Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Band: 65/66 (1915)
Heft: 23

Artikel: Der einstielige Rahmen mit und ohne Kragarm
Autor: Gsell, Robert
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-32244

Band 65. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und unter genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 23.**

Der einstielige Rahmen mit und ohne Kragarm.

Von Ing. *Robert Gsell*, Bern.

Nicht selten bedient man sich im Eisen- und Eisenbetonbau des einstieligen Rahmens mit oder ohne Kragarm, wie man ihn bei Perrondächern, Fabrikanbauten, Verladekranböcken oder bei Strassenverbreiterungen etwa längs der Stützmauern findet. Je nach den örtlichen Verhältnissen wird man entweder zu völliger Einspannung oder zur gelenkartigen Lagerung der Rahmenenden greifen, oder auch ein System in Anwendung bringen, bei dem beispielsweise das obere Ende eingespannt und das untere gelenkartig gelagert ist. Es sind nun in den letzten Jahren für dieses Rahmengebilde etliche Aufsätze über die Berechnung der statisch unbestimmten Grössen für verschiedene Belastungsfälle erschienen, jedoch, so weit sie mir bekannt, nur für den einstieligen Rahmen mit *horizontalem Riegel*.[1]) Bei einer geringen Neigung desselben (Dachkonstruktionen) kann nun auch die Berechnung ohne wesentliche Ungenauigkeit sinngemäss wie die eines Rahmens mit horizontalem Riegel durchgeführt werden, während sich jedoch bei einer grössern Neigung schon ganz erhebliche Abweichungen von den wirklichen Resultaten einstellen würden. Es sollen deshalb in Nachstehendem die Einflusslinien-gleichungen für die statisch unbestimmten Grössen des einstieligen Rahmens mit *schiefem Riegel* für drei verschiedene Auflagerungsarten gegeben werden.

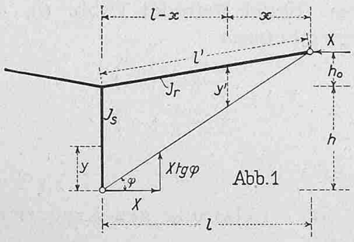


Abb. 1

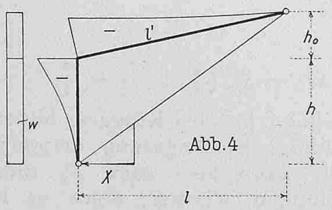


Abb. 4

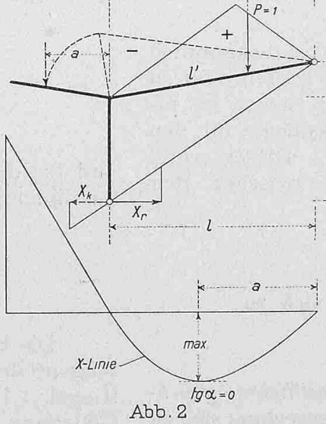


Abb. 2

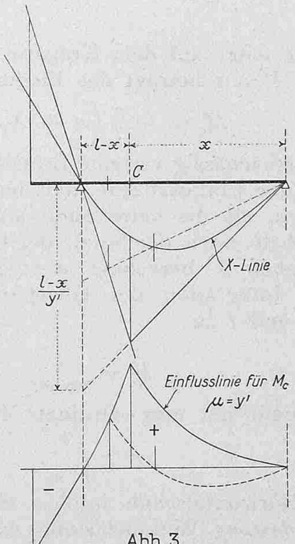


Abb. 3

A. Der beidseitig gelenkartig gelagerte Rahmen.

Zunächst sei an Hand der Arbeitsgleichung eine für die unbestimmte Grösse X allgemein gültige Bestimmungsgleichung für beliebige äussere Belastung auf Stiel, Riegel oder Kragarm aufgestellt, wobei nur die Biegungsmomente berücksichtigt werden sollen.

Nach Abb. 1 ist für den Stiel

$$M = M_o - X \cdot y\,; \qquad M_a = -y$$

und für den Riegel

$$M = M_o - X \cdot y'\,; \qquad M_a = -y'$$

M_o ergibt sich als Moment der äussern Kräfte und M_a als Biegungsmoment an beliebiger Stelle infolge $X = 1$. Das vom Kragarm, dessen Richtung belanglos ist, auf das Rahmensystem übertragene Biegungsmoment M_o, das meistens negativer Natur sein wird, erstreckt sich über den Riegel und wird demnach seinen Einfluss auf X geltend machen.

