Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Band: 79/80 (1922)
Heft: 3

Inhaltsverzeichnis

Band 80. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 3.**

Zur Frage der Stabilität rotierender Wellen.

Von Prof. Dr. *Theodor Pöschl*, Deutsche Techn. Hochschule. Prag.

Gelegentlich der Bearbeitung eines zusammenfassenden Berichtes über die bisher auf diesem Gebiete vorliegenden Ergebnisse bin ich für den Fall einer einzelnen, auf einer schlanken Welle exzentrisch aufgekeilten Schwungscheibe durch Verwendung der sog. Lagrange'schen Gleichungen (zweiter Art) zu einer methodischen Vereinfachung und zu Bemerkungen über den Stabilitätscharakter der bekannten Lösungen gelangt, die ich im folgenden mitteilen möchte. Aus der umfangreichen Literatur über diesen Gegenstand, die insbesondere mit den Namen *A. und O. Föppl, L. Prandtl, A. Stodola* u. a. verknüpft ist, schliesse ich mich hier inbesondere an die Mitteilungen des letztgenannten Forschers an, die in den Bänden 68, 70, 71 (1916 bis 1918) dieser Zeitschrift und in Dinglers Journal 333 (1918) erschienen sind, sowie an die Darstellung in seinem Werke: „Dampfturbinen" vierte Auflage S. 627 u. f. Es soll sich zunächst um das *ebene* Problem handeln, ohne Berücksichtigung der Kreiselwirkung infolge Schrägstellung der Kreiselaxe.

Meistens nennt man *stabil* eine solche Form stationärer Bewegung, bei der einer Veränderung der anfänglichen Lagen und Geschwindigkeiten in weiterem Verlaufe nur solche Lagen und Geschwindigkeiten entsprechen, die die Beträge der ursprünglichen Störungen nicht überschreiten, und zwar derart, dass sich die ungestörte Bewegung der gestörten für unendlich abnehmende Störungen ergibt. Zur Entscheidung der Frage, ob Stabilität in diesem Sinne vorhanden ist oder nicht, dient die Methode der kleinen Schwingungen, durch die die Beschaffenheit der Nachbarlösungen zu stationären Bewegungen untersucht wird. Der Fall der vertikalen Welle, in dem das Eigengewicht der Scheibe keine Rolle spielt, gehört unmittelbar hierher. Dabei empfiehlt es sich, den Umstand zu verwerten, dass die Winkelkoordinate, die die Drehung des Systems darstellt, *zyklisch* ist und mit Hilfe des ihr entsprechenden Integrals, das den „Drall" des Systems gibt, durch „Ignoration" mittels der Routh'schen Funktion eliminiert werden kann, wodurch die Ordnung des Problems von vorneherein um zwei Einheiten erniedrigt wird. Der Drall wird dabei, ähnlich wie es bei der Stabilitätsuntersuchung des Kreisels geschieht, für die gestörte Bewegung so gross angenommen wie für die ungestörte.[1]) Für die „kritische Geschwindigkeit 1. Art" wird der Abstand des Schwerpunktes von der Lagermittellinie unendlich.

Für die horizontal gelagerte Welle hat nun Stodola für den halben Wert der kritischen Geschwindigkeit ein „zweites kritisches Gebiet" gefunden, bei der sich eine Unruhe des Ganges bemerkbar macht. Vom analytischen Standpunkt lässt sich darüber sagen, dass hier eine partikulare „periodische Lösung" der Bewegungsgleichungen für die schwere Scheibe vorliegt, über deren Stabilität durch die elementaren Methoden nicht entschieden werden kann. In diesem Fall besitzt nämlich das System keine ignorable Koordinate, und der Ansatz für die kleinen Schwingungen führt auf lineare Differenzialgleichungen 2. Ordnung, deren Koeffizienten periodische Funktionen der Zeit sind. Ob Stabilität oder Instabilität vorhanden ist, lässt sich aus den Gleichungen nicht ohne weiteres ablesen, die aus dem Ansatz für die kleinen Schwingungen fliessen; zur Entscheidung dieser Frage müssen vielmehr die für diese Fälle in der Himmelsmechanik (insbesondere durch Poincaré u. a.) entwickelten Hilfsmittel herangezogen werden.

Zunächst seien jedoch einige Bemerkungen über den Ansatz der Lagrange'schen Gleichungen und der Einführung der Routh'schen Gleichungen vorangeschickt.

