

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 81/82 (1923)  
**Heft:** 24

**Artikel:** Die Beseitigung der Resonanzgefahr  
**Autor:** Holzer, Heinrich  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-39026>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 26.11.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**



Für 1500 Fr. angekaufter Entwurf Nr. 2. — Verfasser Ed. Züblin & Cie., Ingenieurbureau und Eisenbetonbauunternehmung (Zürich).

An die Erledigung dieses Submissions-Wettbewerbs, dessen Entwürfe mit wenig Spielraum an eine vorgeschriebene Linie und Nivellette Schulhausplatz-Wettingerfeld gebunden waren, haben sich weitere Studien geknüpft. Wie den Schaubildern zu entnehmen, wäre die Beeinträchtigung des Stadtbildes von der südlichen, seiner markanten Seite her doch so empfindlich, dass die nähere Prüfung einer Führung *hinter* der Altstadt geboten schien; hierüber soll ebenfalls berichtet werden. (Schluss folgt.)

### Die Beseitigung der Resonanzgefahr.

Von Oberingenieur *Heinrich Holzer*, Nürnberg-Schwabach.

Die erzwungenen Schwingungen, die ein schwingungsfähiges System unter der Wirkung von periodisch wechselnden, erregenden Kräften vollführt, werden zu Resonanzschwingungen, wenn die Periode der erregenden Kräfte mit der Periode einer der Eigenschwingungen des Systems übereinstimmt. Ein bekannter Satz der Schwingungstheorie sagt aus, dass bei fehlender Dämpfung die Schwingungsausschläge der Resonanz unendlich gross werden, oder ins Praktische übersetzt, dass bei geringer Dämpfung Bruchgefahr besteht. Nach diesem Satz müssten folglich Resonanzschwingungen ohne Schaden für das schwingende System nur dann möglich sein, wenn „genügend grosse Dämpfung“ vorhanden ist, und es müsste daraus der Schluss gezogen werden, dass die Resonanzgefahr nur durch die Dämpfung beseitigt werden kann. (Um allfälligen Missverständnissen von vorneherein zu begegnen, sei ausdrücklich bemerkt, dass es sich hier nur um Fälle *echter* Resonanz handelt, dass also alle Mittel, die die Eigenschwingungszahl des Systems oder die Kraftimpulszahl der Erregung verändern, ausser Betracht zu bleiben haben.) Nun ist die Dämpfung zweifellos ein wirksames Mittel, um die Resonanzgefahr zu vermindern; aber es ist dem Praktiker nicht unbekannt, dass selbst mit grossen Dämpfern eine weitgehende Verringerung der Resonanz-Ausschläge kaum erreichbar ist. Die Dämpfung verlangt eben, um wirksam zu sein, dass die Schwingungsausschläge zum Teil erhalten bleiben. Da die Reibungsdämpfungen zudem Energie in Wärme entwerten, sind sie auch vom energetischen Standpunkt aus minderwertig. Es ist der Zweck dieser Arbeit, hochwertigere Mittel zur Beseitigung der Resonanzgefahr vorzuführen. Sie beschränkt sich dabei im wesentlichen auf Drehschwingungen, weil diese am leichtesten der rechnerischen Untersuchung zugänglich sind; es wird jedoch am Schlusse gezeigt werden, dass die gleichen Mittel auch für andere Arten von Schwingungen anwendbar sind. Besonders hervorzuheben ist, dass die Brauchbarkeit dieser Mittel von der Grösse der Dämpfung unabhängig ist, dass sie also auch bei gänzlich fehlender Dämpfung ihren Zweck in vollkommener Weise erfüllen.

### I. Zusätzliche erregende Kräfte.

Ein sehr wirksames Mittel zur Beseitigung der Resonanzgefahr findet man bereits in meinem Buche angegeben: „Die Berechnung der Drehschwingungen“<sup>1)</sup>, nämlich *zusätzliche erregende Kräfte oder Momente*.<sup>2)</sup> *An jedem gegebenen schwingenden System mit gegebenen erregenden Kräften kann man an einer beliebigen Stelle eine zusätzliche harmonische Kraft von derselben Periode wie die der Erregungen anbringen von solcher Grösse und Phase, dass bei Resonanz zugleich Teilschwingung<sup>3)</sup> auftritt.* Statt einer Kraft an einer beliebigen Stelle kann man auch *mehrere* Zusatzkräfte an *mehreren* Stellen gleichzeitig anbringen, wenn dies vorteilhaft erscheint. Die Wirksamkeit solcher Zusatzkräfte leuchtet sofort ein, wenn man an *jeder* Stelle, an der eine erregende Kraft wirkt, eine dieser Kraft gleiche aber entgegengesetzte periodische Zusatzkraft angebracht denkt, denn in diesem Falle wird durch unmittelbare Aufhebung der erregenden Ursachen das ganze System überhaupt schwingungsfrei. Um aber auch für eine einzige Zusatzkraft den Wert des Verfahrens unmittelbar vor Augen zu stellen, sei ein praktisches Beispiel, dem oben genannten Buch entnommen<sup>4)</sup>, hier vorgeführt.

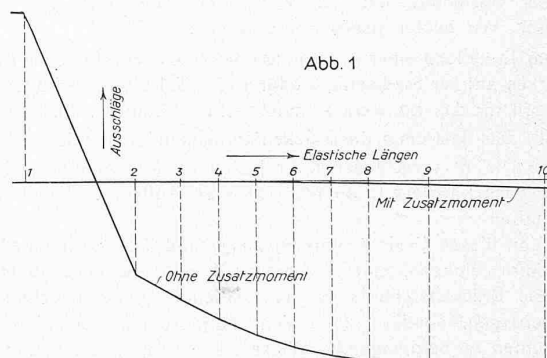


Abb. 1

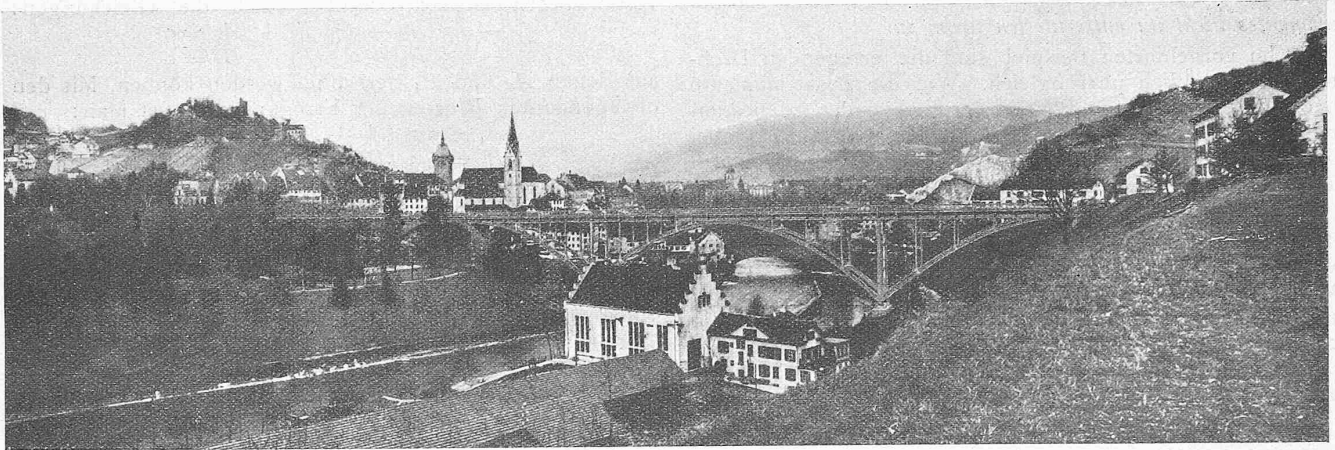
Die Welle einer Sechszylinder-Viertakt-Oelmaschine mit zwei Luftpumpen an einem Schwungrad und Dynamo am andern Wellenende habe die Eigenschwingungszahl ersten Grades von 2133 in der Minute. Sie vollführt sonach bei der Drehzahl  $2133 \cdot 2/12 = 355,5$  gefährliche Resonanzschwingungen zwölfter Ordnung (des Viertakts), da hierbei die erregenden Drehmomente dieser Ordnung sämtlich von gleicher Phase sind. In der Tabelle 1 sind alle für die Schwingungsrechnung benötigten Angaben zusammengestellt. Die Tabelle enthält auch die daraus

<sup>1)</sup> Verlag von J. Springer, Berlin, 1921 (Besprochen in Bd. 78, S. 321, 24. Dez. 1921. Red.).