Unter Voraussetzung vollkommener Starrheit der Auflager folgt somit:

$$L' = \int_o^h \frac{-y}{E \cdot J}(M_o - Xy)\; ds + \int_o^{l'} \frac{-y'}{E \cdot J}(M_o - Xy')\; ds = 0$$

Wird $E \cdot J$ als konstant vorausgesetzt, so lautet nach Deutung der sich nur auf das System beziehenden Integrale mit Berücksichtigung des Verhältnisses von $\frac{Jr}{Js} = v$ die allgemeine Bestimmungsgleichung für X

$$L' = X\left(v \cdot \frac{h^3}{3} + \frac{l' h^2}{3}\right) - v \int_o^h M_o\, y\; ds - \int_o^{l'} M_o\, y' ds = 0.$$

Während das erste Integral für vertikale Belastung ausscheidet, führt das zweite bei Belastung des Riegels (Abb. 2) zu

$$\frac{a\, l'\, h}{6}\left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right)$$

und bei Belastung des Kragarmes zu

$$-\frac{a\, l'\, h}{3}$$

Hiermit erhält man dann die Einflusslinien-gleichungen für den Horizontalschub:

$$X_r = \frac{a\, l'\left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right)}{2\, h\,(vh + l')}$$

$$X_k = -\frac{2\, a\, l'}{2\, h\,(vh + l')}$$

Wie aus Gleichung X_k ersichtlich ist, stellt die Einflusslinie für den Kragarm bezüglich der Veränderlichen a eine gerade Linie dar, und zwar ergibt sie sich als tangentiale Verlängerung der X_r-Linie, was nachstehende Ableitung beweisen wird.

Der Zähler der Gleichung X_r abgeleitet nach a gibt

$$\frac{dZ}{da} = l' - \frac{3\, a^2\, l'}{l^2}$$

Für $a = l$ ist

$$\frac{dZ}{da} = \operatorname{tg} \alpha = -2\, l',$$

was mit dem Koeffizienten des Zählers der Gleichung X_k über einstimmt.

Mit Hilfe der Einflusslinie für den Horizontalschub X können nun in einfacher Weise Einflusslinien für die Biegungsmomente für beliebige Stellen des Riegels kon-

[1]) „Beton und Eisen", Jahrgang 1911, Heft 17. „Beton und Eisen", Jahrgang 1913, Heft 4. Kleinlogel, „Rahmenformeln" und anderes mehr.

struiert werden. So ist zum Beispiel bei Belastung des Riegels das Biegungsmoment im Punkt C

$$M_c = M_o - X_r \cdot y'$$

Dividiert man die ganze Gleichung durch y', so folgt:

$$\frac{M_c}{y'} = \frac{M_o}{y'} - X_r$$

daraus

$$M_c = y' \left(\frac{M_o}{y'} - X_r\right).$$

Das Auftragen der Einflusslinie für M_o des statisch bestimmten Hauptsystems — der einfache Balken — hat nun einfach mit $\frac{x}{y'}$ zu erfolgen, wonach dann beide Einflussflächen algebraisch addiert und mit y' multipliziert die gesuchte Einflussfläche für das Biegungsmoment in C darstellen (Abb. 3).

Es lauten also die Arbeitsgleichungen

$$L' = \int_o^h \frac{-y}{EJ} (M_o - X_1 y)\, ds +$$

$$\int_o^{l'} \frac{-(h+y)}{EJ} \Big[M_o - X_1 (h + y') + X_2 (l - x)\Big]\, ds = 0$$

$$L'' = 0 + \int_o^{l'} \frac{(l-x)}{EJ} \Big[M_o - X_1 (h + y') + X_2 (l - x)\Big]\, ds = 0$$

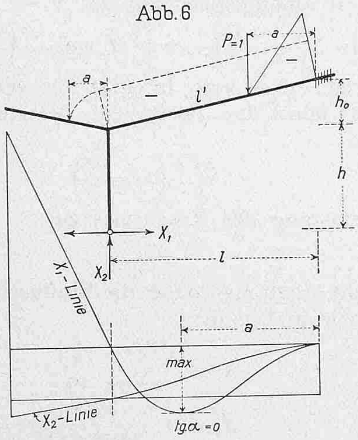
Ihre Auswertung führt mit denselben Bedingungen wie unter A zu den Bestimmungsgleichungen

