Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 67/68 (1916)

Heft: 22

Artikel: Ueber die Bestimmung der Ortskurven in der graphischen Wechselstromtechnik

Autor: Bloch, Otto

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-33115

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Terrasse vorgesetzt werden muss, wie es der Verfasser empfiehlt. Diese Werkstatt ist nämlich um 75 m^2 zu klein. Die innern Kommunikationen sind für ein Schulhaus grossenteils zu knapp bemessen, was den geringen Kubikinhalt des Gebäudes begünstigt hat. Die Architektur wirkt nicht ansprechend, trotz der sorgfältigen Darstellung. Die Beleuchtung der Aula durch Glasflächen in dem runden Dach ist schwierig und nicht empfehlenswert. Die grossen Fenster in dem runden Ostbau wirken nicht günstig.

Nr. 12. *Neu isch neu.* Die Situation ist gut. Die Trennung der Kleinmechanikerschule und der Uhrenmacherschule ist mit Rücksicht auf den Lärm und die Erschütterung der Arbeitsmaschinen nicht genügend durchgeführt. Im Grundriss wirken die langen Gänge nicht günstig; zudem lässt die Beleuchtung derselben zu wünschen übrig. Das Werzkzeugzimmer ist zu weit von der Werkstatt entfernt. Die Architektur ist unbefriedigend.

Nr. 13. *Magglingen hell!* Die Situation ist gut. Für die Platzwirkung wäre eine Verkürzung des Ostflügels wünschenswert. Der Grundriss zeigt klare und gute Dispositionen. Die schöne Wandelhalle in Verbindung mit der gefälligen Hofanlage wirken malerisch und freundlich. Die Architektur fügt sich der nächsten Umgebung gut an.

No. 14, *Bäsetürli*, wird der Lösung 14a vorgezogen, weil in der Letztern die beiden Bauten einander zu sehr verdecken. Die Situation ist gut. Der Grundriss ist klar. Die Werkzeugzimmer sind ungünstig angelegt, sie sollten in unmittelbarer Nähe der Werkstätten sein. Die ganze Anlage sollte etwas mehr nach rückwärts geschoben werden, damit der Ostflügel nicht zu nahe an die Strasse zu stehen kommt. Die Aula ist etwas zu klein ausgefallen. Die Architektur ist schlicht und gefällig.

Nr. 17 und 17a. *Bäsetürli.* Die Situation ist gut. Der Grundriss ist klar. Durch die allzu reichlich bemessenen Gänge und Vorplätze wird namentlich in Nr. 17a ein sehr hoher Kubikinhalt erreicht. Die Architektur ist einfach und ansprechend. In der Westfassade würden die fünf Axen in einem und die sechs Axen im andern Geschoss nicht wohl ausführbar sein. So befriedigend die Lösungen an sich wären, so ist dem Programmpunkte betreffend Störungen durch die Arbeitsmaschinen nicht genügend Rechnung getragen. Die vorgeschlagenen konstruktiven Vorkehren zur Hebung dieses Nachteiles scheinen dem Preisgericht mehr als fraglich.

No. 18. *Römerquelle.* Die Situation ist gut. Die Anlage bietet einen günstigen Abschluss des Platzes. Es ist dies das einzige Projekt, das mit der ganzen Masse dem alten Gebäude direkt vorgelagert ist. Die Axe ist auf den Eingang zum alten Gebäude gerichtet, letzteres wird aber zum grössten Teil verdeckt. Im Grundriss ist die Halle als Durchgang zum alten Technikum günstig hervorzuheben. Im ganzen klare Disposition. Die Nord- und Südfassade sind einfach und gefällig, die übrigen eher monoton.

Das Preisgericht hat folgende Rangordnung der in der engern Wahl gebliebenen Projekte aufgestellt:

1. Nr. 13 „Magglingen hell!"; 2. Nr. 14 „Bäsetürli"; 3. Nr. 18 „Römerquelle"; 4. Nr. 17 „Bäsetürli"; 5. Nr. 7 „Uese Fahne"; 6. Nr. 1 „Anderegg! Sie sind so — geschossen!"; 7. Nr. 12 „Neu isch neu".

Es wurde beschlossen, drei Preise auszusetzen und zwar:

1. Preis 2800 Fr.; 2. Preis 1800 Fr.; 3. Preis 1400 Fr.

Als Verfasser erwiesen sich:

1. Preis:	Projekt Nr. 13 „Magglingen hell!"	*Gebr. Louis* in Bern.
2. Preis:	„ Nr. 14 „Bäsetürli"	*Saager & Frey* in Biel.
3. Preis:	„ Nr. 18 „Römerquelle"	*Moser & Schürch* in Biel.

Biel, 17. Oktober 1916.

Das Preisgericht:

Der Präsident: *Rud. v. Erlach*, Reg.-Rat. Der Sekretär: *K. v. Steiger*, Kantonsbaumeister.

Albert Gerster, F. Arni, E. Rybi, Sämann, Otto Pfister.

Anlässlich der Besichtigung der Ausstellung wurde der Redaktion von massgebender Seite gesagt, der Wettbewerb sei insofern resultatlos verlaufen, als keiner der prämiierten Entwürfe zur Ausführung geeignet sei. Da im Gutachten des Preisgerichts hierüber nichts gesagt ist, andererseits dieser Wettbewerb eine sehr schwierige und deshalb besonders interessante Aufgabe betraf, sei hier, auf Grund unserer eben erwähnten Besprechung, noch einiges ausgeführt, was von fachlichem Interesse sein dürfte. In bautechnischer Hinsicht erklärt die Technikumsdirektion es als Erfordernis, die Uhrenmacherschule und die Kleinmechanikerschule in gänzlich getrennten Gebäuden unterzubringen, weil die Räume der Uhrenmacherschule frei gehalten werden müssen von den in den mechanischen Werkstätten unvermeidlichen Erschütterungen durch Motoren, Transmissionen und Arbeitsmaschinen. Ferner sollte eine Lösung gefunden werden, die ein nur einmaliges Umziehen der Uhrenmacherschule bedingt, also die Errichtung des Neubaues ohne Berührung der jetzigen Schule. Der ersten dieser technischen Forderungen entspricht von den prämiierten Entwürfe Nr. 14 (Seite 252), allenfalls noch Nr. 18; die zweite Forderung ist bei keinem erfüllt.