<sup>2)</sup> S. 63 des erwähnten Buches (D. R. P. 338 958).

<sup>3)</sup> S. 58 des erwähnten Buches.

<sup>4)</sup> Auf S. 136 bis 141.



Für 1500 Fr. angekaufter Entwurf Nr. 1. — Verfasser Werkstätte Döttingen (Ing. M. Ros) mit Arch. Pflughard & Häfeli (Zürich).

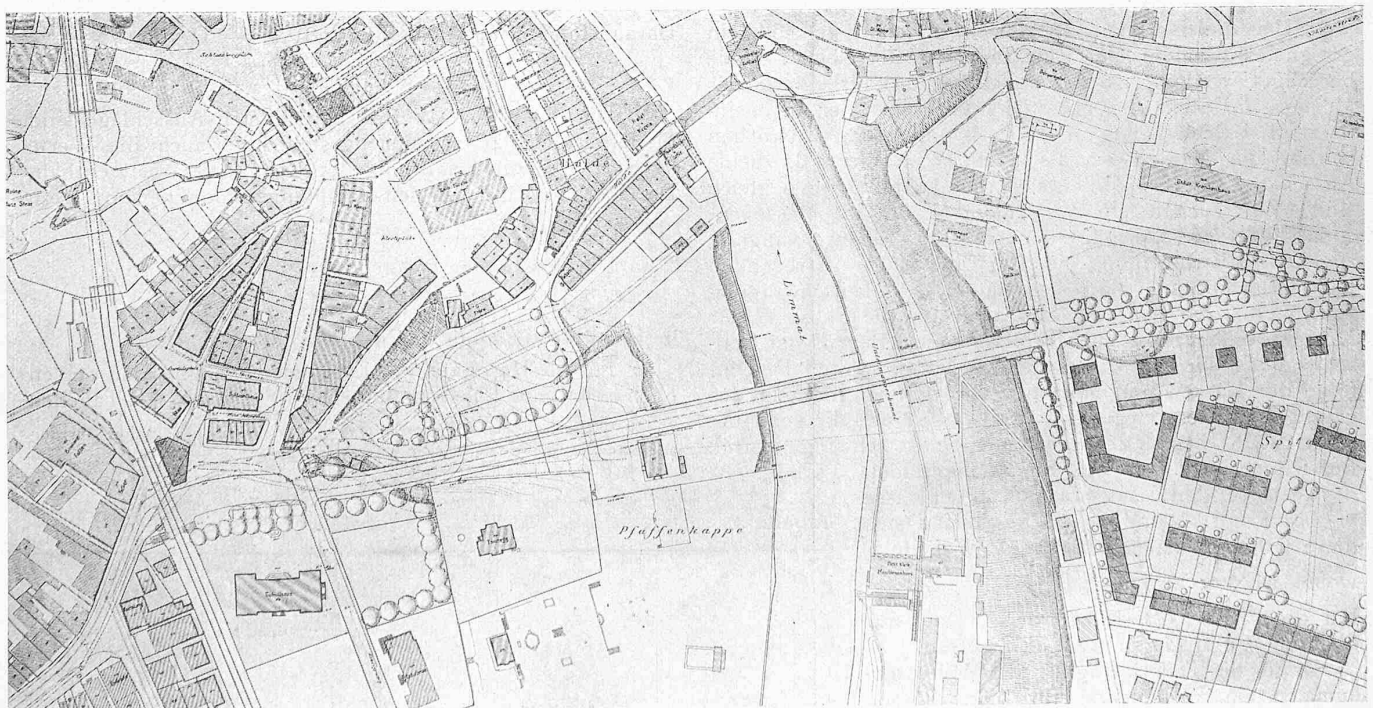
ermittelten Winkelausschläge der Resonanz und zwar einmal ohne Zusatzmoment, das andere Mal mit einem Zusatzmoment am Luftpumpen-Wellenende. Die Phase  $\alpha$  der Ausschläge ist mit den Momenten gleichphasig, die Phase  $\beta$  um den Schwingungszeitwinkel  $\pi/2$  gegen die Momente verschoben.

Tabelle 1.  $\omega^2 = 49840$ ;  $\omega = 223,25$ ;  $GJ = 10^{10}$ .

| Ordn.-<br>zahl<br>$h$ | Massen-<br>zahl<br>$m$ | Dämpf.-<br>zahl<br>$k$ | Elast.<br>Länge<br>$l$ | Erreger-<br>Moment<br>$M$ | Ohne Zusatzmoment-<br>Ausschläge |              | Mit Zusatzmoment-<br>Ausschläge |              |
|-----------------------|------------------------|------------------------|------------------------|---------------------------|----------------------------------|--------------|---------------------------------|--------------|
|                       |                        |                        |                        |                           | $10^6 \alpha$                    | $10^6 \beta$ | $10^6 \alpha$                   | $10^6 \beta$ |
| 1                     | 2200                   | 1600                   | 142                    | —                         | 46                               | 18007        | 0                               | 0            |
| 2                     | 3000                   | 100                    | 57,5                   | —                         | -117                             | -10030       | 0                               | 0            |
| 3                     | 93                     | 800                    | 48,5                   | 4500                      | -81                              | -12760       | 0                               | 0            |
| 4                     | 93                     | 800                    | 48,5                   | 4500                      | -60                              | -14776       | -21,8                           | 0            |
| 5                     | 93                     | 800                    | 48,5                   | 4500                      | -46                              | -16459       | -65,0                           | 0            |
| 6                     | 93                     | 800                    | 48,5                   | 4500                      | -39                              | -17773       | -128,5                          | -0,1         |
| 7                     | 93                     | 800                    | 48,5                   | 4500                      | -37                              | -18688       | -211,0                          | -0,3         |
| 8                     | 93                     | 800                    | 77                     | 4500                      | -41                              | -19182       | -310,5                          | -0,6         |
| 9                     | 7                      | 60                     | 150                    | -500                      | -53                              | -19282       | -492,1                          | -1,6         |
| 10                    | 6,5                    | 60                     | —                      | -500                      | -64                              | -19376       | -835,8                          | -3,6         |

Man erkennt aus der Zusammenstellung folgendes: Bei der Resonanz ohne Zusatzmoment ist die Phase  $\beta$  der Ausschläge von überragender Grösse, sodass diese Werte sehr genau zugleich die Gesamtausschläge darstellen. Mit Zusatzmoment ist die Phase  $\alpha$  der Ausschläge von solcher Grösse, dass daneben die Phase  $\beta$  praktisch belanglos ist. Es schwingen also beim Zusatzmomente die Massen (wegen des Minus-Zeichens der Phase  $\alpha$ ) fast genau entgegengesetzt zu den Momenten, während bei der gewöhnlichen Resonanz ein Phasenunterschied von fast genau  $\pi/2$  zwischen Ausschlägen und Momenten besteht. Der Vergleich der Ausschläge in beiden Fällen, die der unmittelbaren Anschaulichkeit halber in Abbildung 1 nochmals im gleichen Masstab dargestellt sind, zeigt die gewaltige Verbesserung des Resonanz-Zustandes durch das Zusatzmoment aufs Deutlichste. Aus dem Bild erkennt man aber auch, dass die Schwingungsformen ohne und mit Zusatzmoment nicht die geringste Aehnlichkeit mehr besitzen; die erste entspricht fast genau der Eigenschwingungsform, die letzte dagegen der Teilschwingungsform.

