Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Band: 73/74 (1919)
Heft: 12

Artikel: Einige Sätze über die Kettenlinie
Autor: Kiefer, A.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-35598

nach dem Hafen und nach Port. Der im Bericht niedergelegten Variante für die Einführung der Biel-Meinisbergbahn durch Madretsch ist der Vorzug zu geben. Die Bedienung der Markthalle durch die Ueberlandbahnen ist gut, dagegen sind die Abstellgeleise ungenügend. Der Hauptmarkt im Champagnefeld ist zu weit weg vom Zentrum, die Markthalle beim Bahnhof ist praktisch gelegen. In den Vororten sind die Marktplätze nicht besonders bezeichnet, aber überall an geeigneter Stelle Dorfplätze vorhanden. Der Viehmarkt beim Schlachthof ist zweckmässig.

Das Industriegebiet ist richtig verteilt und gut abgegrenzt. Beim Personenbahnhof ist dasselbe auf das Notwendigste reduziert, wie dies wünschbar ist. Der Hafen im Brüggmoos ist gut gelegen. Sehr beachtenswert ist der Gedanke eines Industrie- und Hafen-Bahnhofes bei Brügg. Die gänzliche Aufhebung des gegenwärtigen Industriegebietes beim Schloss Nidau ist wohl kaum durchführbar, wenn auch sehr wünschenswert.

Die Bebauungsvorschläge für Biel und die Vororte sind gut. Bei Port dürfte der Brückenkopf zu einem grössern Platz ausgebildet werden. Schön ist die Bebauung am Mett-Hügel. Mett Dorf hat in diesem Projekte wenig Beachtung gefunden. Bemerkenswert und schön durchgeführt ist die Wohnkolonie auf dem Mühlefeld-Hubel in günstiger Lage (siehe Seite 133, oben. *Red.*).

Für die Grünflächen ist ein schöner Zusammenhang gefunden, in den Weidteilen und im Madretsch-Moos sind sie zweckmässig zwischen Industrie- und Wohngebiet eingelegt. Der Friedhof Madretsch ist genügend erweitert; im obern Teil des Mett-Moos ist ein ruhig und schön gelegener Friedhof für Biel-Ost, Bözingen und Mett vorgesehen. Der Flugplatz ist gut plaziert und richtig dimensioniert. Der Sportplatz beim Schloss Nidau kann leider wegen der dort vorhandenen Industriebauten in der vorgeschlagenen Weise auf absehbare Zeit nicht verwirklicht werden. Die Lagerhäuser hinter dem Personenbahnhof sind ungünstig gelegen.

Das Rathaus ist nicht am richtigen Platz. Es fällt auf, dass mit den öffentlichen Bauten nicht ein architektonisch durchgebildetes Zentrum angestrebt wurde. Das Schulhaus Madretsch ist so disponiert, dass das Geleise Reparaturwerkstätte-Gaswerk ungeschickt verlegt werden muss. Das Schulhaus Port mit der freien Rasenfläche am Kanal ist sehr gut.

Die im Bericht enthaltenen Anregungen betr. die Bebauung und Zoneneinteilung sind bemerkenswert. (Schluss folgt.)

Einige Sätze über die Kettenlinie.

Von *A. Kiefer*, Zürich.

1. Die Abbildung zeigt eine Kettenlinie mit dem Scheitelpunkte S und der Leitlinie $O, \pm x$; die Kettenlinie kann durch das Gleichungspaar gegeben werden

$$1. \quad x = a \operatorname{Lg} \operatorname{cotg} \frac{\psi}{2}, \qquad 2. \quad y = \frac{a}{\sin \psi},$$