Was die architektonische Seite betrifft, sollte der, eigentlich selbstverständlichen Programm-Forderung, dass störende Gegensätze zwischen dem alten Bau und den Neubauten zu vermeiden sind, entsprochen werden. Da eine Anlehnung an die Architektur des alten Baues kaum in Frage kommen kann, scheinen die nächstliegenden Lösungen auf dem Wege der Maskierung erreichbar, entweder kulissenartig, wie bei Entwurf Nr. 14, oder dann gerade gründlich, durch gänzliches Verdecken des alten Hauses, wie im Entwurf Nr. 18 versucht.

Man sieht, die Aufgabe war in technischer wie in künstlerischer Beziehung so schwierig, dass man es bedauern muss, dass im Programm der Kreis der Teilnahmeberechtigten gar so eng gezogen war. In solchen Fällen sollten, wie das Ergebnis bestätigt, bewährte Kräfte in grösserer Zahl konkurrenzfähig sein, auch wenn sie anderswo wohnen oder ausgebildet worden sind. Auch dies entspricht einer Erkenntnis der zunächst beteiligten Schulbehörde.

Ueber die Bestimmung der Ortskurven in der graphischen Wechselstromtechnik.

Dr. Ing. *Otto Bloch*, Bern.

(Schluss von Seite 241.)

II. Teil.

Wir betreten hier das Gebiet der *Kegelschnitte und der Kurven 3. Ordnung.* Von den letztern und den Kurven höherer Ordnung besitzt der Ingenieur im allgemeinen nur spärliche Kenntnisse. Im grossen Ganzen sind es kinematische Probleme, die ihn gelegentlich, aber selten zu diesen führen. Wer sich aber mit den Ortskurven unserer Wechselstrommaschinen bekannt zu machen wünscht, wird fürderhin diesem Gebiet nicht völlig fern bleiben können. Das erforderliche Studium ist übrigens ausserordentlich gering und für das Verständnis des Folgenden nicht einmal Voraussetzung. Da wir auch fernerhin in der Darlegung den *synthetischen Weg* verfolgen, werden wir ganz von selbst zu diesen Kurven geführt und lernen so auch ihren Charakter kennen. Für eine Reihe ihrer Eigenschaften müssen wir allerdings den Leser auf die Literatur verweisen.[1])

Die Kegelschnitte und die zirkularen Kurven 3. Ordnung.

1. Die Parabel.

Es ist ohne Schwierigkeit einzusehen, dass Ausdrücke von der Form:

$$V = A + Bv + Cv^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(IV)}$$

zu Parabeln führen. $A + Cv^2$ ist offenbar der positive Halbstrahl aus dem Punkt A in der Richtung des Vektors C. Auf diesem Halbstrahl ist die Skala für v nicht mehr linear, sondern quadratisch und die gleiche für positive wie für negative Werte von v. Zu diesen Vektoren ist nun noch der Vektor Bv zu addieren. Jedem Punkt des Strahles $A + Cv^2$ entsprechen zwei gleiche und entgegengesetzte additive Vektoren, nämlich $\pm Bv$. In Abbildung 5 ist diese

[1]) Ein handlicher und Jedem zugänglicher Führer in das neue Gebiet ist Band 436 der Sammlung Göschen, „*Eugen Beutel*, Algebraische Kurven", (Fr. 1,20), wo auch ein ausführlicheres Literaturverzeichnis zu finden ist.

Addition der Vektoren durchgeführt. *Es ist die bekannte Konstruktion der Parabel aus einem Durchmesser und den zu ihm konjugierten Sehnen.*

Die Gleichung (IV) kann verschiedene *Sonderfälle* aufweisen. Ist z. B. $\frac{B}{C}$ rein reell, so gibt es ausser dem Wert $v = 0$ einen Wert $v = v_0$, für den $Bv_0 + Cv_0^2 = 0$ wird. Es ist $B = -Cv_0$. Das führt auf den Ausdruck

$$V = A + C(v^2 - vv_0).$$

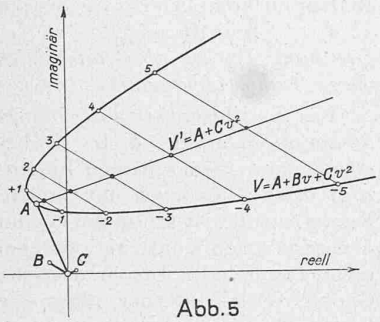

Abb. 5

Das ist ein Strahl von der Richtung des Vektors C durch den Punkt A. Die Skala der v-Werte ist quadratisch, aber nicht rein quadratisch wie bei dem Strahl $V = A + Cv^2$, sodass hier nun jedem Punkt des Strahles zwei *verschiedene* Zahlenwerte des Parameters v entsprechen und der Ausgangspunkt des Strahls nicht mehr in A liegt.

Wird ausserdem noch $A = 0$ oder $\frac{A}{C}$ rein reell, so geht der Strahl durch den Ursprung.

Ein Beispiel.

In einem bemerkenswerten Aufsatz[1]) über den *kompensierten Einphasen-Nebenschluss-Motor von Latour* hat *G. Martin* gefunden, dass der geometrische Ort des Netzstromes bei konstanter Spannung eine *Parabel* sei. Wir wollen hier untersuchen, ob unsere Methode zu demselben Resultate führt.

Für diese Untersuchung kommt uns zu statten, dass der erwähnte Motor von Latour nur einen Sonderfall des von uns in dem Aufsatz über die Berücksichtigung des Wicklungssinnes besprochenen Motors bildet. Dieser Sonderfall tritt ein, wenn dort die Ständer-y-Wicklung weggelassen wird.

