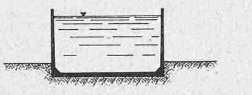
Band 67. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 11.**

Berechnung eines rechteckigen Eisenbeton-Reservoirs auf elastischer Unterlage.

Von *S. Kasarnowsky*. Dipl.-Ing. E. T. H , Zürich.

Ein rechteckiges Reservoir oder ein offener Kanal nach Abbildung 1, dessen Sohle den Baugrund auf der ganzen Grundrissfläche belastet, kann als ein Balken auf elastischer Unterlage betrachtet werden. Die Beanspruchung eines durch eine elastische Unterlage stetig unterstützten Stabes wurde zuerst von E. Winkler in seiner „Lehre von der Elastizität und Festigkeit" Prag 1867, untersucht. Später wurde diese Theorie von Zimmermann für die Berechnung des Eisenbahnoberbaues angewendet. Der Vollständigkeit halber soll hier die Differentialgleichung der elastischen Linie eines auf einer elastischen Unterlage liegenden Stabes abgeleitet werden.

Abb. 1



Reservoir oder Kanalquerschnitt

Denkt man sich aus dem Reservoir einen Streifen ausgeschnitten, und bezeichnet mit E den Young'schen Modul, J das Trägheitsmoment, y die Durchbiegung, M das Biegungsmoment und z die Belastung des Stabes pro Längeneinheit (in unserem Falle den Widerstand der Unterlage), so werden:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{M}{JE} \quad \text{und} \quad \frac{d^2 M}{d x^2} = z$$

Setzt man ein konstantes Trägheitsmoment voraus, so erhält man durch zweimaliges Differenzieren

$$\frac{d^4 y}{d x^4} = -\frac{d^2 M}{d x^2}\,\frac{1}{JE} = -\frac{z}{JE}$$

Nimmt man an, dass der Widerstand der Unterlage z proportional ist zur Einsenkung y des Stabes, so wird $z = E_o\, y$ (E_o = Bettungsziffer). Die Differentialgleichung unseres Problems lautet jetzt

$$\frac{d^4 y}{d x^4} = -\frac{E_o}{JE}\, y \qquad (1)$$

(Siehe: Winkler: Vorträge über Brückenbau; Zimmermann: die Berechnung des Eisenbahnoberbaues; Müller-Breslau: Graphische Statik, Bd. II, zweite Abt.; Föppl: Vorlesungen über technische Mechanik III). In der folgenden Untersuchung beschränken wir uns auf den praktisch wichtigsten Fall einer symmetrischen Belastung.

Setzt man $s = \sqrt[4]{4\,\frac{E}{E_o}\,J}$ und $\frac{x}{s} = \varphi$, so wird das allgemeine Integral der Gleichung 1

$$y = (A_1\, e^{\varphi} + A_2\, e^{-\varphi}) \cos\varphi + (B_1\, e^{\varphi} + B_2\, e^{-\varphi}) \sin\varphi \qquad (2)$$

Wählt man den Koordinatenursprung in der Stabmitte, so werden, weil der Balken AB symmetrisch beansprucht ist:

$$A_1 = A_2 = \frac{A}{2} \quad \text{und} \quad B_1 = -B_2 = \frac{B}{2}$$

Werden nun die Hyperbelfunktionen

$$\mathrm{Cos}\,\varphi = \frac{e^{+\varphi} + e^{-\varphi}}{2} \quad \text{und} \quad \mathrm{Sin}\,\varphi = \frac{e^{+\varphi} - e^{-\varphi}}{2}$$

eingeführt, so vereinfacht sich die Gleichung 2 auf

$$y = A\,\mathrm{Cos}\,\varphi \cos\varphi + B\,\mathrm{Sin}\,\varphi \sin\varphi \qquad (3)$$

Das Biegungsmoment des Balkens AB berechnet sich aus der Gleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{M}{JE}$$

Durch zweimaliges Differenzieren findet man

$$M = \frac{2\,JE}{s^2}\left[A\,\mathrm{Sin}\,\varphi \sin\varphi - B\,\mathrm{Cos}\,\varphi \cos\varphi\right] \qquad (4)$$

Wird berücksichtigt, dass die Querkraft $Q = -\frac{dM}{dx}$ ist, so erhält man durch nochmaliges Differenzieren der Gleichung 3

$$Q = -\frac{2\,JE}{s^3}\Big[A\,(\mathrm{Cos}\,\varphi \sin\varphi + \mathrm{Sin}\,\varphi \cos\varphi) + B\,(\mathrm{Cos}\,\varphi \sin\varphi - \mathrm{Sin}\,\varphi \cos\varphi)\Big] \qquad (5)$$

Die Integrationskonstanten A und B lassen sich wie folgt aus den Randbedingungen bestimmen: Das Moment in A ist $M_a = M_1 + H \cdot h + \frac{\gamma\, h^3}{6}$, wenn γ das spezifische Gewicht der Füllungsflüssigkeit bedeutet, die Querkraft in A: $Q_a = P$ (siehe Abbildung 2). Der Einfluss des vertikalen Flüssigkeitsdruckes und des Eigengewichts der Bodenplatte wird hier nicht berücksichtigt, weil eine gleichmässig verteilte Belastung des Baugrundes in der Reservoirsohle weder Momente, noch Querkräfte erzeugt.

