Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Band: 65/66 (1915)

Heft: 18

Artikel: Anwendung des Krümmungsradius zur Berechnung von numerischen Gleichungen

Autor: Fischer-Hinnen, J.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-32233

sind weder mit dem Zusammenzug und der Akkumulierung der Wasserkräfte, noch namentlich mit den Methoden der eigentlichen Wärmeakkumulierung und der elektrischen Koch- und Heiz-Methoden über die Anfänge hinaus. Der Schreiber dies hat seit Jahren wiederholt in Vorträgen bei verschiedenen Gelegenheiten unter Angabe von Zahlen über die „Energiebilanz" der Schweiz gezeigt, dass wir nicht nur für unsern gesamten Beleuchtungsbedarf und für alle motorische Kraft für die Industrie und anderweitige Anwendungen und dazu für allen Bahnbetrieb genügende Wasserkräfte in der Schweiz haben, sondern auch darüber hinaus noch einen gewaltigen Ueberschuss an Wasserkraftenergie, den wir für alle Wärmezwecke, besonders zum Kochen und Heizen, verwenden könnten. Durch diesen Ueberschuss kann freilich *keineswegs aller* Bedarf an Brennmaterial ersetzt werden; aber es könnte doch eine sehr erhebliche Ersparnis darin erzielt werden. Man braucht nicht für eine „utopische" Sache „suggeriert" zu sein, um doch einzusehen, dass schon diese Ersparnis der Schweiz nützlich wäre. Und sollte nicht der Gedanke, dass die Alimentierung der Gaswerke mit den rein ausländischen Kohlen auch einmal „eine Utopie" werden könnte, gerade in der gegenwärtigen Zeit sich aufdrängen und das Suchen nach Ersatz als berechtigt erkennen lassen, sogar ohne alle Rücksicht auf Kosten?

Die Gaswerke haben ihre bedeutenden Verdienste, und niemand wird die durch sie gebrachten Errungenschaften negieren; es wird auch für die Schweiz anzuerkennen sein, dass, solange wir Brennmaterialien, besonders fremde, für Wärmezwecke brauchen — und das wird nach menschlichem Ermessen niemals aufhören — die Vornahme des „Veredelungsverfahrens", das aus Kohle Gas und Koks entstehen lässt, in schweizerischen Gasfabriken im Interesse des Landes liegt. So ist denn auch der Krieg „Gas contra Elektrizität", der z. B. in Deutschland z. T. in so hässlichen Formen auftrat, bei uns bisher wenig aufgetreten, vielleicht auch weil bei uns viele Gemeinden bestehen, die sowohl Elektrizitäts- wie Gaswerk besitzen oder daran interessiert sind. Die gegenseitige Achtung vor tüchtigen Leistungen von Kollegen der beiden Techniken wird, so hoffen wir, eine konziliante Art der Behandlung dieser Fragen auch weiterhin erhalten. Nicht verständlich ist uns der Satz von Dr. Ott, wonach das Bestreben, die Schweiz möglichst mit elektrischer (will sagen: Wasserkraft-) Energie zu versorgen, sogar *„direkt verwerflich"* sein soll, weil die „Erreichung des Endziels die Sicherheit der Versorgung unseres Landes mit Wärme und Licht in Frage stelle". Zugegeben, dass zwei auf ganz verschiedener Basis beruhende Ressourcen für dieselbe Sache grundsätzlich eine grössere Sicherheit ergeben, so ist doch nicht einzusehen, weshalb die Kohlenzufuhr aus dem Auslande sicherer sein sollte, als die im Lande liegenden Wasserkräfte. Sicher ist wohl, dass die Kohle mit Naturnotwendigkeit im ganzen fortwährend teurer werden muss, die Wasserkraft aber, zufolge Amortisation und Vervollkommnung der Werke, zwar nur langsam und nur bis zu einem gewissen Grade, aber doch unbedingt: billiger.