wobei $a = OS$ ist und ψ den Winkel zwischen der Kurven-Tangente in dem Punkte P und der Ordinatenstrecke PP' bedeutet.[1] Ist $P'(S)$ senkrecht zur Tangente gezogen, so ist $P(S)$ gleich dem Kurvenbogen PS und $P'(S) = a$. In dem Kurvenpunkt P_1 ist ebenfalls die Tangente gelegt und $P_1'(S)_1$ senkrecht dazu gezogen; dann ist wieder $P_1'(S)_1 = a$, und $P_1(S)_1$ gleich dem Kurvenbogen $P_1 S$, und $(P)(S)_1 = P(S)$ gleich dem Kurvenbogen PS, und $P_1(P)$ gleich Bogen $PP_1 = l$. Aus dem Dreieck $P_1 P_1'(P)$ folgt, wenn y, y_1 die Ordinaten von P, P_1 sind, nach dem Cosinussatz

$$l^2 = (y_1 - y)^2 + 4\, y_1\, y \sin^2 \frac{\psi - \psi_1}{2};$$

hierin im zweiten Glied auf der rechten Seite

$$y_1 = \frac{a}{\sin \psi_1}, \quad y = \frac{a}{\sin \psi} \text{ gesetzt}$$

$$l^2 = (y_1 - y)^2 + 4\, a^2 \frac{\sin^2 \frac{\psi - \psi_1}{2}}{\sin \psi_1 \sin \psi}, \text{ und umgeformt}$$

$$l^2 - (y_1 - y)^2 = a^2 \left(\frac{\operatorname{cotg} \frac{\psi_1}{2}}{\operatorname{cotg} \frac{\psi}{2}} - 2 + \frac{\operatorname{cotg} \frac{\psi}{2}}{\operatorname{cotg} \frac{\psi_1}{2}} \right).$$

Nun ist nach der ersten der zwei Gleichungen, die zusammen die Kettenlinie darstellen

$$\frac{\operatorname{cotg} \frac{\psi_1}{2}}{\operatorname{cotg} \frac{\psi}{2}} = e^{\frac{x_1 - x}{a}}.$$

Wenn $\dfrac{\operatorname{cotg} \frac{\psi_1}{2}}{\operatorname{cotg} \frac{\psi}{2}}$ konstant bleibt, so bleibt also auch $x_1 - x$ konstant und umgekehrt. Unter dieser Annahme bleibt ebenfalls $l^2 - (y_1 - y)^2 = \sigma^2$ konstant. Um die Bedeutung von σ zu erkennen, wähle man die zwei Punkte symmetrisch zur Achse; dann ist $y_1 - y = 0$ und σ ist ein Bogen der Kettenlinie, der durch den Scheitelpunkt halbiert wird und als Länge der Horizontalprojektion $x_1 - x$ hat. Bezeichnet man den Tangenten-Ordinatenwinkel im Endpunkt des Bogens mit ω, so ist $\sigma = 2\, a \operatorname{cotg} \omega$; die konstante Länge der Horizontalprojektion ist $x_1 - x = 2\, a \operatorname{Lg} \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2}$. Da alle Kettenlinien ähnlich sind, so ist σ auch der vom Scheitel aus gemessene Bogen einer Kettenlinie vom Parameter $2\,a$, wenn die Horizontalprojektion des Bogens die Länge $x_1 - x$ hat.[1])

Wenn $x_1 - x$ und σ gegeben sind, so ist die Kettenlinie bestimmt und kann konstruiert werden aus der Länge σ des Bogens, der vom Scheitelpunkt halbiert wird und gegebene Horizontalprojektion hat; zur Berechnung von a dienen die zwei Gleichungen $\sigma = 2\, a \operatorname{cotg} \omega$, $x_1 - x = 2\, a \operatorname{Lg} \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2}$, in denen auch ω unbekannt ist. Man hat folgende Sätze:

Hat man bei einer Kettenlinie Bogenstücke, deren Horizontalprojektionen gleiche Länge haben, so ist das Quadrat der Bogenlänge vermindert um das Quadrat der Projektion des Bogenstücks auf eine vertikale Gerade konstant, nämlich gleich σ^2, wo σ dasjenige Bogenstück derselben Kettenlinie bedeutet, das vom Scheitelpunkt halbiert wird und dieselbe Länge der Horizontalprojektion hat, oder wo σ das vom Scheitel aus gemessene Bogenstück einer Kettenlinie vom Parameter $2\,a$ bedeutet, wenn die Horizontal-Projektion des Bogenstückes wieder dieselbe gegebene Länge hat.