Wenn die Lage des Systems durch n ortsbestimmende Parameter $q_1, \ldots q_n$ (Koordinaten) festgelegt und die kinetische Energie T und potentielle Energie V in diesen Parametern ausgedrückt wird, so bildet man die „*Lagrange'sche Funktion*" $L = T - V$ und erhält daraus die Bewegungsgleichungen lediglich durch Ausführung von Differentiationen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q'_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots n) \qquad (1)$$

Man nennt nun eine Koordinate *zyklisch*, wenn in L nur ihre Ableitung auftritt, sie selbst jedoch nicht vorkommt. Wenn also von den n Koordinaten $q_1, \ldots q_n$ die ersten k nicht zyklisch, und $n-k$ zyklisch sind, so ist in (1)

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = n-k+1, \ldots n)$$

zu setzen und wir erhalten unmittelbar die $n-k$ ersten Integrale

$$\frac{\partial L}{\partial q'_i} = b_i \quad (i = n-k+1, \ldots n) \qquad (2)$$

wobei die b_i durch die Anfangsbedingungen zu bestimmende Integrationskonstante sind. Zur unmittelbaren Verwertung dieser Integrale für das Integrationsgeschäft ist es nützlich, statt L die „*Routh'sche Funktion*" einzuführen:

$$R = T - V - \sum_{i=n-k+1}^{i=n} b_i\, q_i \qquad (3)$$

und R mit Hilfe der Gleichungen (2) durch $q_1, \ldots q_{n-k}$, $q'_i, \ldots q'_{n-k}$, $b_{n-k}, \ldots b_n$ auszudrücken, dann ergeben sich die Bewegungsgleichungen in derselben Form wie zuvor

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial q'_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots n-k), \qquad (4)$$

sie bilden jedoch nur noch ein System 2 $(n-k)$. Ordnung. Diesen Vorgang wollen wir nun für das erste der in Rede stehenden Probleme anwenden.

1. *Welle ohne Eigengewicht der Schwungscheibe.*

In Uebereinstimmung mit Abbildung 1 und unter Verwendung der meisten von *Stodola* verwendeten Bezeichnungen sei die Lage des Schwerpunktes S der Schwungscheibe durch ebene Polarkoordinaten ϱ, φ und die des Wellenmittelpunktes W durch die unveränderliche Exzentrizität $e = SW$ und den Winkel ψ bezeichnet. W wird als Angriffspunkt der elastischen Kraft αr der durchgebogenen, als homogen angenommenen Welle betrachtet ($r = OW$, $\alpha =$ konstant), die die Scheibe zur Lagermittel-

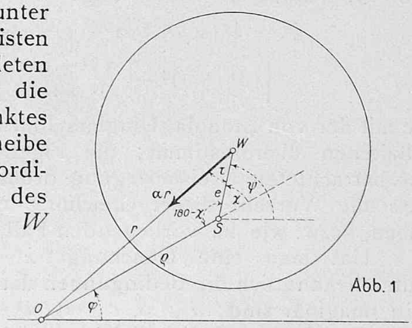

Abb. 1

[1]) *Stodola* hat für die gestörte Bewegung einen anderen Drall zugelassen, als für die ungestörte, und gefunden, dass dann Glieder auftreten, die der Zeit proportional sind, mithin auf Instabilität deuten. Indessen verläuft die Bahnkurve des Schwerpunktes als Ganzes genommen in der gestörten Bewegung auch weiterhin in der Nähe einer «ungestörten», die dem ursprünglichen Drall entspricht, und nähert sich bei abnehmenden Störungen (unter gewissen Bedingungen) der ursprünglichen beliebig an, sodass jedenfalls praktisch auch in diesem Falle von Stabilität gesprochen werden kann. Es wäre wünschenswert, jedesmal hinzuzufügen, in welchem Sinne der Begriff der Stabilität verstanden wird; hierzu vergl. insb. Prandtl, Dinglers Journal, 333 (1918), S. 179. Bei all diesen Untersuchungen macht es sich als Mangel der Theorie bemerkbar, dass man für den «Stabilitätsgrad» noch über keine befriedigende Definition verfügt, ein Umstand, der z. B. auch neuestens in der Atomphysik bei der Auswahl der «stabilsten» Elektronen-Anordnungen hemmend auftritt.