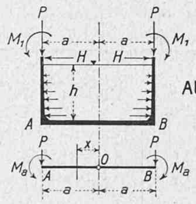


Abb. 2

Bezeichnet man mit λ das Verhältnis $\frac{a}{s}$ (a halbe Spannweite) so lauten die Randbedingungen:

$$M_a = +\frac{2\,JE}{s^2}\left[A\,\mathrm{Sin}\,\lambda \sin\lambda - B\,\mathrm{Cos}\,\lambda \cos\lambda\right]$$

$$Q_a = -\frac{2\,JE}{s^3}\Big[A\,(\mathrm{Cos}\,\lambda \sin\lambda + \mathrm{Sin}\,\lambda \cos\lambda) + B\,(\mathrm{Cos}\,\lambda \sin\lambda - \mathrm{Sin}\,\lambda \cos\lambda)\Big]$$

Mit $r = \frac{2\,JE}{s^2}$ ergibt sich die Nennerdeterminante:

$$\Delta_n = -\begin{vmatrix} \mathrm{Sin}\,\lambda \sin\lambda & -\mathrm{Cos}\,\lambda \cos\lambda \\ (\mathrm{Cos}\,\lambda \sin\lambda + \mathrm{Sin}\,\lambda \cos\lambda) & (\mathrm{Cos}\,\lambda \sin\lambda - \mathrm{Sin}\,\lambda \cos\lambda) \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\,(\mathrm{Sin}\,2\lambda + \sin 2\lambda)$$

$$\text{und} \quad A\,r\,\Delta_n = \begin{vmatrix} M_a & -\mathrm{Cos}\,\lambda \cos\lambda \\ s \cdot Q_a & -(\mathrm{Cos}\,\lambda \sin\lambda - \mathrm{Sin}\,\lambda \cos\lambda) \end{vmatrix} = -M_a\,(\mathrm{Cos}\,\lambda \sin\lambda - \mathrm{Sin}\,\lambda \cos\lambda) + s\,Q_a\,\mathrm{Cos}\,\lambda \cos\lambda$$

$$B\,r\,\Delta_n = \begin{vmatrix} \mathrm{Sin}\,\lambda \sin\lambda & M_a \\ -(\mathrm{Cos}\,\lambda \sin\lambda + \mathrm{Sin}\,\lambda \cos\lambda) & Q_a \cdot s \end{vmatrix} = M_a\,(\mathrm{Cos}\,\lambda \sin\lambda + \mathrm{Sin}\,\lambda \cos\lambda) + s\,Q_a\,\mathrm{Sin}\,\lambda \sin\lambda$$

Werden die beiden letzten Gleichungen mit $\frac{1}{\mathrm{Cos}\,\lambda \cos\lambda}$ multipliziert, und schreibt man $\varepsilon = \frac{2\,\mathrm{Cos}\,\lambda \cos\lambda}{\mathrm{Sin}\,2\lambda + \sin 2\lambda}$, so findet man für die gesuchten Integrationskonstanten:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{\varepsilon}{r}\left[M_a\,(\mathrm{tg}\,\lambda - \mathrm{Tg}\,\lambda) - s\,Q_a\right] \\ B &= -\frac{\varepsilon}{r}\left[M_a\,(\mathrm{tg}\,\lambda + \mathrm{Tg}\,\lambda) + s\,Q_a\,\mathrm{Tg}\,\lambda\,\mathrm{tg}\,\lambda\right] \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Diese Werte für A und B in die Gleichungen 3 und 4 eingesetzt ergeben:

$$y = \frac{\varepsilon}{r}\Big\{\Big[M_a\,(\mathrm{tg}\,\lambda - \mathrm{Tg}\,\lambda) - s\,Q_a\Big]\mathrm{Cos}\,\varphi \cos\varphi - \Big[M_a\,(\mathrm{tg}\,\lambda + \mathrm{Tg}\,\lambda) + s\,Q_a\,\mathrm{Tg}\,\lambda\,\mathrm{tg}\,\lambda\Big]\mathrm{Sin}\,\varphi \sin\varphi\Big\} \qquad (7)$$

und

$$M = \varepsilon\,\Big\{\Big[M_a\,(\mathrm{tg}\,\lambda - \mathrm{Tg}\,\lambda) - s\,Q_a\Big]\mathrm{Sin}\,\varphi \sin\varphi + \Big[M_a\,(\mathrm{tg}\,\lambda + \mathrm{Tg}\,\lambda) + s\,Q_a\,\mathrm{Tg}\,\lambda\,\mathrm{tg}\,\lambda\Big]\mathrm{Cos}\,\varphi \cos\varphi\Big\} \qquad (8)$$

Es empfiehlt sich, das Moment M in zwei Teile zu zerlegen $M = M' + M''$, worin M' das Moment im Punkte P infolge M_a und M'' das Moment im Punkte P infolge Q_a bedeuten. Man erhält dann aus Gleichung 8

$$M' = \varepsilon\,[(\mathrm{tg}\,\lambda - \mathrm{Tg}\,\lambda)\,\mathrm{Sin}\,\varphi \sin\varphi + (\mathrm{tg}\,\lambda + \mathrm{Tg}\,\lambda)\,\mathrm{Cos}\,\varphi \cos\varphi]\,M_a \qquad (9)$$

$$M'' = \varepsilon\,[\;-\mathrm{Sin}\,\varphi \sin\varphi + \mathrm{Tg}\,\lambda\,\mathrm{tg}\,\lambda\,\mathrm{Cos}\,\varphi \cos\varphi]\,s\,Q_a \qquad (10)$$

Aus den vorliegenden Formeln findet man das Moment M_0 in Balkenmitte, wenn $\varphi = 0$ gesetzt wird. Es folgen $\mathrm{Sin}\,0 = 0$; $\mathrm{Cos}\,0 = 1$; $\cos\varphi = 1$ und

$$M_0' = \varepsilon\,(\mathrm{tg}\,\lambda + \mathrm{Tg}\,\lambda)\,M_a \qquad (11)$$

$$M_0'' = \varepsilon\,\mathrm{tg}\,\lambda \cdot \mathrm{Tg}\,\lambda\; s \cdot Q_a \qquad (12)$$