Verbindet man zwei Punkte, die gegebenen Horizontal-Abstand $x_1 - x$ haben, aber sonst beliebig liegen, durch einen Kettenlinienbogen l, für den $l^2 - (y_1 - y)^2$ konstant ist, so sind alle diese Bogen Stücke derselben Kettenlinie, deren Parameter a durch die zwei Gleichungen bestimmt ist $\sqrt{l^2 - (y_1 - y)^2} = 2\, a \operatorname{cotg} \omega$, $x_1 - x = 2\, a \operatorname{Lg} \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2}$.

2. Aus dem Dreieck $P_1 P_1'(P)$ folgt nach dem Mollweidschen Satze

$$\frac{y_1 + y}{l} = \cos \frac{180 - \psi - \psi_1}{2} : \cos \frac{180 - \psi + \psi_1}{2}$$

$$= \sin \frac{\psi + \psi_1}{2} : \sin \frac{\psi - \psi_1}{2}$$

$$= \left(\frac{\operatorname{cotg} \frac{\psi_1}{2}}{\operatorname{cotg} \frac{\psi}{2}} + 1 \right) : \left(\frac{\operatorname{cotg} \frac{\psi_1}{2}}{\operatorname{cotg} \frac{\psi}{2}} - 1 \right).$$

Nun ist wie früher $\dfrac{\operatorname{cotg} \frac{\psi_1}{2}}{\operatorname{cotg} \frac{\psi}{2}} = e^{\frac{x_1 - x}{a}}$

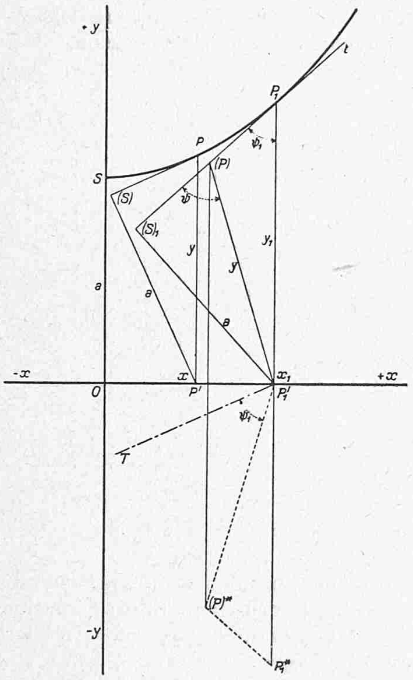
und wenn bei der Kettenlinie $x_1 - x$ konstant bleibt, so bleibt auch $\dfrac{y_1 + y}{l} = \sigma'$ konstant. Der Wert der Konstanten σ' ergibt sich, wenn die Punkte mit den Ordinaten y, y_1 symmetrisch zur Axe genommen werden, gleich der Ordinate des einen dividiert durch den Bogen vom Scheitelpunkt bis zu diesem Punkt gemessen. Ist ω' der Winkel zwischen der Tangente des Punktes und der Ordinatenstrecke, so ist $\sigma' = \dfrac{1}{\cos \omega'}$ und $x_1 - x = 2\, a \operatorname{Lg} \operatorname{cotg} \frac{\omega'}{2}$.

[1]) Schweiz. Bauzeitung, Bd. LXVI, Nr. 22 vom 27. November 1915, Bd. LXVII, Nr. 10 vom 4. März 1916 und Nr. 21 vom 20. Mai 1916.

[1]) Eine diesen Umstand darstellende Formel findet sich auf Seite 104 in dem Lehrbuch der Statik fester Körper von *Jul. Petersen* (Kopenhagen, Hörst & Sohn).

Durch σ' ist $x_1 - x$ bestimmt und wenn σ' und $x_1 - x$ gegeben sind, so ist a, also die Kettenlinie, bestimmt; d. h.:

Hat man bei einer Kettenlinie Bogenstücke, deren Horizontalprojektionen gleiche Länge haben, so ist das Verhältnis der Summe der Ordinaten der zwei Endpunkte zum Bogen konstant, nämlich, wenn die Horizontalprojektion durch O halbiert wird, gleich der Ordinate des einen Endpunktes durch seinen Bogenabstand vom Scheitelpunkt.