Die viel verbreitete Ansicht und für Näherungsberechnungen gemachte Annahme, dass für die Resonanz das Verhältnis der Ausschläge sehr genau dem der Eigen-



Angekaufter Entwurf Nr. 1. Lageplan 1 : 3500, mit einzigem Vorschlag zur Erweiterung der Stadtturm-Passage (oben links).



schwingung entspricht, trifft also im Falle des Zusatzmomentes nicht im entferntesten mehr zu.

Im vorgeführten Beispiel sind die erregenden Drehmomente sämtlich phasengleich. Wie die Zusatzmomente bei beliebig gegebenen Phasen der Erregenden zu bestimmen sind und wie die Resonanzschwingungsform dabei von der Dämpfung abhängt, soll an einem weiteren allgemeinen, möglichst einfachen Beispiel gezeigt werden.

Es sei eine Welle mit vier Massen gegeben, deren Trägheitsmomente  $m_1 = 1 m$ ;  $m_2 = 2 m$ ;  $m_3 = 3 m$ ;  $m_4 = 3/2 m$  und deren elastische Längen zwischen den Massen bzw.  $l_{1,2} = 3 l$ ;  $l_{2,3} = 2 l$ ;  $l_{3,4} = 2 l$  seien (wobei  $m$  irgend ein Trägheitsmoment in  $kg\ cm^2\ sek^2$  und  $l$  eine beliebige Länge in  $cm$ ). Dieses System besitzt eine Eigenschwingung zweiten Grades, für deren Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  der Ausdruck gilt:

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \frac{GJ}{lm}$$

( $G$  Schubmodul des Wellenbaustoffs in  $kg\ cm^{-2}$ ,  $J$  polares Trägheitsmoment des Wellenquerschnittes in  $cm^4$ ) wie nachstehende Tabelle 2 beweist, die auch die Eigenschwingungsform nach Abbildung 2 (S. 313) liefert.

Tabelle 2.  $\omega^2 = 0,5 \frac{GJ}{lm} \equiv 0,5 \frac{c}{m}$

| $h$ | $m_h$ | $m_h \omega^2$ | $a_h$      | $m_h \omega^2 a_h$ | $\Sigma_h$    | $l_{h,h+1}$ | $\frac{l_{h,h+1}}{GJ} \Sigma_h$ |
|-----|-------|----------------|------------|--------------------|---------------|-------------|---------------------------------|
| 1   | 1 m   | 0,5 c          | $a_1$      | $0,5 a_1 c$        | $0,5 a_1 c$   | 3 l         | $1,5 a_1$                       |
| 2   | 2 m   | 1 c            | $-0,5 a_1$ | $-0,5 a_1 c$       | 0             | 2 l         | 0                               |
| 3   | 3 m   | 1,5 c          | $-0,5 a_1$ | $-0,75 a_1 c$      | $-0,75 a_1 c$ | 2 l         | $-1,5 a_1$                      |
| 4   | 1,5 m | 0,75 c         | $+1 a_1$   | $+0,75 a_1 c$      | 0             | —           | —                               |

Für die Berechnung dieser und der folgenden Tabellen gelten ausser den über den einzelnen Reihen angegebenen Vorschriften die Gleichungen:

$$\Sigma_{h+1} = m_{h+1} \omega^2 a_{h+1} + \Sigma_h \quad \dots \quad (1)$$

$$a_{h+1} = a_h - \frac{l_{h,h+1}}{GJ} \Sigma_h \quad \dots \quad (2)$$

An dieser Welle wirken auf die Massen  $m_2$  und  $m_3$  gegebene erregende harmonische Drehmomente von der Periode der zweiten Eigenschwingung; ihre Phasenamplituden (in  $kg\ cm$ ) seien bzw.:

$$A_2 = 1 A \quad A_3 = -2 A \quad B_2 = 0 \quad B_3 = 1 B$$

Um die Resonanz gefahrlos zu machen, soll ein geeignetes harmonisches Zusatzmoment derselben Periode berechnet werden. Da der günstigste Ort für ein solches Moment die Stelle des grössten Ausschlages der zu beeinflussenden Schwingung ist<sup>1)</sup>, so könnten wir als solchen sowohl die Massen  $m_1$  als auch  $m_4$  wählen, da beide Ausschläge gemäss Zahlentafel 1 und Abbildung 2 gleich sind. Wir suchen ein Zusatzmoment für die Masse  $m_4$ , sodass für die Periode der zweiten Eigenschwingung zugleich Teilschwingung eintritt. Da aber die Erregenden nicht gleichphasig sind, so muss die Teilschwingung sowohl für die Phase  $A$ , als auch für die Phase  $B$  der Momente gleichzeitig auftreten. Nach dem Begriff der Teilschwingung bleiben dabei die in der gewählten Reihenfolge der Massen und Momente vor der Angriffstelle des ersten Momentes gelegenen freien Massen und die genannte Angriffstelle des ersten Momentes selbst schwingungsfrei. Bezeichnen wir also die Phasenamplituden des zu suchenden Zusatzmoments an der Masse  $m_4$  bzw. mit  $A_4$  und  $B_4$ , so bestimmen sich diese Grössen aus nebenstehender Tabelle 3, wobei wir zur Abkürzung  $\frac{GJ}{l} \equiv c$  setzen. Für die Phase  $\beta$ ,  $B$  sind in dieser Tafel nur  $a$  durch  $\beta$  und  $A$  durch  $B$  zu ersetzen.

Da für die Teilschwingung die Momentensummen am Wellenende für beide Phasen

<sup>1)</sup> Holzer, «Drehschwingungen» S. 66.

verschwinden müssen, ergeben sich die Gleichungen:

$$-0,5 A_2 - 0,5 A_3 + A_4 = 0$$

$$-0,5 B_2 - 0,5 B_3 + B_4 = 0$$

aus denen  $A_4$  und  $B_4$  berechnet werden können. Mit den obengenannten Werten der Erregungen findet man:

$$A_4 = 0,5 (A_2 + A_3) = -0,5 A$$

$$B_4 = 0,5 (B_2 + B_3) = 0,5 B$$

Damit ist das Zusatzmoment an der Masse  $m_4$  vollständig bestimmt. Die Ausschläge  $a$  (bzw.  $\beta$ ) in Tabelle 3 liefern gleichzeitig die Teilschwingungsformen, die in Abbildung 3 dargestellt sind.

Wie gehen nun an die Aufgabe, die Resonanzschwingungsform der Welle einmal ohne und einmal mit diesem Zusatzmoment zu berechnen. Da die Rechnung im ersten Fall unendlich grosse Ausschläge liefern würde, rechnen wir beide Fälle mit Berücksichtigung der Dämpfung, und zwar mögen nur äussere Dämpfungen an jeder Masse wirken, deren Dämpfungszahlen  $k\omega$  gegeben seien wie folgt:

$$k_1 \omega = 0,002 m_1 \omega^2 = 0,001 c; \quad k_2 \omega = 0,001 m_2 \omega^2 = 0,001 c; \\ k_3 \omega = 0,01 m_3 \omega^2 = 0,015 c; \quad k_4 \omega = 0,004 m_4 \omega^2 = 0,003 c.$$

Die Berechnung trennen wir in üblicher Weise in die nur vom Ausschlag der ersten Masse herrührenden Anteile (Tabelle 4a) und in die nur von den Momenten erzeugten Anteile (Tabelle 4b)<sup>1)</sup>.