Wir müssen daher die Verwendung der noch brach liegenden Wasserkraftenergie auch zu Wärmezwecken als eine *nationale Aufgabe* betrachten, und der S. E. V. tut gut, dass er sie studiert und sich davon durch die unleugbar vorhandenen technischen Schwierigkeiten nicht abschrecken lässt. Uns scheint, es wäre gerade jetzt die Zeit, wo *alle interessierten Kreise* sich vereinigen sollten, um die Mittel zu *grosszügiger Lösung des Problems* zusammenzubringen und zu organisieren. Das gehört zu unserem vaterländischen Wirtschaftsprogramm. *Wyssling*."

Anwendung des Krümmungsradius zur Berechnung von numerischen Gleichungen.

Von *J. Fischer-Hinnen*, Oerlikon.

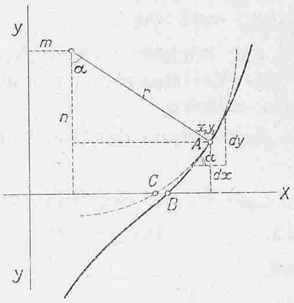
In Band LXIV, Seite 214 der „Schweiz. Bauzeitung" (14. Nov. 1914) habe ich gezeigt, wie man den Krümmungsradius zur Berechnung der Veränderlichkeit von Maxima- und Minimafunktionen benutzen kann. In Nachfolgendem möchte ich nun auf eine zweite interessante Verwendung des Krümmungsradius zur Lösung von numerischen Gleichungen aufmerksam machen, die gegenüber der bekannten *Newton*'schen *Methode* und *Regula falsi* den Vorteil besitzt, dass sie durchschnittlich etwas rascher zum Ziele führt.

Es sei die allgemeine Gleichung gegeben

$$y = f(x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

für die der Wert von x für $y = 0$ zu bestimmen sei. Die geometrische Aufzeichnung der Gleichung ergebe die in nebenstehender Abbildung dargestellte Kurve.

Angenommen, wir finden durch Probieren einen ersten Annäherungswert x_1, dem ein Wert $y = y_1$ entspricht, so können wir uns zunächst das Stück AB der Kurve durch einen Kreisbogen ersetzt denken, der durch den Punkt $x_1\,y_1$ geht. Dann liefert uns der Schnittpunkt C dieses Kreises mit der X Axe einen zweiten Näherungswert von x, der dem wirklichen Wert um so näher kommt, je kleiner das Fehlerglied y_1 wird.



Nun lautet bekanntlich die Gleichung eines Kreises mit den Mittelpunktskoordinaten m und n:

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

worin r den Radius des Kreises bedeutet.

Aus der Zeichnung folgt aber

$$m = x_1 - r \cdot \sin\alpha \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

$$n = y_1 + r \cdot \cos\alpha \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Führt man die Werte von m und n in Gleichung (2) ein, so wird

$$x^2 - 2x(x_1 - r\cdot\sin\alpha) + x_1{}^2 - 2x_1 r\cdot\sin\alpha + r^2\cdot\sin^2\alpha + {}$$
$$+ y_1{}^2 + 2y_1 r\cdot\cos\alpha + r^2\cdot\cos^2\alpha = r^2,$$

oder

$$\left.\begin{aligned} x^2 - 2x(x_1 - r\cdot\sin\alpha) + x_1{}^2 - 2x_1 r\cdot\sin\alpha &+ \\ + y_1{}^2 + 2y_1 r\cdot\cos\alpha &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad (5)$$

Diese Gleichung kann aber noch wesentlich vereinfacht werden.