Für *jenen* Fall haben wir gefunden[2])

$$U = j\omega N\left(1 - a\frac{F_y}{F_x}\right)F_x$$

und

$$\frac{F_y}{F_x} = \frac{(ea - vcd) + j(bd + ac^2)}{-(e + vac^2) - jdc},$$

worin $d \equiv (ab + c)$ gesetzt ist.

Wird nun die Zahl der Ständer-y-Windungen $Ny_1 = 0$, so ist in obigen Gleichungen $a = 0$ zu setzen. Für den *Latour-Motor* wird also:

$$U = j\omega N F_x \equiv L F_x \text{ und}$$

$$\frac{F_y}{F_x} = \frac{-vc^2 + jbc}{-e - jc^2} \equiv Mv + N$$

Die Bedeutung der komplexen Zahlen L, M, N, die wir der Kürze halber eingeführt haben, ergibt sich ohne Schwierigkeit durch Vergleichung der Koeffizienten. Man erkennt hier die wesentlichen Abweichungen von dem früher behandelten Fall. Dort war F_x abhängig von der Umlaufzahl, hier ist es *konstant*. Ferner bewegte sich dort F_y bei veränderlicher Umlaufzahl längs einem Kreis, hier längs einer *Geraden*.

Aus den Gleichungen (3) und (4) sowie (12) und (13) a. a. O.[3]) entnehmen wir ferner für $a = 0$ den Netzstrom I_{x1} als

$$I_{x1} = \left[\left(\frac{1}{nN} - c^2\frac{\omega N}{jR}\right) + \left(c^2\frac{\omega N}{R}v - \frac{b}{c}\frac{1}{nN}\right)\frac{F_y}{F_x}\right]F_x.$$

Die erste runde Klammer ist eine konstante komplexe Zahl, für die wir das Zeichen O setzen; die zweite Klammer setzen wir identisch gleich $Pv + Q$. Mit diesen Ausdrücken erhalten wir für den Ständerstrom die Gleichung

$$I_{x1} = \left[O + (Pv + Q)(Mv + N)\right]\frac{U}{L}.$$

[1]) *Lumière électrique*, Heft vom 8. März 1913.

[2]) Vergl. Seite 240, bezw. 118 dieses Bandes.

[3]) Vergl. Seite 117 dieses Bandes.

Durch Auswerten und Ordnen nach Potenzen von v erhält man daraus die Form:

$$I_{x1} = A + Bv + Cv^2.$$

Das ist die Gleichung einer Parabel. *Das Ergebnis unserer Methode ist also tatsächlich in Uebereinstimmung mit den Resultaten von Martin.* Es macht keinerlei Schwierigkeiten, mit den gegebenen Kanstanten die Parabel aufzuzeichnen.

2. Die zirkularen Kubiken.[1])

Gehen wir nun zur Untersuchung von Ausdrücken über, die in die Form

$$V = \frac{A + Bv + Cv^2}{D + Ev} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (V)$$

gebracht werden können.

Wir können die Division teilweise durchführen und erhalten

$$V = \frac{\left(B - \frac{C}{E}D\right)}{E} + \frac{C}{E}v + \left[A - \frac{\left(B - \frac{C}{E}D\right)}{E}D\right]\frac{1}{D + Ev} \quad . \quad (V')$$

Diese Ausdrücke sind wiederum überaus leicht zu interpretieren. Das erste Glied von (V') bedeutet einen *konstanten Vektor*. Das zweite Glied ist offenbar eine *Gerade durch den Ursprung* und das dritte Glied stellt einen *Kreis durch den Ursprung* dar.

Damit ist auch schon die geometrische Konstruktion angegeben, durch die wir zu unserer Kurve gelangen. Durch Setzen einfacher Symbole für die komplizierten Ausdrücke der Gleichung (V') nimmt diese die Form an

$$V = T + Sv + \frac{R}{D + Ev}$$

Wie aus den Konstanten des Problems der durch den Ursprung gehende Kreis $\frac{R}{D + Ev}$ zu konstruieren ist, haben wir im I. Teil dieser Arbeit gelernt. Durch denselben Ursprung ist nun noch eine zum Kreis beliebig gerichtete Gerade Sv zu ziehen mit gleichförmiger Skala der v-Werte und mit dem Nullpunkt im Ursprung. Zu jedem Vektor an den Kreisumfang ist die dem betreffenden Wert von v entsprechende Strecke der Geraden Sv zu addieren. Da der Kreis im Ursprung den Wert $v = \pm\infty$ hat, so ist in diesem Punkt nach jeder Seite der unendlich lange Halbstrahl der Geraden zu addieren, um vom Kreis zu dem Kurvenpunkt zu gelangen. Es leuchtet also ohne weiteres ein, dass die Gerade zur *Asymptote* der Kurve wird. Zu der so gefundenen Kurve ist dann noch der konstante Vektor I zu addieren, was auf eine Parallelverschiebung der Kurve hinausläuft. Wir ziehen es selbstverständlich wieder vor, nachträglich den Ursprung des Koordinatensystems um den negativen Wert dieses konstanten Vektors relativ zur Kurve zu verschieben.

Da alle zu den Vektoren an den Kreis zu addierenden Strecken einander parallel sind, so gestaltet sich die Konstruktion überaus einfach. Wir haben sie in Abb. 6 durchgeführt und zwar gleich für drei verschiedene Werte des Moduls von S, um dadurch die verschiedenen Erscheinungsformen der Kurve zu veranschaulichen. Die Kurven I, II, III entsprechen Modulwerten von S, die sich verhalten wie 1 : 2 : 3.