Die Tabellen sind nur für die Phase  $a$  bzw.  $A$  berechnet, weil die der Phase  $\beta$ , bzw.  $B$  daraus unmittelbar gewonnen wird, indem man  $a$  durch  $\beta$ ,  $\beta$  durch  $-a$ ,  $A$  durch  $B$  und  $B$  durch  $-A$  ersetzt, entsprechend einer Drehung aller Vektoren um  $\pi/2$ , wodurch sich die Grössen in der beschriebenen Weise verändern.

Die Gesamtsumme der Momente muss für das Wellenende wieder Null werden. Daher liefern die Tabellen 4a und 4b die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} -0,00003450054 a_1 c + 0,008000243 \beta_1 c - 0,50018 A_2 - \\ - 0,5 A_3 + A_4 + 0,021 B_2 - 0,006 B_3 = 0 \\ -0,00003450054 \beta_1 c - 0,008000243 a_1 c - 0,50018 B_2 - \\ - 0,5 B_3 + B_4 - 0,021 A_2 + 0,006 A_3 = 0 \end{aligned} \right\} (3)$$

Für die Resonanz ohne Zusatzmoment ist nur  $A_4 = B_4 = 0$  zu setzen und mit Einführung der gegebenen Werte

$$A_2 = A \quad A_3 = -2 A \quad B_2 = 0 \quad B_3 = +B$$

$$\text{erhält man:} \\ -0,00003450054 a_1 c + 0,008000243 \beta_1 c + 0,49982 A - 0,006 B = 0 \\ -0,00003450054 \beta_1 c - 0,008000243 a_1 c - 0,5 B - 0,033 A = 0$$

$$\text{Daraus folgt:} \quad a_1 = -3,855381 \frac{A}{c} - 62,500173 \frac{B}{c} \\ \beta_1 = -62,492228 \frac{A}{c} + 0,480449 \frac{B}{c}$$

Die mit diesen Werten berechneten Ausschläge sind in der Tabelle 4c zusammengestellt, die auch die Werte  $a^2 + \beta^2 = \gamma^2$  zur Ermittlung der Dämpfungsarbeit enthält. Diese Arbeit wird aus den Dämpfungszahlen gewonnen zu

$$\pi \Sigma (k\omega \gamma^2) = \pi \left( 31,27385 \frac{A^2}{c} + 31,25142 \frac{B^2}{c} \right)$$

Die Arbeit der erregenden Momente ist

$$\pi \Sigma (a B - \beta A) = \pi \left( 31,27385 \frac{A^2}{c} + 31,25142 \frac{B^2}{c} \right)$$

in Uebereinstimmung mit der Dämpfungsarbeit.

Für die Resonanz mit Zusatzmoment sind nur dessen oben ermittelte Phasenamplituden in die aus den Tabellen

<sup>1)</sup> Die Tabellen sind zur Erzielung grösster Genauigkeit ohne Kürzung auf eine bestimmte Stellenzahl gerechnet.

Tabelle 3.  $\omega^2 = 0,5 \frac{c}{m}$

| $m \omega^2$ | $a$                 | $m \omega^2 a + A$      | $\Sigma$                   | $l_{h,h+1}$ | $\frac{l_{h,h+1}}{l} \frac{\Sigma}{c}$ |
|--------------|---------------------|-------------------------|----------------------------|-------------|--|
| 0,5 c        | —                   | —                       | —                          | 3 l         | —                                      |
| 1 c          | —                   | $A_2$                   | $A_2$                      | 2 l         | $2 A_2 : c$                            |
| 1,5 c        | $-2 A_2 : c$        | $-3 A_2 + A_3$          | $-2 A_2 + A_3$             | 2 l         | $(-4 A_2 + 2 A_3) : c$                 |
| 0,75 c       | $2 (A_2 - A_3) : c$ | $1,5 (A_2 - A_3) + A_4$ | $-0,5 A_2 - 0,5 A_3 + A_4$ | —           | —                                      |

Tabelle 4a.

$$\omega^2 = 0,5 \frac{c}{m}$$

| $m \omega^2$ | $k \omega$ | $a$   | $m \omega^2 \alpha$               | $+ k \omega \beta$  | $\Sigma$  | $l$ | $\frac{l \Sigma}{GJ}$                          |
|--------------|------------|---|-----------------------------------|---|---|-----|--|
| 0,5 c        | 0,001 c    | $\alpha_1$<br>—                                 | $0,5 \alpha_1 c$                  | $+ 0,001 \beta_1 c$   | $0,5 \alpha_1 c$<br>$+ 0,001 \beta_1 c$                 | 3 l | $1,5 \alpha_1$<br>$+ 0,003 \beta_1$            |
| 1 c          | 0,001 c    | $-0,5 \alpha_1$<br>$- 0,003 \beta_1$            | $(-0,5$<br>$- 0,003$              | $+ 0,000003) \alpha_1 c$<br>$- 0,0005) \beta_1 c$           | $0,000003 \alpha_1 c$<br>$- 0,0025 \beta_1 c$           | 2 l | $0,000006 \alpha_1$<br>$- 0,005 \beta_1$       |
| 1,5 c        | 0,015 c    | $-0,500006 \alpha_1$<br>$+ 0,002 \beta_1$       | $(-0,750009$<br>$+ 0,003$         | $- 0,000030) \alpha_1 c$<br>$- 0,00750009) \beta_1 c$       | $-0,750036 \alpha_1 c$<br>$- 0,00700009 \beta_1 c$      | 2 l | $-1,500072 \alpha_1$<br>$- 0,01400018 \beta_1$ |
| 0,75 c       | 0,003 c    | $+ 1,000066 \alpha_1$<br>$+ 0,01600018 \beta_1$ | $(+ 0,7500495$<br>$+ 0,012000135$ | $- 0,00001800054) \alpha_1 c$<br>$+ 0,003000198) \beta_1 c$ | $-0,0003450054 \alpha_1 c$<br>$+ 0,008000243 \beta_1 c$ | —   | —  |

Tabelle 4b.

$$\omega^2 = 0,5 \frac{c}{m}$$

| $m \omega^2$ | $k \omega$ | $a$                                       | $m \omega^2 a$                     | $+ k \omega \beta$                       | $+ A$   | $\Sigma$  | $l$ | $\frac{l \Sigma}{GJ}$                      |
|--------------|------------|---|------------------------------------|--|---------|---|-----|--|
| 0,5 c        | 0,001 c    | —   | —                                  | —  | —       | —   | 3 l | —  |
| 1 c          | 0,001 c    | —   | —                                  | —  | $A_2$   | $A_2$   | 2 l | $2 A_2 : c$                                |
| 1,5 c        | 0,015 c    | $-2 A_2 : c$<br>—                         | $-3 A_2$                           | —  | $+ A_3$ | $-2 A_2 + A_3$<br>$- 0,03 B_2$                              | 2 l | $(-4 A_2 + 2 A_3) : c$<br>$- 0,06 B_2 : c$ |
| 0,75 c       | 0,003 c    | $(2 A_2 - 2 A_3) : c$<br>$+ 0,06 B_2 : c$ | $1,5 (A_2 - A_3)$<br>$+ 0,045 B_2$ | $- 0,00018 A_2$<br>$+ 0,006 (B_2 - B_3)$ | $+ A_4$ | $-0,50018 A_2 - 0,5 A_3 + A_4$<br>$+ 0,021 B_2 - 0,006 B_3$ | —   | —  |

4a und 4b gewonnenen Gleichungen (3) einzusetzen, die damit lauten:

$$-0,00003450054 \alpha_1 c + 0,008000243 \beta_1 c - 0,00018 A - 0,006 B = 0$$

$$-0,00003450054 \beta_1 c - 0,008000243 \alpha_1 c - 0 B - 0,033 A = 0$$

Die Auflösung ergibt

$$\alpha_1 = -4,124895 \frac{A}{c} - 0,003234 \frac{B}{c}$$

$$\beta_1 = +0,004711 \frac{A}{c} + 0,749963 \frac{B}{c}$$

Die daraus gerechneten Ausschläge zeigt Tabelle 4d. Die Rechnungsprüfung an der Dämpfungsarbeit liefert:

$$\Sigma(k\omega\gamma^2) = \Sigma(aB - \beta A) = 0,0318739 \frac{A^2}{c^2} + 0,0074996 \frac{B^2}{c}$$