Verbindet man zwei Punkte, die gegebenen Horizontalabstand haben, aber sonst beliebig liegen, durch einen Kettenlinienbogen l, sodass $\frac{y_1+y}{l}$ konstant ist, so sind alle diese Bogen Stücke derselben Kettenlinie. Ist für zwei Punkte einer Kettenlinie der Horizontalabstand gleich $x_1 - x$, so sind durch ihn σ und σ' bestimmt und für die zwei Punkte bestehen die Gleichungen

$$l^2 - (y_1 - y)^2 = \sigma^2,$$

$$\frac{y_1+y}{l} = \sigma'.$$

Hieraus kann man l eliminieren.

Zwischen den Ordinaten zweier Punkte, die gegebenen Horizontalabstand haben, besteht die Gleichung

$$\left(\frac{y_1+y}{\sigma'}\right)^2 - (y_1 - y)^2 = \sigma^2.$$

Sind s, s_1 die Bogen vom Scheitel der Kettenlinie bis zu zwei solchen Punkten, so besteht zwischen s, s_1 eine Relation, die entsteht, wenn man in der letzten Gleichung $y_1 = \sqrt{s_1^2 + a^2}$, $y = \sqrt{s^2 + a^2}$ substituiert.

3. Ein Kettenlinienbogen, dessen Horizontalprojektion konstante Länge hat, steht mit dem Inkreis des Dreieckes $P_1\,P_1'\,(P)$ und dem Ankreis über $P_1\,(P) = l$ im Zusammenhang. Ist nämlich r der Radius des Inkreises und I der Inhalt des Dreieckes, so hat man

$$r = \frac{I}{\frac{1}{2}(y_1+y+l)} = \frac{\frac{1}{2}\,a\,l}{\frac{1}{2}(y_1+y+l)} = \frac{a}{\frac{y_1+y}{l}+1};$$

der Radius r_1 des Ankreises über l ist

$$r_1 = \frac{\frac{1}{2}\,a\,l}{\frac{1}{2}(y_1+y+l)-l} = \frac{a}{\frac{y_1+y}{l}-1}.$$

Bei konstanter Länge der Horizontalprojektion von l bleibt aber, wie vorhin gesehen, $\frac{y_1+y}{l} = \sigma'$ konstant, also auch $r = \frac{a}{\sigma'+1}$, $r_1 = \frac{a}{\sigma'-1}$ und zwischen r, r_1 besteht die Gleichung:

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} = \frac{2}{a}, \text{ d. h.:}$$

Wickelt man eine Kettenlinie auf einer Tangente ab, wobei der Scheitel nach (S_1) falle und das Lot $(S_1)\,P_1'$ gleich a sei, so erscheinen die Bogen, deren Horizontal-Projektionen konstante Länge haben, als Strecken l, sodass, wenn ihre Endpunkte mit P_1' verbunden werden, Dreiecke entstehen mit konstantem Radius des Inkreises und des Ankreises über l; zwischen den zwei Radien besteht die Gleichung $\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} = \frac{2}{a}$. Dabei ist gemäss Abschnitt 2

$$r = \frac{a}{\dfrac{e^{\frac{x_1-x}{a}}+1}{e^{\frac{x_1-x}{a}}-1}+1} = \frac{a}{2}\left(1 - e^{\frac{x-x_1}{a}}\right);\; r_1 = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x_1-x}{a}} - 1\right)$$

Hat man eine Gerade im Abstand a von dem Punkt P_1' und legt man auf der Seite von P_1' an die Gerade berührende Kreise mit dem konstanten Radius r, oder auf der andern Seite mit dem konstanten Radius r_1, wobei $\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} = \frac{2}{a}$ ist, so geht von P_1' an jeden Kreis ein Tangentenpaar und jedes Tangentenpaar begrenzt auf der Geraden eine Strecke; wird nun die Gerade in richtiger Weise auf die zugehörige Kettenlinie vom Parameter a aufgewickelt, so geht jede derartige Strecke in einen Bogen über, dessen Horizontalprojektion konstante Länge hat.