Die so gefundenen Kurven zeigen eine auffällige Aehnlichkeit mit den sog. *zirkularen Kubiken*. Da für diese aber die hier angegebene Konstruktion in der Literatur nicht bekannt zu sein scheint, *so ist erst noch zu untersuchen, ob es sich hier wirklich um solche Kurven handelt.* Wir übersetzen zu diesem Zweck die geschilderte Konstruktion in die *analytisch-geometrische* Schreibweise. Da durch die Translation der Kurve ihr Charakter nicht geändert wird, dürfen wir den Ursprung im Schnitt des Kreises mit der Geraden belassen.

[1]) Man bezeichnet der Kürze halber häufig Kurven 3., 4., 5., 6. Ordnung usw. als Kubik, Quartik, Quintik, Sextik usw. Wir schliessen uns hier diesem Sprachgebrauche an. Gerne würden wir in konsequenter Weise auch von *Primik* (Gerade) und *Sekundik* (Kurve 2. Ordnung) sprechen.

Zirkulare Kurven nennt man diejenigen, die durch die unendlich fernen imaginären Kreispunkte gehen. (Vergl. hierüber die bei *Beutel* a. a. O. angegebene Literatur). Im besondern ist der Kreis die zirkulare Sekundik, während die Kegelschnitte die nicht zirkularen Sekundiken sind.

In Abbildung 7 ist ein Kreis durch den Ursprung O gelegt, dessen Durchmesser OMQ mit der x-Axe den konstanten Winkel β einschliesst. Der Radius-Vektor nach dem auf dem Kreis wandernden Punkte K ist, wenn mit q der Durchmesser OQ bezeichnet wird und mit α der Winkel $\sphericalangle QOK$

$$OK = q \cos \alpha.$$

Zu OK ist nun eine Strecke KP zu addieren, die parallel zu der festen Geraden durch den Ursprung ist und die den konstanten Winkel γ mit der x-Axe einschliessen möge. *Die Länge dieser Strecke KP ist proportional dem Werte v,* der dem Punkt K auf dem Kreis entspricht.

Es sei RS die Gerade, zu welcher der Kreis inbezug auf den Ursprung invers ist. Es ist also notwendig $OMR \perp RS$. Ferner entspreche dem Punkt R in der Wertreihe der v auf der Geraden der Wert v_R und dem Punkt S der Wert v_S. Wandert nun K auf dem Kreis und somit auch der Schnittpunkt S des Strahles OK mit der Geraden RS, so bleibt doch stets

$$v_S - v_R = p \operatorname{tg} \alpha,$$

worin p irgend einen reellen Proportionalitätsfaktor bedeutet. Also ist $v_S = v_R + p \operatorname{tg} \alpha$. Da der Wert v_S eben der Wert ist, der dem Punkt K des Kreises entspricht, so ist also, wenn l wieder einen beliebigen Proportionalitätsfaktor bedeutet, $KP = l\,(v_R + p \operatorname{tg} \alpha)$. Setzen wir $l v_R \equiv m$ und $lp \equiv n$, so wird

$$KP = m + n \operatorname{tg} \alpha.$$

Nun sind wir in der Lage, die x- und y-Koordinaten des Ortes aller Punkte P durch den Parameter α auszudrücken. Es ist:

$$\left.\begin{aligned} x &= q \cos \alpha \cos (\alpha + \beta) + (m + n \operatorname{tg} \alpha) \cos \gamma \\ y &= q \cos \alpha \sin (\alpha + \beta) + (m + n \operatorname{tg} \alpha) \sin \gamma \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Durch Anwendung der bekannten goniometrischen Umrechnungsformeln erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cos^2 \alpha - b \sin \alpha \cos \alpha + c \operatorname{tg} \alpha + e \\ y &= a \sin \alpha \cos \alpha + b \cos^2 \alpha + d \operatorname{tg} \alpha + f \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

worin für die Konstanten folgende Definitionen gelten:

$$\begin{array}{lll} a \equiv q \cos \beta & c \equiv n \cos \gamma & e \equiv m \cos \gamma \\ b \equiv q \sin \beta & d \equiv n \sin \gamma & f \equiv m \sin \gamma \end{array}$$

Aus den Gleichungen (2) berechnen wir nun die Grössen $(y - x \operatorname{tg} \alpha)$ und $(x + y \operatorname{tg} \alpha)$, wodurch wir ausser $\operatorname{tg} \alpha$ alle andern Funktionen von α eliminieren. Ordnen wir die erhaltenen beiden Gleichungen nach Potenzen von $\operatorname{tg} \alpha$, so werden sie zu

$$\left.\begin{aligned} c \operatorname{tg}^2 \alpha + (e - d - x) \operatorname{tg} \alpha + (y - f - b) &= 0 \\ d \operatorname{tg}^2 \alpha + (c + f - y) \operatorname{tg} \alpha + (a + e - x) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

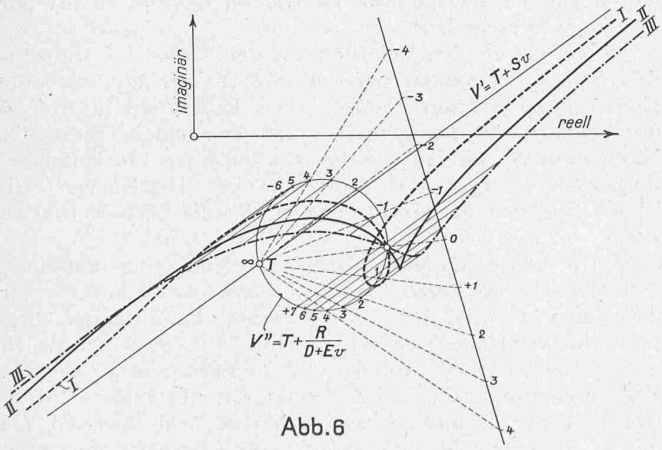

Abb. 6

Setzt man nun noch für die Koeffizienten dieser Gleichungen einfache Buchstaben, nämlich:

$$\begin{array}{lll} A \equiv c & B \equiv (e - d - x) & C \equiv (y - f - b) \\ D \equiv d & E \equiv (c + f - y) & F \equiv (a + e - x), \end{array}$$