Man erkennt aus dem Vergleich sowohl der Ausschläge als auch der entsprechenden Ausdrücke für die

nen wir es aber unmittelbar mit Berücksichtigung der Dämpfung, so liefert die Tabelle 4b die Gleichungen:

$$-0,50018 A_2 - 0,5 A_3 + A_4 + 0,021 B_2 - 0,006 B_3 = 0$$

$$-0,50018 B_2 - 0,5 B_3 + B_4 - 0,021 A_2 + 0,006 A_3 = 0$$

woraus mit den gegebenen Werten der Erregenden gefunden wird:

$$A_4 = -0,49982 A + 0,006 B$$

$$B_4 = +0,033 A + 0,5 B$$

Damit aber berechnen sich die Ausschläge  $\alpha_1 = \beta_1 = 0$  und wir erhalten für die Ausschläge die Tabelle 4e. Die Prüfung auf Dämpfungsarbeit ergibt die Uebereinstimmung:

$$\Sigma(k\omega\gamma^2) = \Sigma(aB - \beta A) = 0,1680108 \frac{A^2}{c^2} + 0,00072 \frac{AB}{c} + 0,012 \frac{B^2}{c}$$

Die Resonanzschwingungsformen für das so berechnete Zusatzmoment sind genau die der zugehörigen Teil-

Dämpfungsarbeit mit dem Fall der gewöhnlichen Resonanz wiederum die erhebliche Verbesserung des Resonanz-Zustandes durch das Zusatzmoment. Die Beispiele gelten für beliebig wählbare Werte  $A$  und  $B$ . Für den Fall  $A = B$  sind die Schwingungsformen  $a$  und  $\beta$  (mit Zusatzmoment) in Abbildung 4, maßstäblich gleich, dargestellt. Wie man bemerkt, weichen diese Schwingungsformen wesentlich von den üblichen ab, indem die aufeinander folgenden Seiten sogar überstumpfe Winkel bilden, und sie zeigen weder mit der Eigenschwingungs-Form (Abb. 2) noch mit den Teilschwingungs-Formen (Abbildung 3) irgend eine Ähnlichkeit.

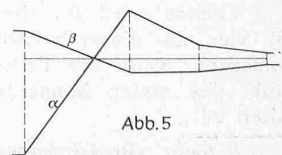
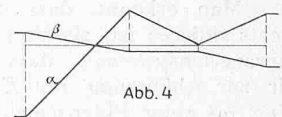
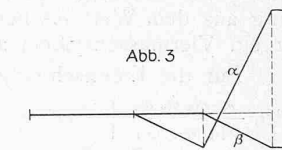
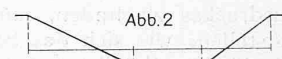
Wir hatten das Zusatzmoment aus der Teilschwingung ohne Dämpfung bestimmt. Berechnung

Tabelle 4c.

| $a$  | $\beta$  | $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$  |
|--|--|--|
| $-3,855381 \frac{A}{c} - 62,500173 \frac{B}{c}$  | $-62,492228 \frac{A}{c} + 0,480449 \frac{B}{c}$  | $3920,143 \frac{A^2}{c^2} + 2 \cdot 210,938 \frac{AB}{c^2} + 3906,502 \frac{B^2}{c^2}$ |
| $+ 2,115168 \frac{A}{c} + 31,248646 \frac{B}{c}$ | $+ 31,234548 \frac{A}{c} - 0,427725 \frac{B}{c}$ | $980,071 \frac{A^2}{c^2} + 2 \cdot 51,736 \frac{AB}{c^2} + 976,661 \frac{B^2}{c^2}$    |
| $-0,97271 \frac{A}{c} + 31,251423 \frac{B}{c}$   | $+ 31,254200 \frac{A}{c} - 0,115227 \frac{B}{c}$ | $976,864 \frac{A^2}{c^2} - 2 \cdot 9,766 \frac{AB}{c^2} + 976,665 \frac{B^2}{c^2}$     |
| $+ 1,144478 \frac{A}{c} - 62,496611 \frac{B}{c}$ | $-62,494665 \frac{A}{c} - 0,519505 \frac{B}{c}$  | $3906,873 \frac{A^2}{c^2} - 2 \cdot 39,060 \frac{AB}{c^2} + 3906,096 \frac{B^2}{c^2}$  |

Tabelle 4d.

| $a$   | $\beta$   | $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$   |
|---|---|---|
| $-4,124895 \frac{A}{c} - 0,003234 \frac{B}{c}$  | $+ 0,004711 \frac{A}{c} + 0,749963 \frac{B}{c}$ | $17,01478 \frac{A^2}{c^2} + 2 \cdot 0,01687 \frac{AB}{c^2} + 0,56246 \frac{B^2}{c^2}$ |
| $+ 2,062433 \frac{A}{c} - 0,006328 \frac{B}{c}$ | $-0,014730 \frac{A}{c} - 0,374991 \frac{B}{c}$  | $4,25385 \frac{A^2}{c^2} + 2 \cdot 0,00422 \frac{AB}{c^2} + 0,14062 \frac{B^2}{c^2}$  |
| $+ 0,062482 \frac{A}{c} + 0,031170 \frac{B}{c}$ | $+ 0,005894 \frac{A}{c} - 0,374980 \frac{B}{c}$ | $0,00394 \frac{A^2}{c^2} - 2 \cdot 0,00202 \frac{AB}{c^2} + 0,14062 \frac{B^2}{c^2}$  |
| $+ 1,874908 \frac{A}{c} + 0,087631 \frac{B}{c}$ | $+ 0,010710 \frac{A}{c} - 1,249935 \frac{B}{c}$ | $3,51540 \frac{A^2}{c^2} + 2 \cdot 0,00305 \frac{AB}{c^2} + 1,56242 \frac{B^2}{c^2}$  |



schwingungen mit Dämpfung (und damit auch fast genau die der dämpfungsfreien Teilschwingungen, da die Dämpfung in praktischen Fällen immer klein ist). Bezeichnen wir der Kürze halber den Fall des Zusammentreffens einer Teilschwingung mit einer Eigenschwingung als *Teilresonanz*, so erhalten wir den Satz:

*Die Schwingungsformen der gedämpften Teilresonanz sind genau jene der gedämpften Teilschwingungen, wenn die Phasen des Zusatzmomentes aus den Teilschwingungen mit Berücksichtigung der Dämpfung bestimmt werden.*

Tabelle 4e.

| $\alpha$         | $\beta$                             | $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$                                     |
|------------------|-------------------------------------|---|
| 0                | 0                                   | 0   |
| 0                | 0                                   | 0   |
| $-2 \frac{A}{c}$ | 0                                   | $\frac{A^2}{c^2}$   |
| $+6 \frac{A}{c}$ | $-0,06 \frac{A}{c} - 2 \frac{B}{c}$ | $36,0036 \frac{A^2}{c^2} + 0,24 \frac{AB}{c^2} + 4 \frac{B^2}{c^2}$ |

Um den Einfluss der Dämpfung auf die Schwingungsformen der Teilresonanz zu übersehen, habe ich die Berechnung für das (ohne Dämpfung berechnete) Zusatzmoment nochmals mit den Dämpfungszahlen

$$k_1 \omega = k_2 \omega = 0$$

$$k_3 \omega = 0,001 c, \quad k_4 \omega = 0,001 c$$

durchgeführt, und die in Abb. 5 (S. 313) gezeigten Schwingungsformen gefunden (für  $A=B$ ). Abbildung 5, die Längen und Ausschläge im gleichen Masstab wie Abbildung 4 hat, lässt erkennen, dass sich nicht nur die Grösse der Ausschläge, sondern auch die Gestalt der Schwingungsformen mit der Dämpfung ändert. Daher ist die Ermittlung der Schwingungsformen bei gänzlich fehlender Dämpfung von grossem theoretischem Interesse, da ja die entsprechenden Ausschläge bei der gewöhnlichen Resonanz, für die die Uebereinstimmung von Teil- und Eigenschwingungszahl nicht besteht, bekanntlich unendlich gross werden.