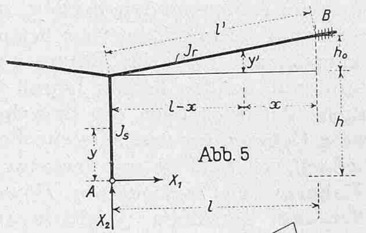
$$L' = X_1 \left(v \frac{h^3}{3} + l' h^2 + l' h_o h + \frac{l' h_o^2}{3}\right) -$$

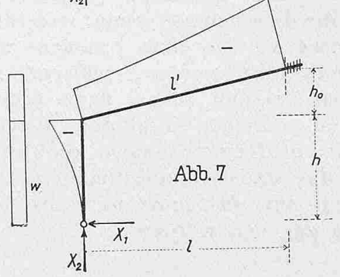
$$X_2 \left(\frac{l' h l}{2} + \frac{l' h_o l}{3}\right) - v \int_o^h M_o\, y\, ds - \int_o^{l'} M_o (h + y')\, ds = 0$$

$$L'' = - X_1 \left(\frac{l' h l}{2} + \frac{l' h_o l}{3}\right) + X_2 \left(\frac{l' l^2}{3}\right) + \int_o^{l'} M_o (l - x)\, ds = 0$$

Der einstielige Rahmen mit und ohne Kragarm.







Infolge einer auf dem Kragarm im Abstand a befindlichen Last $P = 1$ beträgt das Biegungsmoment in C

$$M_c = -\frac{x}{l}\left(a + X_k \cdot h\right)$$

Für gleichmässig verteilte Belastungen ist bekanntlich der Inhalt der Einflussfläche nur mit der Last pro m zu multiplizieren, um die betreffende statische Grösse zu erhalten, weshalb noch der Inhalt der Einflussfläche für den Horizontalschub X_r berechnet werden soll. Dieser ergibt sich durch Integration der Gleichung X_r zwischen den Grenzen 0 und l zu

$$F_r = \frac{\frac{l' l^2}{4}}{\text{Nenner}}$$

Die Stelle der max. Ordinate ergibt sich zu

$$a = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

Der Horizontalschub infolge einer *seitlichen gleichmässigen Belastung* (Windbelastung) Abb. 4 berechnet sich zu

$$X_w = -\frac{w\, l' \left(h^2 + \frac{3 v h^3}{4 l'} - \overline{\frac{h_o^2}{4}}\right)}{2 h\, (vh + l')}$$

Der Ausdruck unter der horizontalen Klammer stellt den Anteil für die auf den Riegel entfallende Windlast dar.

Durch Einsetzen von l für l' und $h_o = 0$ ergeben sich die Gleichungen für den Rahmen mit horizontalem Riegel.

B. Der oben eingespannte und unten gelenkartig gelagerte Rahmen.

Als unbestimmte Grössen seien die Reaktionen X_1 und X_2 beim Auflager A angenommen (Abb. 5). Die Biegungsmomente betragen dann für den Stiel

$$M = M_o - X_1 \cdot y$$

$$M_a = -y; \qquad M_b = 0$$

und für den Riegel

$$M = M_o - X_1 (h + y') + X_2 (l - x)$$

$$M_a = -(h + y'); \qquad M_b = (l - x)$$

Mit Deutung der Integrale für den Fall, dass die Last sich auf dem Riegel befindet (Abb. 6), erhält man die Einflussliniengleichungen

$$X_{1_r} = \frac{\frac{a^2 l'}{l}\left(1 - \frac{a}{l}\right)}{h\left(v \frac{4h}{3} + l'\right)}$$

$$X_{2_r} = X_{1_r}\left(\frac{3h}{2l} + \frac{h_o}{l}\right) + \frac{3a^2}{2l^2} - \frac{a^3}{2l^3}$$

und für den Fall einer Belastung des Kragarmes die Einflussliniengleichungen

$$X_{1k} = -\frac{a l'}{h\left(v \frac{4h}{3} + l'\right)}$$

$$X_{2k} = X_{1k}\left(\frac{3h}{2l} + \frac{h_o}{l}\right) + \frac{3a}{2l}$$

Die Einflusslinien für den Kragarm bilden wieder die tangentiale geradlinige Verlängerung derjenigen für den Riegel. Demnach kann also auch X_k direkt aus der Gleichung X_r gefunden werden, denn es ist mit tg α beim Stiel

$$X_k = \frac{a \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\text{Nenner}}$$

Der Inhalt der Einflussfläche für X_{1_r} ergibt sich zu

$$F_{1_r} = \frac{\frac{l' l^2}{12}}{h\left(v \frac{4h}{3} + l'\right)}$$

und der Abstand a für die max. Ordinate zu

$$a = \frac{2l}{3}$$

Ferner beträgt der Inhalt der Einflussfläche für X_{2_r}

$$F_{2_r} = \frac{\frac{l' h l}{8} + \frac{l' h_o l}{12}}{h\left(v \frac{4h}{3} + l'\right)} + \frac{3\,l}{8}$$

Die X_2-Linie stellt auch gleichzeitig die Einflusslinie für die Reaktion in B dar, wobei dann die Ordinaten von der unteren Horizontalen aus zu messen sind.