so erhält man durch Elimination von $\operatorname{tg} \alpha$ aus ihnen die Gleichung der gesuchten Kurve in der Form

$$(AE - BD)(BF - CE) + 2ACDF - (AF)^2 - (CD)^2 = 0 \quad (4)$$

Man sieht sofort, dass der Wert der ersten Klammer in x und y linear, dagegen der der zweiten Klammer in x und y quadratisch ist, ohne dass jedoch Glieder mit xy auftreten. Das Produkt der beiden Klammern liefert also die Glieder 3. Grades in x und y, während, wie man leicht erkennt, die übrigen Glieder der Gleichung (4) nur noch quadratische, lineare und konstante Glieder ergeben. Die Ausrechnung ergibt die folgende Form:

$$(dx - cy)(x^2 + y^2) + \Gamma x^2 + 2\Delta xy + \Theta y^2 + \Lambda x + \Pi y + \Sigma = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

worin die griechischen Initialen für komplizierte Ausdrücke in den Konstanten a, b, c, d, e, f gesetzt sind.

Die hier gefundene Gleichung (5) ist aber tatsächlich mit derjenigen einer zirkularen Kubik identisch.[1])

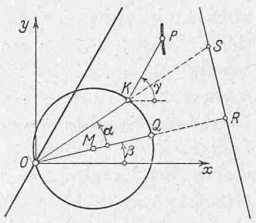

Abb. 7

Kurven dieser Art sind immer *unikursale* Kurven, d. h. sie bestehen aus einem einzigen Linienzug. Dass dies auch für unsere Kurve zutrifft, ist schon auf Grund der gegebenen Konstruktionsregel nicht zweifelhaft. Die analytische Geometrie lehrt ferner, dass die Kurve eine Asymptote hat, deren Richtung durch $(dx - cy) = 0$ gegeben ist. Nun ist $\frac{y}{x} = \frac{d}{c} = \operatorname{tg} \gamma$ tatsächlich die Gleichung der Geraden durch den Ursprung, die wir schon als Asymptote erkannt haben und zu der die Strecken KP alle parallel sind. Wir können also den Satz aussprechen:

Ausdrücke von der allgemeinen Form

$$\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}v + \boldsymbol{C}v^2}{\boldsymbol{D} + \boldsymbol{E}v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (V)$$

sind die Gleichungen von zirkularen Kurven 3. Ordnung.

Es können nun auch hier wieder *Sonderfälle* auftreten. Ein erster solcher ist der, dass der Ausdruck $\left(\boldsymbol{B} - \frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{E}} \boldsymbol{D}\right)$ in Gleichung (V') zu Null wird. In diesem Fall fällt das konstante Glied der Gleichung fort. Die Asymptote unserer Kubik geht durch den Ursprung.

Ein *zweiter Sonderfall* entsteht in folgender Weise. Der Zähler der Gleichung (V) stellt einen Linienzug aus drei Strecken dar, der für veränderliche Werte von v ständig über der konstanten Basis $\boldsymbol{A}$ seine Form ändert, die sich aber immer *winkelgleich* bleibt. Es kann nun unter Umständen für *einen* bestimmten Wert v_0 von v der Sonderfall eintreten, *dass sich der Streckenzug zu einem Dreieck schliesst.* Dann wird der Zähler und somit $\boldsymbol{V}$ selbst für diesen Wert zu Null. *Unsere Kurve geht dann durch den Ursprung.*

Ein *dritter Sonderfall* tritt ein, wenn *die komplexen Konstanten $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ sämtliche das gleiche Argument* und somit in der Zahlenebene die gleiche Richtung haben. Aus Gleichung (V') erkennen wir, dass durch diese Bedingung die Kurve *nicht degenerieren* kann, weil sie uns immer noch die Summe aus einem beliebigen Kreis und einer beliebigen Geraden darstellt.

Es sei ε das gemeinsame Argument. Dann ist $\boldsymbol{A} = A e^{j\varepsilon}$, $\boldsymbol{B} = B e^{j\varepsilon}$, $\boldsymbol{C} = C e^{j\varepsilon}$ und der Zähler wird $(A + Bv + Cv^2)\, e^{j\varepsilon}$. *Der Klammerwert kann nun zu Null werden.* Er wird dies im Allgemeinen für zwei Werte von v, die beiden Wurzelwerte der quadratischen Gleichung

$$A + Bv + Cv^2 = 0.$$

Diese sind

$$v_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Ist die Diskriminante $(B^2 - 4AC) \gtreqless 0$, so werden die

$$\text{Wurzeln } v_{1,2} \begin{cases} \text{reell} \\ \text{gleich} \\ \text{konjugiert komplex.} \end{cases}$$

Im *ersten Unterfall* wird für zwei reelle Werte von v der Wert unseres Vektors zu Null. *Die Kurve hat also einen reellen Doppelpunkt im Ursprung.* Wir haben schon in Abb. 6 gesehen, dass die Kurve einen *Selbstschnitt*

[1]) Vergl. *E. Beutel*, a. a. O. S. 74.

haben kann. Hier fällt dieser Selbstschnitt mit dem Ursprung des Koordinatensystems zusammen.

Im *zweiten Unterfall* sind die beiden Wurzelwerte unter sich identisch, entsprechen aber immer noch einem Doppelpunkt. *Der Selbstschnitt der Kurve ist zum Umkehrpunkt geworden und dieser fällt in den Ursprung.*

Im *dritten Unterfall* sind die beiden Wurzelwerte konjugiert komplex. Die Kurve unseres Vektors V entspricht aber gemäss Voraussetzung nur reellen Werten von v, *sie geht also nicht durch den Ursprung.* Aber dieser ist doch ein besonderer Punkt inbezug auf die Kurve. Er ist wie der Selbstschnitt oder der Umkehrpunkt ein *singulärer Punkt der Kurve*; *er ist ein isolierter Doppelpunkt derselben.* Wir werden seine Bedeutung bald kennen lernen.