Wollten wir für das völlig dämpfungsfreie System die Gleichung für die Momentensumme in der bisherigen Weise, jetzt aber aus den Tabellen 2 und 3 anschreiben, so fänden wir:

$$0 \cdot \alpha_1 c + [-0,5 A_2 - 0,5 A_3 + A_4] = 0$$

Da aber der eingeklammerte, der Teilschwingung entsprechende Teil von selbst verschwindet, so wird  $\alpha_1 = \frac{0}{c}$ , also unbestimmt. Um den Grenzwert dieses Ausdruckes zu finden, müssen wir auf *allgemeine* Weise feststellen, wie sich das Summenmoment am Wellenende sowohl für die Eigenschwingung wie für die Teilschwingung aus dem Wert  $\omega^2$  herleitet. Ich will diese Ausdrücke für ein Viermassensystem anschreiben.

Für die Eigenschwingung wird die Endsumme

$$\omega^2 \alpha_1 \frac{m_1 m_2 m_3 m_4}{c_{1,2} c_{2,3} c_{3,4}} \left[ -\omega^6 + \omega^4 \left( c_{1,2} \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} + c_{2,3} \frac{m_2 + m_3}{m_2 m_3} + c_{3,4} \frac{m_3 + m_4}{m_3 m_4} \right) - \omega^2 \left( c_{1,2} c_{2,3} \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3} + c_{1,2} c_{3,4} \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \frac{m_3 + m_4}{m_3 m_4} + c_{2,3} c_{3,4} \frac{m_2 + m_3 + m_4}{m_2 m_3 m_4} \right) + c_{1,2} c_{2,3} c_{3,4} \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{m_1 m_2 m_3 m_4} \right] \quad (5)$$

Man erkennt, dass der Klammerfaktor = 0 gesetzt nichts anderes ist, als die Eigenschwingungs-Gleichung des Viermassensystems<sup>1)</sup>, dass also auch dieser Faktor, den wir zur Abkürzung mit  $E$  bezeichnen wollen, für jeden Wert  $\omega^2$  einer Eigenschwingung verschwindet.

Ebenso wird für die Teilschwingung eines Systems mit vier an dieser Schwingung beteiligten Massen und Momenten, wenn der Teilschwingungsknoten im Angriffspunkt des ersten Momentes  $M_1$  liegt, die Endsumme erhalten zu:

<sup>1)</sup> Holzer, «Drehschwingungen» (Gl. 45a).

$$M_1 \frac{m_2 m_3 m_4}{c_{1,2} c_{2,3} c_{3,4}} \left[ -\omega^6 + \omega^4 \left( c_{1,2} \frac{M_1 + M_2}{M_1 m_2} + c_{2,3} \frac{m_2 + m_3}{m_2 m_3} + c_{3,4} \frac{m_3 + m_4}{m_3 m_4} \right) - \omega^2 \left( c_{1,2} c_{2,3} \frac{M_1 + M_2 + M_3}{M_1 m_2 m_3} + c_{1,2} c_{3,4} \frac{M_1 + M_2}{M_1 m_2} \frac{m_3 + m_4}{m_3 m_4} + c_{2,3} c_{3,4} \frac{m_2 + m_3 + m_4}{m_2 m_3 m_4} \right) + c_{1,2} c_{2,3} c_{3,4} \frac{M_1 + M_2 + M_3 + M_4}{M_1 m_2 m_3 m_4} \right] \quad (6)$$

Der Klammerfaktor, den wir mit  $T$  bezeichnen wollen, wird 0 für jeden Wert  $\omega^2$  einer Teilschwingung, da  $T=0$  nichts anderes ist, als die Teilschwingungsgleichung<sup>1)</sup>.

Zur Bestimmung des Ausschlages  $\alpha_1$  der ersten Masse erhalten wir demnach eine Schlussgleichung von der Form:

$$\omega^2 \alpha_1 \frac{m_1 m_2 m_3 m_4}{c_{1,2} c_{2,3} c_{3,4}} E + \frac{M_1 m_2 m_3 m_4}{c_{1,2} c_{2,3} c_{3,4}} T = 0 \quad (7)$$

oder:

$$\alpha_1 = - \frac{M_1}{m_1 \omega^2} \frac{T}{E}$$

Für den Fall der *Teilresonanz* wird sowohl  $T$ , wie  $E=0$  und der unbestimmte Wert  $\frac{T}{E}$  wird nach bekannten Regeln der Analysis gefunden. Wenn nämlich  $\omega_0^2$  der gemeinschaftliche Wert ist, der sowohl der Eigen-, wie der Teilschwingung zukommt, so ist  $\omega_0^2$  eine Wurzel sowohl der Gleichung  $T=0$ , als auch der Gleichung  $E=0$  und die Ausdrücke  $T$  und  $E$  sind durch  $\omega^2 - \omega_0^2$  ohne Rest teilbar. Nennen wir die Quotienten  $T'$  bzw.  $E'$ , so gelten die Definitionen:

$$\left. \begin{aligned} T' &= \frac{T}{\omega^2 - \omega_0^2} \\ E' &= \frac{E}{\omega^2 - \omega_0^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

und der unbestimmte Ausdruck  $\frac{T}{E} = \frac{0}{0}$  verwandelt sich in den bestimmten  $\frac{T'}{E'} = \left( \frac{T'}{E'} \right)_{\omega^2 = \omega_0^2}$ . Bekanntlich lässt sich dieser Grenzwert auch in der Weise finden, dass man Zähler und Nenner des unbestimmten Bruches  $\frac{T}{E}$  nach  $\omega^2$  differenziert, was auf dasselbe herauskommt:

$$\frac{T}{E} = \frac{\frac{dT}{d\omega^2}}{\frac{dE}{d\omega^2}} = \left( \frac{T'}{E'} \right)_{\omega^2 = \omega_0^2} \dots \dots \dots (9)$$

Diese Erkenntnisse wenden wir nunmehr auf unser Beispiel an. Die Eigenschwingungsgleichung für unser Viermassensystem lautet (die ungeraden Potenzen von  $\omega^2$  mit dem negativen Zeichen):

$$E = -\omega^6 + \omega^4 \left( \frac{c}{3} \frac{1+2}{1 \cdot 2 m} + \frac{c}{2} \frac{2+3}{2 \cdot 3 m} + \frac{c}{2} \frac{3+1,5}{2 \cdot 3 \cdot 1,5 m} \right) - \omega^2 \left( \frac{c c}{3 \cdot 2} \frac{1+2+3}{1 \cdot 2 \cdot 3 m^2} + \frac{c c}{3 \cdot 2} \frac{1+2}{1 \cdot 2 m} \frac{3+1,5}{3 \cdot 1,5 m} + \frac{c c}{2 \cdot 2} \frac{2+3+1,5}{2 \cdot 3 \cdot 1,5 m^2} \right) + \frac{c c c}{3 \cdot 2 \cdot 2} \frac{1+2+3+1,5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1,5 m^3} = 0$$

oder mit der Abkürzung  $\frac{m \omega^2}{c} \equiv u$ :

$$E = \left( -u^3 + \frac{17}{12} u^2 - \frac{43}{72} u + \frac{5}{72} \right) \left( \frac{c}{m} \right)^3$$