Für den Krümmungsradius gilt nämlich die Beziehung

$$r = \frac{(1 + (y_1')^2)^{3/2}}{y_1''} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Anderseits folgt aus der Zeichnung

$$\sin\alpha = \frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \frac{y_1'}{\sqrt{1 + (y_1')^2}}$$

daher

$$r\cdot\sin\alpha = \frac{1 + (y_1')^2}{y_1''}\cdot y_1' \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (y_1')^2}},$$

oder

$$r\cdot\cos\alpha = \frac{1 + (y_1')^2}{y_1''} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Setzen wir ferner der Einfachheit halber

$$\frac{1 + (y_1')^2}{y_1''} = u \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

so geht die Gleichung (5) über in

$$x^2 - 2x(x_1 - uy_1') + x_1{}^2 - 2x_1 uy_1' + y_1{}^2 + 2y_1 u = 0$$

woraus man

$$x = x_1 - uy_1' + \sqrt{(uy_1')^2 - (y_1{}^2 + 2y_1 u)} \quad . \quad (10)$$

erhält. Aber auch diese Gleichung lässt sich noch bedeutend vereinfachen. Liegt nämlich ein Ausdruck von der Form

$$x = a - \sqrt{a^2 - b}$$

vor, worin b gegenüber a^2 sehr klein ist — dies trifft hier tatsächlich zu —, so können wir $b = \beta a^2$, somit

$$x = a\,(1 - \sqrt{1 - \beta}) \text{ setzen,}$$

woraus sich durch Entwicklung in eine Reihe bei Vernachlässigung der zweiten und höheren Potenzen von β

$$x \doteq a\left(1 - 1 + \frac{\beta}{2}\right) = \frac{a\beta}{2} = \frac{b}{2a} \text{ ergibt.}$$

Auf unsern Fall angewendet würden wir folglich als Lösung der Gleichung (10) erhalten:

$$x = x_1 - \frac{y_1{}^2 + 2y_1 u}{2y_1' u} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

wofür man auch schreiben kann

$$x = x_1 - \frac{y_1}{y_1'}\left(1 + \frac{y_1}{2u}\right) \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

In dieser Form erkennen wir in dem Quotienten $\frac{y'}{y_1'}$ sofort den schon von *Newton* angegebenen Ausdruck, während das Glied $\frac{y_1}{2u}$ in der Klammer einen *Korrekturfaktor* darstellt. Aus dem Vorhandensein dieses Faktors erklärt sich auch, warum diese Methode durchschnittlich bessere Resultate als die Newton'sche Regel ergibt, so dass man meistens schon mit *einer* Rechnung auskommt.

Legt man dagegen Wert auf höchste Genauigkeit, so genügt eine Wiederholung des Verfahrens, um jeden gewünschten Genauigkeitsgrad zu erzielen.

Einige Beispiele mögen die Anwendung der Gleichung (12) erläutern.

Beispiel 1. Man bestimme eine Wurzel der Gleichung

$$y = x^3 - 3x^2 + 4x - 10, \qquad \text{für } y = 0.$$

Durch Probieren finde man

$$\text{für } x_1 = 2;\ y_1 = -6;$$
$$\text{für } x_1 = 3;\ y_1 = +2.$$

Folglich liegt die Wurzel zwischen 2 und 3 und zwar näher an 3. Wir nehmen deshalb $x_1 = 2{,}7$, dann wird

$$y_1 = x_1^3 - 3x_1^2 + 4x_1 - 10 = -1{,}4$$
$$y_1' = 3x_1^2 - 6x_1 + 4 = +9{,}7$$
$$y_1'' = 6x_1 - 6 = +10{,}2$$
$$u = \frac{1 + (y_1')^2}{y_1''} = \frac{1 + 9{,}7^2}{10{,}2} = 9{,}3$$

somit

$$x = x_1 - \frac{y_1}{y_1'}\left(1 + \frac{y_1}{2u}\right) = 2{,}7 - \frac{-1{,}4}{9{,}7}\left(1 - \frac{1{,}4}{2 \cdot 9{,}3}\right) = \mathbf{2{,}8335}$$

Nach der Newton'schen Methode wäre $x = \mathbf{2{,}844}$
Nach der Regula falsi wäre $x = \mathbf{2{,}804}$
während der genaue Wert $x = \mathbf{2{,}833}$ ist.

Beispiel 2. Es sei

$$y = \varepsilon^x - \varepsilon^{-x} - 10{,}16\,x \qquad \text{für } y = 0 \text{ zu lösen.}$$

Für $x_1 = 3$ folgt $y_1 = -10{,}44$,
für $x_1 = 4$ folgt $y_1 = +13{,}84$.

