Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Band: 67/68 (1916)

Heft: 19

Inhaltsverzeichnis

INHALT: Neuere Beobachtungen über die kritischen Umlaufzahlen von Wellen. — Ideen-Wettbewerb für einen Bebauungsplan der Gemeinde Bözingen. — Aargauische und schweizerische Eisenproduktion in Vergangenheit und Zukunft. — Der Montageunfall beim Bau der St. Lawrence-Brücke bei Quebec. — Reale Aufgaben. — Schweizerischer Elektrotechnischer Verein und Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke. — Miscellanea: Schweizer Muster-Messe in Basel. Eidgenössische Technische Hochschule. Die nationale Erziehung an der Mittelschule. Eine Petroleumrohrleitung von 65 *km* Länge. Hilfswerk der schweizer. Hochschulen. — Konkurrenzen: Neue Rheinbrücke in Eglisau. Orgelgehäuse für die St. Theodorskirche in Basel. — Literatur: Bericht über den Schutz elektrischer Anlagen gegen Ueberspannungen. Die Verwendung von Aluminium für Freileitungen. Graphischer statistischer Verkehrsatlas der Schweiz. Literarische Neuigkeiten. — Vereinsnachrichten: G. e. P.: Stellenvermittlung.

Band 68. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 19.**

Neuere Beobachtungen über die kritischen Umlaufzahlen von Wellen.

Von Prof. Dr. *A. Stodola*, Zürich.

(Schluss von Seite 199.)

Die Stabilität des Gleichgewichtes über der kritischen Geschwindigkeit.

Mit der Stabilität der gestörten Bewegung einer rotierenden Scheibe bei reibungsfreiem Medium hat es eine eigene Bewandtnis. Die äusserst subtile mathematische Untersuchung von *Behrens* [1]) schliesst gerade die der stationären Gleichgewichtslage benachbarten Gebiete aus. Die Methode der kleinen Schwingungen führt aber auf das eigentümliche Ergebnis, dass die stationäre Bewegung, bei der die Punkte $O\,S\,W$ (vergl. die Abbbildung 5 auf Seite 198 in letzter Nummer) in eine Gerade fallen, ein unstabiles, dynamisches Gleichgewicht darstellt. In der von mir gegebenen Entwicklung [2]) verschwindet nämlich, worauf mich Herr Prof. A. Föppl aufmerksam machte, die Konstante b'' im partikulären Integral $\varepsilon = b' + b''t$ nicht [3]), und so besteht eine Labilität *nicht bloss über, sondern ebenso unter der kritischen Geschwindigkeit.* Dieses der Anschauung vollkommen widersprechende Ergebnis veranlasst uns, auf den Fall näher einzugehen. Die Erörterungen des Herrn Dr. Ing. O. Föppl haben viel zur Veranschaulichung der Vorgänge beigetragen; in mathematischer Hinsicht gewinnt man volles Verständnis auf folgendem Wege:

Statt den Flächensatz auf die Bewegung des Schwerpunktes allein anzuwenden, betrachten wir vielmehr die Gesamtbewegung. Das Impulsmoment (der Drall) der Schwerpunktsbewegung um den Anfangspunkt ist in den benützten Berechnungen („Die Dampfturbinen“, Seite 627) $= m\,\varrho^2\,\varphi^{\cdot}$, jenes der Drehbewegung um den Schwerpunkt $= \Theta\,\psi^{\cdot}$; die Ableitung hievon nach der Zeit [4]) ist gleich dem äusseren Kraftmoment, das hier verschwindet, da die Kraft stets durch den Anfangspunkt geht. Daher ist

$$m\,\varrho^2\,\varphi^{\cdot} + \Theta\,\psi^{\cdot} = \text{konst.}$$

und bildet das erste Integral der Differentialgleichungen des Problemes. Setzen wir wieder $\varrho = \varrho_0 + z$; $\varphi = \omega t + \varepsilon$ und $\psi = \omega\,t + \vartheta$, wo $\vartheta = \tau + \varepsilon$, so können wir obige Gleichung nach $z\,\varepsilon\,\vartheta$ entwickeln, und finden:

$$m\,\varrho_0{}^2\,\omega_0 + \Theta\,\omega_0 + m\,(2\,\varrho_0\,\omega_0\,z + \varrho_0{}^2\,\varepsilon^{\cdot}) + \Theta\,\vartheta^{\cdot} = \text{konst.} \quad (1)$$