Da in unserem Beispiel  $\omega_0^2 = \frac{1}{2} \frac{c}{m}$ , so lässt sich  $E$

durch  $\omega^2 - \omega_0^2 = \frac{c}{m} \left( u - \frac{1}{2} \right)$  teilen und liefert:

$$E' = \left( -u^2 + \frac{11}{12} u - \frac{5}{36} \right) \left( \frac{c}{m} \right)^2$$

Für  $u = \frac{m}{c} \omega_0^2 = \frac{m}{c} \frac{1}{2} \frac{c}{m} = \frac{1}{2}$  wird daraus  $E' = \frac{5}{72} \left( \frac{c}{m} \right)^2$

Durch Differenzieren hätten wir erhalten:

$$E' = \left[ \left( -3u^2 + \frac{17}{6} u - \frac{43}{72} \right) \left( \frac{c}{m} \right)^2 \right]_{u = \frac{1}{2}} = \frac{5}{72} \left( \frac{c}{m} \right)^2$$

An der Teilschwingung der Phase  $A$  beteiligen sich die drei Massen  $m_2, m_3, m_4$  (Teilknoten in  $m_2$ ) mit den Momenten  $A_2 = 1 A, A_3 = -2 A, A_4 = -\frac{1}{2} A$

Daher wird die Teilschwingungsgleichung ( $A$ ):

$$T_{(A)} = +\omega^4 - \omega^2 \left( \frac{c}{2} \frac{1-2}{1 \cdot 3 m} + \frac{c}{2} \frac{3+1,5}{3 \cdot 1,5 m} \right) + \frac{c c}{2 \cdot 2} \frac{1-2-\frac{1}{2}}{1 \cdot 3 \cdot 1,5 m^2} = 0$$

$$T_{(A)} = \left( u^2 - \frac{1}{3} u - \frac{1}{12} \right) \left( \frac{c}{m} \right)^2$$

<sup>1)</sup> Holzer, «Drehschwingungen» (Gl. 68).



Daher  $T'(A) = \left[ \left( 2u - \frac{1}{3} \right) \frac{c}{m} \right]_u = \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \frac{c}{m}$ .

Für die Phase *B* der Teilschwingung ist wegen  $B_2 = 0$  der Teilknoten erst in  $m_3$ , sodass die Gleichung nur für zwei Massen aufzustellen ist mit den Momenten  $B_3 = 1B$ ;  $B_4 = \frac{1}{2}B$ :

$$T_{(B)} = -\omega^2 + \frac{c}{2 \cdot 1 \cdot 1,5 m} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2}}{1}$$

$$T_{(B)} = \left( -u + \frac{1}{2} \right) \frac{c}{m}$$

$$T'_{(B)} = -1$$

Damit werden die Schlussgleichungen (7):

$$\omega^2 \alpha_1 \frac{m_1 m_2 m_3 m_4}{c_{1,2} c_{2,3} c_{3,4}} E + \frac{A_2 m_3 m_4}{c_{2,3} c_{3,4}} T_{(A)} = 0$$

$$\omega^2 \beta_1 \frac{m_1 m_2 m_3 m_4}{c_{1,2} c_{2,3} c_{3,4}} E + \frac{B_3 m_4}{c_{3,4}} T_{(B)} = 0$$

oder  $\alpha_1 = -\frac{A_2 c_{1,2} T'_{(A)}}{m_1 m_2 \omega^2 E'} = -\frac{1 A \frac{c}{3}}{1 \cdot 2 m^2 \frac{1}{2} \frac{c}{m} \frac{5}{72} \left( \frac{c}{m} \right)^2} = -\frac{16 A}{5 c}$

und  $\beta_1 = -\frac{B_3 c_{1,2} c_{2,3} T'_{(B)}}{m_1 m_2 m_3 \omega^2 E'} = -\frac{1 B \frac{c}{3} \frac{c}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 m^3 \frac{1}{2} \frac{c}{m} \frac{5}{72} \left( \frac{c}{m} \right)^2} = +\frac{4 B}{5 c}$

Mit diesen Werten liefern die Tabellen 2 und 3 die Ausschläge:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -3,2 \frac{A}{c} & \beta_1 &= 0,8 \frac{B}{c} \\ \alpha_2 &= +1,6 \frac{A}{c} & \beta_2 &= -0,4 \frac{B}{c} \\ \alpha_3 &= (+1,6 - 2) \frac{A}{c} = -0,4 \frac{A}{c} & \beta_3 &= -0,4 \frac{B}{c} \\ \alpha_4 &= (-3,2 + 6) \frac{A}{c} = +2,8 \frac{A}{c} & \beta_4 &= (+0,8 - 2) \frac{B}{c} = -1,2 \frac{B}{c} \end{aligned}$$

In Abbildung 6 sind diese Schwingungsformen im gleichen Masstab wie in Abbildung 4 und 5 dargestellt.

Die Richtigkeit muss sich auch hier wieder an der Dämpfungsarbeit erweisen, die jetzt Null ist, sodass auch die Arbeit der harmonischen Momente verschwinden muss:

$$\pi \Sigma (\alpha B - \beta A) = \pi \frac{AB}{c} (-0,4 \cdot 1 + 2,8 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 1 + 0,4 \cdot -2 + 1,2 \cdot -0,5) = 0$$

Damit ist der Beweis erbracht, dass auch bei gänzlich fehlender Dämpfung die Teilresonanz ungefährlich ist.

Unendlich grosse Ausschläge könnten sich theoretisch erst ergeben, wenn der Wert  $\omega_0^2$  der in Frage kommenden Eigenschwingung eine Doppelwurzel der Eigenschwingungsgleichung wäre, weil dann auch  $(E')_{\omega_0^2} = 0$  würde; das ist aber wohl in Wirklichkeit niemals der Fall, da in praktischen Fällen die Eigenschwingungszahlen sämtlich verschieden sind. Hingegen kann aber sehr wohl  $\omega_0^2$  eine Doppelwurzel der Teilschwingungsgleichung sein. In diesem Falle wird auch  $(T')_{\omega_0^2}$  zu Null und der Ausschlag  $\alpha_1$  bzw.  $\beta_1$  selbst wird Null. Daraus folgt der Satz: Die Schwingungsform der ungedämpften Teilresonanz wird mit derjenigen der Teilschwingung gleich, wenn der Wert  $\omega_0^2$  der Teil- und Eigenschwingung eine doppelte oder mehrfache Wurzel der Teilschwingungsgleichung ist.

II. Abstimmung der Phasen der gegebenen erregenden Kräfte auf Teilresonanz.

Das zweite Mittel zur Beseitigung der Resonanzgefahr besteht in der Abstimmung der Phasen der gegebenen Erregungen auf Teilresonanz. Statt eines zusätzlichen Momentes können wir nämlich auch die gegebenen harmonischen Momente, ohne sie in ihrer Grösse zu ändern, in ihren Phasen so gegeneinander einstellen, dass Teilresonanz auftritt. Da die Teilresonanz immer in beiden Phasen gleichzeitig eintreten muss, so müssen mindestens zwei Phasenwinkel als Unbekannte eingeführt werden, und weil die Wahl der Phasen beliebig ist, mindestens drei erregende Momente gegeben sein, um die gewollte Abstimmung treffen zu können. Am Beispiel des im vorigen Abschnitt behandelten Viermassensystems soll dies gezeigt werden.