Nimmt man im Mittel $x_1 = 3{,}5$ so sind

$$y_1 = \varepsilon^x - \varepsilon^{-x}\,10{,}16\,x = 33{,}12 - 0{,}03 - 35{,}56 = -2{,}47,$$
$$y_1' = \varepsilon^x + \varepsilon^{-x} - 10{,}16 = 33{,}12 + 0{,}03 - 10{,}16 = +22{,}99,$$
$$y_1'' = \varepsilon^x - \varepsilon^{-x} = 33{,}12 - 0{,}03 = +33{,}09,$$
$$u = \frac{1 + (y_1')^2}{y_1''} = \frac{1 + 22{,}99^2}{33{,}09} = 16{,}1, \text{ daher}$$
$$x = 3{,}5 - \frac{-2{,}47}{22{,}99}\left(1 - \frac{2{,}47}{2 \cdot 16{,}1}\right) = \mathbf{3{,}5911},$$

die Newton'sche Regel gibt $x = \mathbf{3{,}5107}$,
die Regula falsi $x = \mathbf{3{,}5756}$,
gegenüber dem genauen Wert $x = \mathbf{3{,}600}$.

Beispiel 3. Es sei die Gleichung

$$x^x = 100 \text{ zu lösen.}$$

Der Einfachheit halber nehmen wir auf beiden Seiten den Logarithmus und setzen

$$y = x \cdot \log x - 2.$$

Eine erste Ueberschlagsrechnung gibt

$$\text{für } x_1 = 3 :\ y_1 = -0{,}57$$
$$\text{für } x_1 = 4 :\ y_1 = +0{,}41.$$

Folglich liegt die Wurzel zwischen den Werten 3 und 4, wofür wir $x_1 = 3{,}5$ nehmen. Dann wird

$$y_1 = x \cdot \log x - 2 = 3{,}5 \cdot 0{,}5441 - 2 = -0{,}0958$$
$$y_1' = \log \varepsilon + \log x = 0{,}4343 + 0{,}5441 = +0{,}9784$$
$$y_1'' = \frac{0{,}4343}{x} = +0{,}1241$$
$$u = \frac{1 + (y_1')^2}{y_1''} = \frac{1 + 0{,}9784^2}{0{,}1241} = 15{,}7, \text{ somit}$$
$$x = 3{,}5 - \frac{-0{,}0958}{0{,}9784}\left(1 - \frac{0{,}0958}{2 \cdot 15{,}7}\right) = \mathbf{3{,}5976}$$

während die Newton'sche Regel $x = \mathbf{3{,}5979}$
und die Regula falsi $x = \mathbf{3{,}6524}$
gegenüber dem genauen Werte $x = \mathbf{3{,}59728}$ gibt.

Beispiel 4. Es sei $x - \cos x = 0$.

Da x stets positiv bleibt, während $\cos x$ im zweiten und dritten Quadranten das Vorzeichen wechselt, muss x entweder im ersten oder vierten Quadranten liegen.

Der einfachern Rechnung halber werden wir den Winkel in Graden ausdrücken. In dem Falle ist

$$\frac{\pi}{180}\,\alpha = 0{,}01745\,\alpha = x, \text{ somit}$$
$$y = 0{,}01745\,\alpha - \cos \alpha.$$

Durch Versuche finden wir

$$\text{für } \alpha_1 = 45^0, \quad \sin \alpha_1 = 0{,}7071, \quad y_1 = +0{,}0781.$$

