen „unlösbaren" Differentialgleichungen durchaus nicht derselbe, wie für den Mathematiker. Während dieser letztere nach der Existenz, dem Charakter und den Eigenschaften der Lösung fragen wird, begnügt sich der Techniker, wenn er bei gegebenen Anfangsbedingungen den Verlauf der Funktion qualitativ, wo möglich auch quantitativ beurteilen kann, wobei es ihm auf Fehler von einigen Prozenten im allgemeinen kaum viel ankommen dürfte. Er wird also nach Verfahren suchen, welche die Lösung wenigstens mit Annäherung zu berechnen erlauben.

Zu diesem Zweck kann er einmal für die Lösung eine Potenzreihe (oder eine andere Funktionenreihe mit genügend vielen verfügbaren Konstanten) ansetzen, und so der Differentialgleichung zu genügen suchen. Aber diese Methode ist selten praktisch durchführbar, und man hat häufig Konvergenzschwierigkeiten.

Ein zweites Mittel besteht darin, schon die Differentialgleichung zu vereinfachen, indem etwa Glieder vernachlässigt werden, deren Einfluss voraussichtlich klein ist. Das tut man z. B. bei der Behandlung gewöhnlicher Pendelschwingungen, wo die genaue Differentialgleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = - k^2 \sin \varphi$$

unter Voraussetzung von kleinen Schwingungen durch die viel einfachere

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = - k^2 \varphi$$

ersetzt wird. Aber dies Verfahren hat stets gewisse Voraussetzungen, die häufig nicht erfüllt sind; auch ist man im Unsichern über den Geltungsbereich der gefundenen Lösung.

Eine dritte Methode endlich benützt das sog. Differenzenverfahren. Sie ersetzt die Differentialgleichung durch eine Differenzengleichung, die Differentiale durch endlich grosse, wenn auch sehr kleine Differenzen, und berechnet sich so schrittweise die ganze Funktion angenähert aus den gegebenen Anfangswerten. Schon in einfachen Fällen kommt man aber auf diese Weise zu umfangreichen Rechnungen und mehr oder weniger unübersichtlichen Zahlentabellen.

Es liegt nahe, den Gedanken, der hier zugrunde liegt, zu verwenden, um ein graphisches Verfahren darauf aufzubauen. Das ist auch deswegen besonders empfehlenswert, weil gelegentlich die schon in der Differentialgleichung auftretenden Funktionen, und umsomehr die Lösung sich entweder gar nicht oder nur umständlich analytisch beschreiben lassen, während sie graphisch einfach durch ein Diagramm gegeben sind. Das trifft z. B. zu, wenn die Funktion in verschiedenen Gebieten verschiedenen analytischen Gesetzen folgt (Momentenfläche eines belasteten Stabes) oder wenn sie (wie im Beispiel 5 die störende Kraft) eine ganz willkürliche Funktion ist, die man analytisch durch eine vielgliedrige Fourier-Reihe annähernd darstellen müsste.

Deutet man die unbekannte Funktion als Ordinate y, die unabhängige Veränderliche als Abszisse x einer Kurve k in rechtwinkligen Koordinaten, so wird durch die Differentialgleichung für $y(x)$ dieser Kurve eine bestimmte, charakteristische Eigenschaft zugeschrieben. Ist die Gleichung erster Ordnung, etwa [1])

$$y' = f(x, y)$$

wobei f einen bekannten Ausdruck in x und y bedeutet, so wird zu jedem Kurvenpunkte der Winkel τ der Tangente mit der x-Axe vorgeschrieben, da ja $y' = \operatorname{tg} \tau$ ist. Aehnlich gibt eine Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = f(x, y, y')$$

eine Beziehung zwischen dem Krümmungsradius ϱ, dem Tangentenwinkel τ, und den Koordinaten eines Kurvenpunktes. Aber es scheint praktisch fast aussichtslos, darauf ein graphisches Näherungsverfahren gründen zu wollen. Denn ϱ hängt durch die verwickelte Formel

$$\varrho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$$

mit y' und y'' zusammen. Noch schlimmer stehts bei Differentialgleichungen von höherer als zweiter Ordnung.

Es soll Aufgabe der folgenden Zeilen sein, eine graphische Integrationsmethode zu entwickeln, die diese Uebelstände nicht besitzt, und die, wie mehrere Beispiele zeigen, den praktischen Bedürfnissen nach Einfachheit und Genauigkeit gleichzeitig genügen dürfte. Das Verfahren ist in dem Sinne allgemein, als es auf Gleichungen beliebig hoher Ordnung anwendbar ist, wenn auch seine Genauigkeit naturgemäss mit wachsender Ordnung abnimmt. Wenn in den Beispielen trotzdem nur Differentialgleichungen zweiter und erster Ordnung integriert werden, so geschiehts, weil diese weitaus am häufigsten auftreten.

2. Das Liniendiagramm einer Funktion.

Wenn sich auf das gewöhnliche Punktdiagramm einer Funktion ein graphisches Verfahren, das praktisch brauchbar wäre, nicht aufbauen lässt, so rührt das davon her, dass die Ableitungen der Funktion mit den geometrischen Eigenschaften ihres Schaubildes in keinem genügend einfachen Zusammenhang stehen, und aus dem Diagramm ohne weiteres nicht entnommen werden können.

Nun sind wir aber an jene Kurvendarstellung durchaus nicht gebunden; wir können vielmehr an ihrer Statt jedes Gebilde benützen, welches die Abhängigkeit der Funktion von ihrem Argumente darzustellen geeignet ist. Das im folgenden verwendete Gebilde nenne ich das *Liniendiagramm* der Funktion.

Die unabhängige Variable heisse u, und werde als Winkel gedeutet, die von u abhängige Funktion p_u als Strecke interpretiert. Während beim gewöhnlichen Punkt-

[1]) Akzente bedeuten hier, wie im Folgenden Ableitungen nach der unabhängigen Veränderlichen.