Für eine *seitliche gleichmässige Belastung* (Abb. 7) lauten die beiden Gleichungen für die statisch unbestimmten Grössen

$$X_{1w} = -\frac{w\,l\left(\frac{h^2}{2} + \frac{vh^3}{2l'} - \overline{\frac{h_0{}^2}{12}}\right)}{h\left(v\,\frac{4h}{3} + l'\right)}$$

und

$$X_{2w} = X_{1w}\left(\frac{3h}{2l} + \frac{h_o}{l}\right) + \frac{w}{8l}\left(6\,h^2 + 8\,hh_o + \overline{3\,h_o^2}\right)$$

Ersetzt man l' durch l, wobei $h_o = 0$ wird, so erhält man die Gleichungen für den Rahmen mit horizontalem Riegel.

$$Z = \frac{a\,l'}{vh + l'}$$

(für den Riegel $n = 1$ und für den Stiel $n = v$).

Die Nenner der Gleichungen für X und Y stellen die mit n multiplizierten Trägheitsmomente der Rahmenmittellinie inbezug auf die x- und y-Axe dar und berechnen sich getrennt für jeden Stab nach der Gleichung

$$T = \frac{n \cdot s}{3}\,(\eta_1{}^2 - \eta_1 \cdot \eta_2 + \eta_2{}^2)$$

wobei η_1 und η_2 jeweils die senkrechten Abstände der Stabenden auf die bezügliche Axe bedeuten (Abb. 10). Der Inhalt der Einflussflächen beträgt für den Teil des Riegels

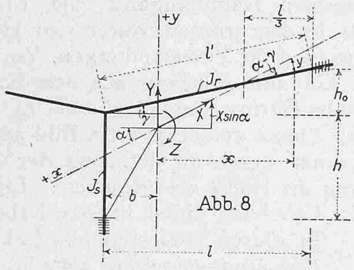


Abb. 8

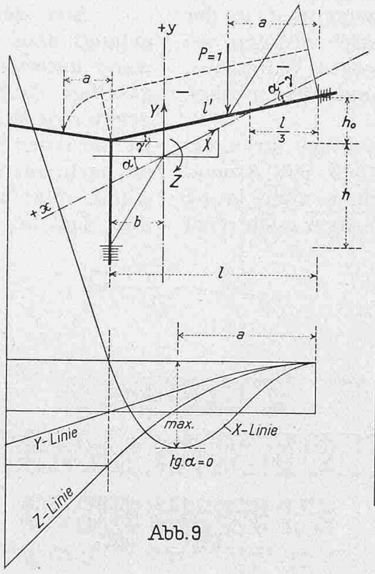


Abb. 9

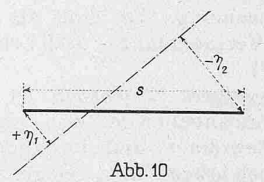


Abb. 10

C. Der beidseitig eingespannte Rahmen.

Verlegt man den Angriffspunkt der drei unbestimmten Grössen X, Y und Z in den Schwerpunkt des mit $\frac{1}{J}$ behafteten Stabzuges, was zu einer wesentlichen Vereinfachung der Ableitung führt, so erhält man die in diesem Falle auf ein schiefwinkliges Axenkreuz zu beziehenden Bestimmungsgleichungen (siehe „Berechnung von eingespannten Gewölben" von Prof. E. Mörsch in der „Schweiz. Bauzeitung", Band XLVII, Nr. 7 und 8 vom 17. und 24. April 1906[1]).

$$X = \frac{\int \frac{M_o\,y\,ds}{J}}{\int \frac{y^2\,ds}{J}}; \quad Y = \frac{\int \frac{M_o\,x\,ds}{J}}{\int \frac{x^2\,ds}{J}}; \quad Z = -\frac{\int \frac{M_o\,ds}{J}}{\int \frac{ds}{J}}$$

Die Trägheitsmomente des Stieles und Riegels sollen wieder als konstant angenommen und ihr Verhältnis $\frac{J_r}{J_s} = v$ berücksichtigt werden. In der Voraussetzung, dass das Zentrifugalmoment des Stabzuges für das x-y-Kreuz gleich Null ist, ergibt sich die erforderliche Richtung der x-Axe aus der Gleichung

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\int \frac{x\,y\,ds}{J}}{\int \frac{x^2\,ds}{J}}$$

und es geht dieselbe in diesem Falle durch den äusseren Drittelpunkt des Riegels (Abb. 8). Die Reaktion X ist nun in der Richtung der x-Axe wirkend anzunehmen.