Augenscheinlich ist der Winkel etwas zu gross. Wir versuchen daher $\alpha_1 = 40^0$, dann wird

$$y_1 = 0{,}01745 \cdot 40 - 0{,}7660 = -0{,}068,$$

folglich dürfte die Annahme $\alpha_1 = 42^0$ geltend sein. Hierfür wird

$$y_1 = 0{,}01745\,\alpha - \cos \alpha = 0{,}01745 \cdot 42 - 0{,}74314 = -0{,}0102,$$
$$y_1' = 0{,}01745 + \sin \alpha = 0{,}01745 + 0{,}66913 = +0{,}6866,$$
$$y_1'' = \cos \alpha = +0{,}74314,$$
$$u = \frac{1 + (y_1')^2}{y_1''} = \frac{1 + 0{,}687^2}{0{,}743} = 1{,}97$$
$$\alpha = 42 - \frac{-0{,}0102}{0{,}6866}\left(1 - \frac{0{,}0102}{2 \cdot 1{,}97}\right) = \mathbf{42{,}01485^0}$$

oder in Bogenmassen $x = 42{,}01485 \cdot 0{,}01745 = \mathbf{0{,}73316}$ gegenüber dem genauen Wert $x = \mathbf{0{,}73908}$. Da hier das Korrekturglied nur 0,26 % beträgt, sind die Abweichungen von der Newton'schen Regel nur geringfügig, dagegen würde man mit der Regula falsi $\alpha = \mathbf{43{,}396}^0$ oder $x = \mathbf{0{,}75726}$ erhalten. Der Fehler ist daher ziemlich beträchtlich.

Diese Beispiele dürften genügen, um die Brauchbarkeit dieser Methode nachzuweisen. Der Vorteil liegt hauptsächlich in ihrer etwas grössern Genauigkeit, wodurch man oft schon mit *einer* Annäherungsrechnung der Lösung so nahe kommt, dass man sich die Wiederholung des unter Umständen ziemlich zeitraubenden Verfahrens ersparen kann.

Schweiz. Landesausstellung in Bern 1914.

Nachtrag zum Verzeichnis der Auszeichnungen.

Der kürzlich erschienene „Zweite Anhang zum offiziellen Verzeichnis der vom Preisgericht erteilten Auszeichnungen" enthält die Rekurs-Entscheide, die nicht vor dem 31. Oktober 1914 endgültig erledigt werden konnten, sowie nachträgliche Ergänzungen und Aenderungen.

Soweit sich diese auf die von uns auf Seite 251 ff. von Band LXIV (Nr. 23 vom 5. Dezember 1914) aufgeführten Gruppen beziehen, geben wir sie hier im Anschluss an jene erste Veröffentlichung wieder. Ferner finden unsere Leser in diesem Nachtrag eine Aufstellung der mit einer Auszeichnung bedachten Aussteller der im letzten Band nicht erwähnten Gruppe 24: „Chemische Produkte", soweit sie chemisch-technische Produkte betreffen.

8. Gruppe: Bergbau, Mineralische Rohstoffe.

Goldene Medaille: Neuchâtel Asphalt Co. Ltd., E. & R. Zetter, Solothurn.

19. Gruppe: Baumaterialien, Steinbearbeitung.

Goldene Medaille: Carl Schmidt & Cie., Affoltern; Vertreter Meynadier & Cie., Zürich.

20. Gruppe: Hochbau, Einrichtungen der öffentlichen und Privatgebäude.

Goldene Medaille: Affolter, Christen & Cie., Basel. Baugeschäft Muesmatt, Alb. Schneider, Bern. J. Dünner, Aarau. Euböolithwerke A.-G., Olten. Fabrique suisse de Ciment Portland, St. Sulpice, mit Ch. Nuding, La Chaux-de-Fonds. J. G. Fluhrer, Zürich. Geilinger & Cie., Winterthur. Parqueterie Goldbach. Emil Schneebeli & Cie., Zürich, A. Schuppiser, Zürich.

21. Gruppe: Raumkunst, Möbel, sanitäre Anlagen.

Goldene Medaille: Fritz Berner, Zürich. W. Butterfass, Bern, und H. Holzheu & Cie., Zürich. Eisenmöbelfabrik Biglen. Eisenmöbelfabrik Pratteln. Embru-Werke A.-G., Zürich. G. Ernst, Meilen. Grambach & Müller, Zürich. J. Minnet, Montreux. Müller & Freytag, Architekten. Thalwil. C. & F. Ziegler, Schaffhausen.