Das Impulsmoment der gestörten Bewegung kann nun dem Drall der stationären Bewegung gleich, oder davon verschieden sein. In letzterem Falle erhält man mit $\Theta = mq^2$

$$2\,\varrho_0\,\omega_0\,z + \varrho_0{}^2\,\varepsilon^{\cdot} + q^2\,\vartheta^{\cdot} = k_0 \quad . \quad . \quad . \quad (1a)$$

Im ersteren Falle ist $k_0 = 0$. Mit dieser Gleichung verbinden wir die erste und dritte des Systemes (9) in „Dampfturbinen“, Seite 628, unter Einführung der Bezeichnung $\varDelta = \omega_0{}^2 - \omega_k{}^2$, welche die Abkürzungen $\delta\omega_0{}^2 = \varDelta$; $(1 - \delta)\,\omega_0{}^2 = \omega_k{}^2$; $(1 - \delta)^2\,\omega_0{}^2 : \delta = \omega_k{}^4 : \varDelta$ erlaubt

$$z^{\cdot\cdot} - \varDelta\,z - 2\,\varrho_0\,\omega_0\,\varepsilon^{\cdot} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\Theta\,\vartheta^{\cdot\cdot} + \alpha\,e\,\varrho_0\,(\varepsilon - \vartheta) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Um die Konstante k_0 wegzubringen, müssen wir

$$z = z_0 + z_1\,; \quad \varepsilon = \varepsilon^{\cdot}{}_0 t + \varepsilon_1\,; \quad \vartheta = \varepsilon^{\cdot}{}_0 t + \vartheta_1 \quad (4)$$

setzen, wo $z_0\,\varepsilon^{\cdot}{}_0$ Konstante sind, über die wir so verfügen, dass beim Einsetzen in (1) und (2)

$$2\,\varrho_0\,\omega_0\,z_0 + (\varrho_0{}^2 + q^2)\,\varepsilon^{\cdot}{}_0 = k_0$$

$$-\varDelta\,z_0 - 2\,\varrho_0\,\omega_0\,\varepsilon^{\cdot}{}_0 = 0$$

sei. Darum ergibt sich abgekürzt:

$$z_0 = a_0\,k_0\,; \quad \varepsilon^{\cdot}{}_0 = b_0\,k_0$$

und es bleiben die auf Null reduzierten rechten Seiten der Gleichungen 1 bis 3 übrig, jedoch mit $z_1\,\varepsilon_1\,\vartheta_1$ als den Variablen. Die Integration erfolgt durch die gleichen Ansätze wie in „Dampfturbinen“, Seite 628, und führt auf eine charakteristische Gleichung bloss 5. Grades in λ. Dabei ist nur eine Wurzel $\lambda_1 = 0$, und so stellen sich die vollständigen Integrale nach (4) in folgender Form dar:

$$\left.\begin{aligned} z &= k_0\,a_0 + k_1\,a_1 + k_2\,a_2\,e^{\lambda_2 t} + k_3\,a_3\,e^{\lambda_3 t} + \ldots \\ \varepsilon &= k_0\,b_0 t + k_1\,b_1 + k_2\,b_2\,e^{\lambda_2 t} + \ldots \\ \vartheta &= k_0\,c_0 t + k_1\,c_1 + k_2\,c_2\,e^{\lambda_2 t} + \ldots \end{aligned}\right\}(5)$$