Hier können wir den allgemeinen und wichtigen Satz aussprechen:

Haben die komplexen Koeffizienten des Zählers der Gleichung (V) dasselbe Argument, so liegt der singuläre Punkt der zirkularen Kubik im Ursprung.

Einem *Beispiel* für eine zirkulare Kubik sind wir bereits am Schlusse des I. Teiles dieser Arbeit begegnet. Wir fanden eine solche als Ort des Netzstromes des dort behandelten Einphasen-Motors.[1]) Auch in der Literatur findet man solche Kurven. So z. B. stösst *Dyhr*[2]) bei der Untersuchung des *Induktions-Reihenschluss-Motors mit Läufererregung* auf eine sogenannte *gerade Strophoïde,* das ist diejenige *symmetrische* zirkulare Kubik, die sich im Doppelpunkt *rechtwinklig* schneidet.

3. *Die Kegelschnitte im Allgemeinen.*

Die allgemeine Gleichung der zirkularen Kubik lässt noch weitere Sonderfälle zu. Ein *vierter Sonderfall* tritt ein, wenn die komplexen *Koeffizienten des Nenners gleiches Argument* besitzen, ohne dass jene des Zählers eine Besonderheit aufweisen. Die Gleichung (V') sagt uns, was dann eintritt. Wir wissen von früher (S. 255), dass in diesem Fall der durch das letzte Glied der Gleichung dargestellte Kreis zu einer Geraden durch den Ursprung *degeneriert,* wobei in den letztern der Punkt mit $v = \pm\infty$ zu liegen kommt, während ein Punkt mit $v = v_0$ ins Unendliche rückt. Die übrigen Ausdrücke der Gleichung (V') degenerieren nicht; sie stellen nach wie vor einen festen Punkt und eine Gerade durch den Ursprung mit linearer Wertreihe der v dar. Wir haben nun also den Radius-Vektor unserer Kurve aus den Radien-Vektoren an eine Gerade mit linearer Skala und aus denen an eine solche mit reziproker Skala zusammenzufügen und schliesslich wieder den Ursprung des Systems um den negativen Wert des konstanten Gliedes zu verschieben.

In Abbildung 8 ist diese Konstruktion durchgeführt. Da auf der zweiten Geraden der Punkt für v_0 unendlich fern liegt, so legt man mit Vorteil den Punkt für $v = \infty$ dieser Geraden in den Punkt für v_0 der ersten Geraden. Man kann dann durch einfache Parallelogramme aus entsprechenden Vektoren die gesuchte Kurve konstruieren.

Man erkennt aus der Abbildung 8 die bekannte Konstruktion der *Hyperbel* im schiefwinkligen Axenkreuz. Besonders einfach wird der Fall dann, wenn $D = 0$. Dann fällt der Punkt mit $v = 0$ ins Unendliche. Die Anschauung wird dadurch vereinfacht.

[1]) Vergleiche Seiten 240/241 in letzter Nummer.

[2]) *E. Dyhr*, Die Einphasen-Motoren, Seite 44. Die dort gezeichnete Kurve ist nur die eine Hälfte der geraden Strophoïde, die der Verfasser übrigens nicht als solche erkannt hat. Die dort durchgeführte einfache Konstruktion der Kurve dürfte bisher unbekannt sein. Es ist dies einer der häufigen Fälle, wo unser Anwendungsgebiet zu *neuen geometrischen Konstruktionen* führt. Wir sind schon auf eine bisher unbekannte Konstruktion der allgemeinen zirkularen Kubik gestossen. Wir werden auch im weitern Verlauf der Darlegung noch Beispiele antreffen.

Wendet man unsere Methode auf das Beispiel von *Dyhr* an, so findet man nach einer kurzen Rechnung als allgemeinste Form der *Gleichung der geraden Strophoïde:*

$$V = \frac{A + j(A + C)v + Cv^2}{1 + jv}$$

Dies ist in der Tat nur eine besondere Form unserer allgemeinen Gleichung der zirkularen Kubik. (Vergl. über diese Kurven: *H. Wieleitner:* Spezielle ebene Kurven. Sammlung Schubert, Bd. LVI.)

Ein *fünfter Sonderfall* tritt dann ein, wenn sowohl die Koeffizienten des Zählers wie auch die des Nenners je unter sich gleiches Argument besitzen. Da sich die Gleichung in diesem Fall auf die Form $V = e^{j\varepsilon} \cdot F(v)$ bringen lässt, wobei $F(v)$ die reelle Funktion von v bedeutet, so fallen die beiden Geraden in eine einzige durch den Ursprung zusammen. Wir haben die *Gleichung einer Doppelgeraden,* entsprechend der Gleichung eines Doppelstrahls, die wir bei der Parabel kennen gelernt haben.

Wir sind bisher der *Parabel* und *Hyperbel* begegnet. Wir können aber auch noch auf andere Art zu den *Kegelschnitten im Allgemeinen* gelangen. Der vorhergehende Abschnitt hat uns zur Gleichung der zirkularen Kubiken geführt, deren Doppelpunkt im Ursprung liegt. Nun ist aber der Umstand bekannt,[1]) *dass durch Inversion eines Kegelschnittes inbezug auf einen Punkt seiner Peripherie als Inversionszentrum eine zirkulare Kurve dritter Ordnung entsteht, deren Singulärpunkt in das Inversionszentrum fällt.*

Aber auch die Umkehrung dieses Satzes gilt allgemein: *Die Inverse zu einer zirkularen Kubik inbezug auf ihren Doppelpunkt ist ein Kegelschnitt durch das Inversionszentrum.*

Im besondern ist dieser Kegelschnitt
eine *Hyperbel,* wenn der Doppelpunkt ein *Selbstschnitt,*
eine *Parabel,* wenn der Doppelpunkt ein *Umkehrpunkt,*
eine *Ellipse,* wenn der Doppelpunkt ein *isolierter Punkt.*