Für eine Last $P = 1$ auf dem Riegel (Abb. 9) gehen dann die obigen Gleichungen über in

$$X_r = \frac{\left(\frac{l'}{l}\right)^2 \cdot \frac{a^2 l - a^3}{6} \cdot \sin(\alpha - \gamma)}{n \int y^2\,ds}$$

$$Y_r = \frac{\frac{l'}{l} \cdot \frac{a^2}{2}\left(l - b - \frac{a}{3}\right)}{n \int x^2\,ds}$$

$$Z_r = \frac{l'}{l} \cdot \frac{a^2}{2\,(vh + l)}$$

und für eine Last $P = 1$ auf dem Kragarm in

$$X_k = -\frac{\frac{a\,l'^2}{6} \cdot \sin(\alpha - \gamma)}{n \int y^2\,ds}$$

$$Y_k = \frac{a\,l\left(\frac{l}{2} - b\right)}{n \int x^2\,ds}$$

[1]) Auch als Sonderabdruck erschienen und zu beziehen bei der Red.

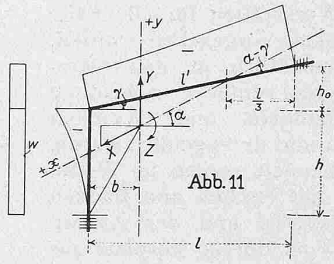


Abb. 11

$$F_{xr} = \frac{\frac{l'^2 \cdot l^2}{72} \cdot \sin(\alpha - \gamma)}{T_x}$$

$$F_{yr} = \frac{\frac{l'\,l^3}{8} - \frac{l'\,l^2\,b}{6}}{T_y}$$

$$F_{zr} = \frac{l'\,l^2}{6\,(vh + l')}$$

und der Abstand a der max. Ordinate für X

$$a = \frac{2\,l}{3}$$

Das wahre Biegungsmoment an beliebiger Stelle des Stabzuges kommt zum Ausdruck in

$$M = M_o - X \cdot y - Y \cdot x + Z$$

wobei die Vorzeichen von x und y genau zu beachten sind. Bei der Ermittlung von Einflusslinien für die Biegungsmomente wird man natürlich von den schon erhaltenen Ordinaten der Linien X, Y und Z Gebrauch machen. Die Inhaltsberechnung dieser Einflussflächen kann dann mit Hilfe der Simpson'schen Regel erfolgen.

Für eine *gleichmässige seitliche Belastung* lauten die drei Gleichungen der unbestimmten Grössen

$$X_w = -\frac{\frac{w\,h\,l'}{12}\left[\left(h\,l' - \overline{\frac{l'\,h_0{}^2}{6h}} + \frac{4\,v\,h^2}{3}\right)\sin(\alpha - \gamma) - \frac{v\,h^3}{2l'}\cos\alpha\right]}{T_x}$$

$$Y_w = \frac{\frac{w\,h\,l'}{2}\left[\frac{h\,l}{2} - h\,b - \frac{v\,b\,h^2}{3\,l'} + \frac{2\,l\,h_0}{3} - b\,h_o + \overline{\frac{l\,h_0{}^2}{4\,h} - \frac{b\,h_0{}^2}{3\,h}}\right]}{T_y}$$

$$Z_w = \frac{\frac{w\,h\,l'}{2}\left[h + h_o + \overline{\frac{h_0{}^2}{3\,h}} + \frac{v\,h^2}{3\,l'}\right]}{l' + v\,h}$$

Bei horizontalem Riegel ist wieder $l' = l$, $h_o = 0$ und $\gamma = 0$ zu setzen. Im übrigen sei noch für diesen Fall auf eine Abhandlung von Dr. Ing. Müller in „Beton und Eisen", Jahrgang 1911, Heft 17, hingewiesen, in welcher der einstielige eingespannte Rahmen mit horizontalem Riegel ohne Verlegung des Angriffspunktes der drei unbestimmten Grössen behandelt ist.