Dabei darf r nicht grösser als $\frac{a}{2}$ sein; die Grösse der Horizontalprojektion $x_1 - x$ bestimmt sich aus

$$r = \frac{a}{2}\left(1 - e^{\frac{x-x_1}{a}}\right).$$

Die Radien r_2, r_3 der andern Ankreise sind veränderlich, aber stets ist $\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{2}{a}$.

4. Aus dem Dreiecke $P_1\,P_1'\,(P)$ folgt ferner nach dem Cosinussatz $l^2 = (y_1 + y)^2 - 4\,y_1\,y\,\cos^2\frac{\psi - \psi_1}{2}$, und hieraus, wenn im zweiten Glied auf der rechten Seite noch die Substitutionen $y_1 = \frac{a}{\sin\psi_1}$, $y = \frac{a}{\sin\psi}$ gemacht werden,

$$(y_1 + y)^2 - l^2 = 4\,a^2\,\frac{\cos^2\left(\frac{\psi-\psi_1}{2}\right)}{\sin\psi_1\,\sin\psi}$$

$$= a^2\left(\operatorname{cotg}\frac{\psi}{2}\operatorname{cotg}\frac{\psi_1}{2} + 2 + \frac{1}{\operatorname{cotg}\frac{\psi}{2}\operatorname{cotg}\frac{\psi_1}{2}}\right)$$

Nun ist nach der ersten der zwei Gleichungen, die zusammen die Kettenlinie darstellen

$$\operatorname{cotg}\frac{\psi}{2}\operatorname{cotg}\frac{\psi_1}{2} = e^{\frac{x+x_1}{a}}\text{; also}$$

$$(y_1 + y)^2 - l^2 = a^2\left(e^{\frac{x+x_1}{a}} + 2 + \frac{1}{e^{\frac{x+x_1}{a}}}\right) =$$

$$= a^2\left(e^{\frac{x+x_1}{2a}} + e^{-\frac{x+x_1}{2a}}\right)^2$$

Wenn $\operatorname{cotg}\frac{\psi}{2}\operatorname{cotg}\frac{\psi_1}{2}$ konstant bleibt, so bleibt auch $x + x_1$ konstant und umgekehrt. Dann bleibt auch $(y_1 + y)^2 - l^2 = \tau^2$ konstant und die Endpunkte von l auf der Kettenlinie liegen auf verschiedener Seite, aber in gleichen Abständen von einer festen vertikalen Geraden mit der Abszisse $\frac{x+x_1}{2}$. Die Bedeutung der Konstanten ergibt sich, wenn man die zwei Punkte zusammenfallen lässt, nämlich da $l = 0$ gleich $4\,y^2$, d. i. das vierfache Quadrat der zur Abszisse $\frac{x+x_1}{2}$ gehörigen Ordinate des Punktes auf der Kettenlinie, oder gleich dem Quadrate der zur Abszisse $\frac{x+x_1}{2}$ gehörigen Ordinate der Kettenlinie mit dem Parameter $2\,a$. Ist die Konstante $(y_1 + y)^2 - l^2 = \tau^2$ und $x + x_1$ gegeben, so ist der Parameter der Kettenlinie bestimmt. Es gelten die Sätze:

Hat man auf einer Kettenlinie Bogenstücke l, deren Endpunkte mit den Ordinaten y, y_1 auf verschiedener Seite, aber in gleichen Abständen von einer festen vertikalen Geraden liegen, so bleibt $(y_1 + y)^2 - l^2 = \tau^2$ konstant, nämlich gleich dem vierfachen Quadrat der Kurvenordinate auf der festen Geraden.

Wählt man zwei Punkte auf verschiedener Seite, aber in gleichen Abständen von einer festen vertikalen Geraden und verbindet die Punkte durch einen Kettenlinienbogen l so, dass $(y_1 + y)^2 - l^2 = \tau^2$ konstant bleibt, so sind alle diese Bogen Stücke derselben Kettenlinie.

(Schluss folgt.)