Damit haben wir auch schon die Gleichung eines Kegelschnittes durch den Ursprung gefunden. Wir haben nur das Reziproke der Gleichung (V) zu nehmen, mit der Bedingung, dass die Koeffizienten des ursprünglichen Zählers gleiches Argument haben. Nehmen wir dieses gemeinsame Argument in die Koeffizienten des ursprünglichen Nenners, so erhalten wir als *Gleichung eines Kegelschnittes durch den Ursprung*

$$V = \frac{A + Bv}{D + Ev + Fv^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (VI)$$

Je nachdem

$$(E^2 - 4DF) \gtreqless 0, \text{ ist der Kegelschnitt eine } \begin{cases} \textit{Hyperbel} \\ \textit{Parabel} \\ \textit{Ellipse} \end{cases}$$

Wir können es uns hier ersparen, diese Tatsachen durch Abbildungen zu veranschaulichen, umso mehr als die entsprechenden Figuren in der angeführten Literatur zu finden sind.

Dagegen ist es interessant zu bemerken, dass in dieser Darstellung der Kreis nicht als Sonderfall der *Ellipse* erscheint. Dies hat folgenden Grund. Der Kreis ist die Inverse der Geraden, wie die Kegelschnitte die Inversen

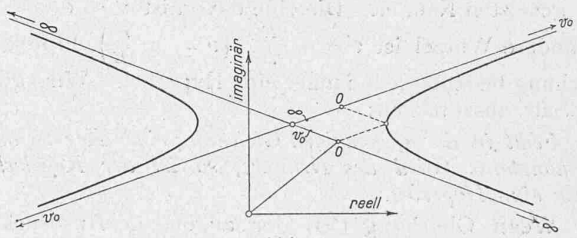

Abb. 8

der zirkularen Kubiken sind. Eine solche Kubik müsste also in ihre Asymptote übergehen, damit aus ihr ein Kreis entstünde. Fällt aber die ganze Kurve in die Asymptote, so ist davon auch ihr Doppelpunkt nicht ausgenommen. Das Inversionszentrum fällt also in diesem Sonderfall selbst in die Gerade und die Gerade wird in sich selbst inversiert, nicht aber in einen Kreis.

Einer *Parabel* sind wir schon in Abschnitt 1) dieses II. Teiles begegnet. Jene Parabel geht durch den Ursprung, wenn $A = 0$. Dann ist: $V = Bv + Cv^2$. Die Inverse dieser Kurve muss also auch eine zirkulare Kubik mit dem *Umkehrpunkt* im Ursprung sein. Ihr Ausdruck lautet:

$$V' = \frac{1}{Bv + Cv^2}.$$

[1]) Vergl. *E. Beutel*, a. a. O. Seite 77.

Ersetzen wir v durch $\frac{1}{v'}$, so geht die Gleichung über in

$$V' = \frac{v'^2}{C + Bv'}.$$

Das ist in der Tat die Gleichung einer zirkularen Kubik, in deren Zähler die konstanten und in v' linearen Glieder gleich Null sind. Der Zähler dieser Gleichung ist tatsächlich *rein reell* und somit liegt der Singulärpunkt im Ursprung. Ein möglicher Wurzelwert ist aber einzig $v' = \pm 0$, oder, was dasselbe ist, $v = \pm \infty$. Während in den Kurven nach Gleichung (V) der Punkt mit $v = \infty$ auch der unendlich ferne Punkt der Kurve ist, liegt hier der entsprechende Punkt im Ursprung.

Lösen wir den obigen Ausdruck für V' auf, so erhalten wir:

$$V' = \frac{1}{B} v' - \frac{1}{B} \cdot \frac{Cv}{C + Bv'}$$

Die Radien-Vektoren an der Kurve setzen sich also zusammen aus den Radien-Vektoren an einen Kreis von allgemeiner Lage und aus den Strecken einer Geraden durch den Ursprung, der auf der letzteren dem Wert $v = \infty$ entspricht, während dem unendlich fernen Punkt der Wert $v = 0$ zukommt.

Auch einer *Hyperbel* sind wir schon begegnet. Sie stellte sich uns als Degenerierungsfall der zirkularen Kubik dar, nicht als deren Inversion. Ihre zwei unendlich fernen Punkte entsprachen den Werten $v = v_0$ und $v = \infty$. Auf den Hyperbeln nach Gleichung (VI) liegt im Gegensatz dazu der Punkt mit $v = \infty$ im Ursprung. Die beiden Fälle müssen aber ineinander übergeführt werden können.

$$V = \frac{A + Bv + Cv^2}{D + Ev}$$

war die Gleichung jenes Degenerierungsfalles. Dem Wert $v = 0$ entspricht der Punkt $\frac{A}{D}$. Verschieben wir die Kurve parallel zu sich selbst, bis dieser Punkt in den Ursprung fällt, so drückt sich das in der Gleichung durch Subtraktion des Vektors $\frac{A}{D}$ aus. Es wird

$$V = \frac{A + Bv + Cv^2}{D + Ev} - \frac{A}{D} = \frac{\left(B - \frac{A}{D} E\right) v + Cv^2}{D + Ev}.$$

Setzen wir

$$\left(B - \frac{A}{D} E\right) \equiv G \text{ und } v \equiv \frac{1}{v'}, \text{ so wird } V = \frac{Gv' + C}{Dv'^2 + Ev'}.$$

Das ist aber tatsächlich die allgemeine Form des Kegelschnittes für den besondern Fall, in dem das konstante Glied des Nenners gleich Null ist. Man sieht aus der Gleichung, *es gibt immer zwei reelle Wurzeln* für den gleich Null gesetzten Nenner. Die eine davon ist $v' = 0$ ($v = \infty$), die andere Wurzel ist $v' = -\frac{E}{D}$. $\left(v = -\frac{D}{E}\right)$. Eine solche Gleichung bedeutet also immer eine Hyperbel. Wir können den Satz aussprechen:

Fehlt in der allgemeinen Gleichung eines Kegelschnittes das konstante Glied des Nenners, so ist der Kegelschnitt immer eine Hyperbel.