Hiemit sind $k_0\,k_1\,k_2 \ldots$ als die willkürlichen Konstanten gedacht, während $a_1\,b_1\,c_1$; $a_2\,b_2\,c_2$; ... die Unterdeterminanten der charakteristischen Determinante bedeuten. Man erkennt, dass *Instabilität unter allen Umständen vorhanden ist, falls der anfängliche Drall des Systemes vom Drall der stationären Bewegung abweicht*, und dies ist selbstverständlich, denn wir haben es mit einer Zentralbewegung zu tun, da die Wellenkraft stets nach dem Drehpunkt gerichtet ist. Auch *unter der kritischen* Geschwindigkeit wird der Körper *nicht* um die Gleichgewichtslage der ursprünglichen stationären Bewegung pendeln, sondern eine neue Gleichgewichtslage suchen, die dem veränderten Werte des Dralls entspricht. Diese Lage kann mittels Gleichung (1) gefunden werden, wenn man die Anfangswerte $z_0\,\varepsilon^{\cdot}{}_0\,\vartheta^{\cdot}{}_0$ einsetzt und für die rechte Seite $m\,\varrho_0'^2\,\omega_0' + \Theta\,\omega_0'$ schreibt, sodass mit $\varrho_0' = \omega_k{}^2\,e\,(\omega_0'^2 - \omega_k{}^2)$ die Gleichung nach ω' und ϱ_0' aufgelöst werden kann. Benützt man nun die neuen Variablen $\varrho = \varrho_0' + z'$; $\varphi = \omega_0' t + \varepsilon'$; $\psi = \omega_0' t + \vartheta'$, so transformieren sich (2) und (3) unverändert; in (3) aber verschwindet k_0 und damit die Instabilität der ersten Glieder in Gleichung (5). So behält die Mathematik ihr Recht, und die Anschauung sieht ihre Forderung erfüllt, dass es für den gestörten Körper eine gewisse Gleichgewichtslage geben muss, um die herum er pendeln kann. *Ueber der kritischen* Geschwindigkeit ist jedoch das Zustandekommen dieser Pendelung an die Bedingungen geknüpft, die in „Dampfturbinen“, Seite 628 entwickelt worden sind. Auch die hier in etwas veränderter Form aufgestellten Gleichungen führen für die Nachbarschaft der kritischen Umlaufzahl zu der gleichen Forderung wie „Dampfturbinen“, Seite 628, Gleichung (14)

$$\delta^3 > 4\,\frac{e^2}{q^2}$$

oder ausgeschrieben

$$q^2 > \frac{4\,e^2}{\left[1 - \frac{\omega_k{}^2}{\omega_0{}^2}\right]^3}$$

Das Trägheitsmoment muss also, damit Stabilität in dem nun definierten Sinne eintritt, umso grösser sein, je mehr wir uns der kritischen Geschwindigkeit nähern. Hinzugefügt werden kann, dass *unter der kritischen* Geschwindigkeit (δ negativ) die Stabilität von selbst erfüllt ist, bei noch so kleinem Trägheitsmoment, insbesondere selbst für eine punktförmige Masse.

Gehen wir zur Bewegung im widerstehenden Mittel über, so werden die Verhältnisse wegen der neu hinzutretenden, der Auslenkung proportionalen Dämpfungskraft, wesentlich verwickelter. Jedenfalls ist zu erwarten, dass die Schwingungen rasch abnehmen. Dies wurde durch einen, wenn auch primitiven Versuch bestätigt. Nachdem

---

1) Ein mechanisches Problem aus der Theorie der Laval-Turbine. Zeitschrift für Mathematik und Physik. Bd. 59. 1911. Seite 337.

2) «Die Dampfturbinen». IV. Auflage. Seite 628.

3) Der Grund für die Verwechslung liegt in dem eigentümlichen Umstande, dass von den a. a. O. zitierten partikulären Integralen nicht die Gruppen $z = a'$; $\varepsilon = b'$; $\tau = c'$ und $z = a''t$; $\varepsilon = b''t$; $\tau = c''t$ zusammengehören, sondern speziell $z = a'$; $\varepsilon = b''t$; $\tau = c'$ deren Einsetzung nur $c' = 0$ fordert. Man erkennt dies am leichtesten, wenn man $\varepsilon^{\cdot}$ als besondere Variable einführt, was für λ eine Gleichung bloss 5. Grades und nur eine einfache Wurzel $\lambda_0 = 0$ ergibt. Durch Integration der Gleichung $\varepsilon^{\cdot} = b''e^0 + b_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots$ folgt dann $\varepsilon = b' + b''t + b_1 e^{\lambda_1 t}/\lambda_1 + \ldots$ also Instabilität.

4) Diese Ableitungen werden hier mit einem Punkt bezeichnet, der leider aus typographischen Gründen *seitlich* oben angebracht werden musste.