Wenn Gleichung (VI) der allgemeine Ausdruck für einen Kegelschnitt durch den Ursprung ist, so ist es nicht schwer, daraus die Gleichung eines *beliebig* zum Koordinatenursprung gelegenen Kegelschnittes abzuleiten. Die Verschiebung des Kegelschnittes in der Ebene wird ausgedrückt durch Addition eines konstanten Vektors T zu allen Werten von V. Die Gleichung eines beliebig orientierten Kegelschnittes lautet somit:

$$V = T + \frac{A' + B'v}{D + Ev + Fv^2},$$

oder, indem wir auf gemeinsamen Nenner bringen und gleichzeitig definieren:

$$(A' + TD) \equiv A; \; (B' + TE) \equiv B; \; TF \equiv C$$

erhalten wir

$$V = \frac{A + Bv + Cv^2}{D + Ev + Fv^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(VII)}$$

Ausdrücke von der Form der Gleichung (VII) *bedeuten also Kegelschnitte von allgemeiner Lage in der Ebene.*

Die Ausführung der geforderten Division gibt

$$V = \frac{C}{F} + \left[\left(B + \frac{C}{F} E\right) v + \left(A - \frac{C}{F} D\right)\right] \frac{1}{D + Ev + Fv^2} \quad \text{(VII')}$$

Der Punkt des Kegelschnittes mit $v = \infty$ ist $\frac{C}{F} = T$. Die Gleichung (VII') schildert also den Weg, auf dem wir tatsächlich zu unserem Kegelschnitt gelangt sind. Wird A *oder* B gleich Null, so hat dies, wie aus Gleichung (VII') hervorgeht, keinen Einfluss auf den Charakter der Kurve. Werden aber A *und* B gleich Null oder aber das Argument der beiden Glieder der eckigen Klammer auf andere Weise gleich, so *degeneriert* wiederum der Kegelschnitt in eine *Doppelgerade durch den Ursprung.*

Damit sind die in diesen Abschnitt gehörenden Gleichungsformen erledigt. Zwar gibt es noch eine *Brennpunktsgleichung* der Kegelschnitte, die sich aber am selbstverständlichsten bei der Behandlung der sogenannten *Pascalschen Schnecken* ergeben wird. Diese werden in einem III. Teil mit den *bizirkularen Quartiken* zu behandeln sein. Für diese müssen wir aber den Leser, der dafür Interesse hat, auf eine demnächst im Buchhandel[1]) erscheinende Schrift des Verfassers verweisen, da der Raum dieser Zeitschrift sonst in ungebührlichem Masse für unsere Sonderfrage in Anspruch genommen würde. In jener Schrift wird sich ein Ausblick auf die *Gesamtheit der Unikursalkurven* ergeben; allgemeine Schnitt- und Tangentenprobleme werden ihre Besprechung finden und technische Beispiele zu solchen Kurven höherer Ordnung gegeben werden. Schliesslich wird sich ein grösserer Abschnitt kritisch mit dem *Kreisdiagramm* zu befassen haben, dem man infolge einer Reihe von Irrtümern in der theoretischen Elektrotechnik eine Stellung eingeräumt hat, die ihm in Wirklichkeit nicht zukommt.

Miscellanea.

Der Basler Rheinhafen in Kleinhüningen. Im Safransaale zu Basel fand am 15. d. M. eine von allen Basler Wirtschaftsverbänden einberufene, zahlreich beschickte Versammlung statt, in der nach einem einleitenden Bericht von Dr. *Tr. Geering*, Sekretär der Basler Handelskammer, und einer einlässlichen Diskussion, an der sich auch die beiden Regierungsräte, *A. Stöcklin*, Vorsteher des Baudepartements, und *A. Miescher*, z. Z. Regierungspräsident, beteiligten, beschlossen wurde, „die Regierung dringend zu bitten, ohne das Ende des Krieges abzuwarten, den bei Kleinhüningen geplanten Handelshafen mit dem Wendebecken à niveau des Rheines möglichst rasch in Angriff zu nehmen und fertig zu erstellen, als unumgängliche Voraussetzung für die Erschliessung der Stromschifffahrt der ganzen Schweiz."

Die Pläne wurden nach Skizzen von Ingenieur R. Gelpke von Bauinspektor Bringolf und Zivilingenieur O. Bosshardt ausgearbeitet. Darnach käme der Hafen in das rechtsrheinische Gelände ob der Schusterinsel zu liegen. Der Wert des Areals steht mit 1,13 Mill. Fr. zu Buch, die Baukosten sind ohne die Hochbauten zu 2,63 Mill. Fr. veranschlagt.

Wiederaufbau in Frankreich. Für die Instandstellung der vom Kriege betroffenen Gegenden Frankreichs und den Wiederaufbau der zerstörten Ortschaften hat sich in Paris ein dem Ministerium angegliedertes, acht Sektionen umfassendes Komitee gebildet. Nach der „Construction moderne" gehören diesem Komitee die folgenden Fachleute an: *Bonnier*, directeur des services d'architecture et des promenades de la Ville de Paris; *Legros*, architecte voyer en chef de la Ville de Paris; *Auburtin, Jaussely*, membres de la Société des architectes urbanistes; *Boeswilwald, Genuys*, membres de la Commission des monuments historiques, *Cordonnier, Nénot*, membres du Conseil général des bâtiments civils; *Frantz-Blondel*, président de l'Association provinciale des architectes français; *Hermant*, président de la Société des architectes diplomés par le gouvernement; *Couturaud*, architecte en chef honoraire du Pas-de-Calais; *Dupont*, architecte départemental de la Marne; *Feine, Wybo*, architectes.

---

[1]) *O. Bloch* Die Ortskurven der graphischen Wechselstromtechnik. Verlag von Rascher & Co., Zürich.