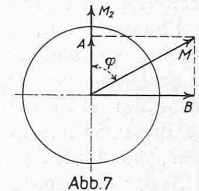
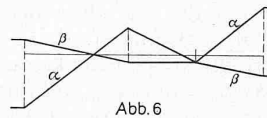
Das System, bestehend aus den Massen  $m_1 = 1 m$ ,  $m_2 = 2 m$ ;  $m_3 = 3 m$ ;  $m_4 = \frac{3}{2} m$  mit den elastischen Längen  $l_{1,2} = 3 l$ ;  $l_{2,3} = 2 l$ ;  $l_{3,4} = 2 l$  hat eine Eigenschwingungszahl, für die  $\omega_0^2 = \frac{1}{2} \frac{c}{m}$  ist. An den Massen  $m_2$ ,  $m_3$  und  $m_4$  wirken erregende Momente von der Periode dieser Eigenschwingung von der gegebenen Grösse  $M_2$ ,  $M_3$  und  $M_4$ . Welche Phasenwinkel  $\varphi_3$ ,  $\varphi_4$  müssen die Momente  $M_3$  und  $M_4$  gegen  $M_2$  erhalten, damit Teilresonanz erzielt wird? Wir wollen der Einfachheit halber das ungedämpfte System behandeln; der Berechnungsgang für das gedämpfte System ist grundsätzlich nicht davon verschieden. Für die Teilschwingung gilt also wieder Tabelle 3 und für die Eigenschwingung Tabelle 2. Aus der ersten hatten wir für die Phasen *A* und *B* der Momente die Gleichungen;

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} A_2 - \frac{1}{2} A_3 + A_4 &= 0 \\ -\frac{1}{2} B_2 - \frac{1}{2} B_3 + B_4 &= 0 \end{aligned}$$

Da wir die Phasen auf das Moment  $M_2$  beziehen wollen, so setzen wir  $A_2 = M_2$ ;  $B_2 = 0$ . Ist  $\varphi$  der Phasenwinkel eines andern Momentes  $M$  gegen  $M_2$ , so sind dessen auf  $M_2$  bezogene Phasen  $A = M \cos \varphi$ ;  $B = M \sin \varphi$ , wie aus Abbildung 7 hervorgeht. Damit werden die Teilschwingungsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{2} M_3 - \frac{1}{2} M_3 \cos \varphi_3 + M_4 \cos \varphi_4 &= 0 \\ -\frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2} M_3 \sin \varphi_3 + M_4 \sin \varphi_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Das sind zwei Gleichungen zur Bestimmung von  $\varphi_3$  und  $\varphi_4$ .



Man erhält aus der zweiten Gleichung:

$$\sin \varphi_4 = \frac{1}{2} \frac{M_3}{M_4} \sin \varphi_3$$

also auch  $\cos \varphi_4 = \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left( \frac{M_3}{M_4} \right)^2 \sin^2 \varphi_3}$ .

Damit wird aus der ersten Gleichung:

$$M_4 \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left( \frac{M_3}{M_4} \right)^2} (1 - \cos^2 \varphi_3) = \frac{1}{2} M_2 + \frac{1}{2} M_3 \cos \varphi_3$$

oder:

$$\begin{aligned} M_4^2 - \frac{1}{4} M_3^2 (1 - \cos^2 \varphi_3) &= \\ \frac{1}{4} M_2^2 + \frac{1}{2} M_2 M_3 \cos \varphi_3 + \frac{1}{4} M_3^2 \cos^2 \varphi_3 & \end{aligned}$$

daher:

$$\cos \varphi_3 = \frac{M_4^2 - \frac{1}{4} M_3^2 - \frac{1}{4} M_2^2}{\frac{1}{2} M_2 M_3} = \frac{4 M_4^2 - M_3^2 - M_2^2}{2 M_2 M_3}$$

Da  $\cos \varphi_3$ , abgesehen vom Vorzeichen, immer kleiner als 1 sein muss, so folgt als Bedingung für die Möglichkeit der Lösung:

$$\left( \frac{4 M_4^2 - M_3^2 - M_2^2}{2 M_2 M_3} \right)^2 \leq 1 \quad \dots \quad (11)$$

Für  $M_2 = M_3 = M_4$  erhält man z. B.

$$\cos \varphi_3 = +1; \varphi_3 = 0;$$

damit wird  $\sin \varphi_3 = 0$  also auch  $\sin \varphi_4 = 0$ .

Von den beiden Möglichkeiten  $\varphi_4 = 0$  oder  $\pi$  scheidet letzte wegen der ersten Gleichung 10 aus. Die drei gleich grossen Momente müssen also in diesem Falle von gleicher Phase sein.

Wenn sich die Grössen der Momente wie die zugehörigen Massen verhalten, wird  $M_2 = 2 M$ ;  $M_3 = 3 M$ ;  $M_4 = \frac{3}{2} M$ , und man erhält:

$$\cos \varphi_3 = \frac{4 \cdot \left( \frac{3}{2} \right)^2 - 3^2 - 2^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{1}{3}$$

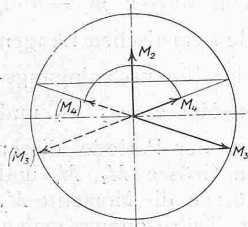


Abb. 8

Dazu liefert die erste Gleichung (10):

$$\cos \varphi_1 = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 - \frac{1}{3}}{\frac{3}{2}} = + \frac{1}{3}$$

Die zweite Gleichung (10) verlangt

$$\sin \varphi_1 = \frac{\frac{1}{2} \cdot 3 \sin \varphi_3}{\frac{3}{2}} = \sin \varphi_3.$$

Das ergibt die in Abbildung 8 dargestellten beiden Möglichkeiten, wobei entweder die ausgezogenen Vektoren  $M_3$  und  $M_4$  oder die punktierten ( $M_3$ ) und ( $M_4$ ) zu  $M_2$  gehören können.

Auf solche Weise könnten beliebig viele Beispiele aufgestellt werden. Immer aber muss die Bedingung der Möglichkeit erfüllt sein, die in diesem Falle lautet:

$$\left. \begin{aligned} 2 M_4 &\leq M_2 + M_3 \\ 2 M_4 &\geq |M_2 - M_3| \end{aligned} \right\} \dots \dots (12)$$

Sind mehr als drei erregende Momente gegeben, so kann man die Phasenwinkel beliebig wählen bis auf zwei, die man in der soeben gezeigten Weise berechnet. Es wird jedoch im allgemeinen fraglich sein, ob man dadurch eine mögliche Lösung erhält. Ein solcher Misserfolg kann leicht vermieden werden, wenn man von folgender Überlegung ausgeht: Für die (dämpfungsfreie) Teilschwingung der Phase  $A$  erhält man eine Schlussgleichung von der Form:  $c_1 A_1 + c_2 A_2 + \dots + c_n A_n = 0 \dots (13)$

Darin sind die Koeffizienten  $c_h$  ganz bestimmte, aus den gegebenen Massen, den elastischen Längen und dem gegebenen Wert  $\omega_0^2$  ermittelte Grössen. Da dieselbe Gleichung mit den nämlichen Koeffizienten  $c_h$  auch für die Phase  $B$  gilt, indem man nur  $A_h$  durch  $B_h$  zu ersetzen braucht, so stellen diese beiden Gleichungen zusammen ein geschlossenes ebenes Vektorpolygon dar, von dem die Grösse der einzelnen Seiten ( $c_h M_h$ ) bekannt ist. Reiht man also diese Seiten in beliebiger Reihenfolge gelenkig aneinander, so bildet jeder geschlossene Linienzug aus diesen Gliedern eine mögliche Lösung. Unter diesem Gesichtswinkel betrachtet, bedeutet die vorher aufgestellte Möglichkeitsbedingung (12) für drei Momente nichts anderes als den Satz, dass die Summe zweier Seiten eines Dreiecks nicht kleiner sein kann als die dritte Seite. Man erkennt auch ohne weiters, dass die Phasenwinkel in Bezug auf irgend einen gewählten Vektor positiv oder negativ sein können, indem sich im andern Fall immer das Spiegelbild des Linienzugs in Bezug auf den gewählten Vektor ergibt.

In praktischen Fällen pflegen freilich die Phasenwinkel der erregenden Kräfte aus andern Gründen, wie Massenausgleich oder Gleichförmigkeit der Arbeitsübertragung, festgelegt zu sein. Bei schwingungserregenden Naturkräften, wie Wind und Wasser, ist ohnehin eine Beeinflussung der Phasen kaum möglich. (Forts. folgt.)

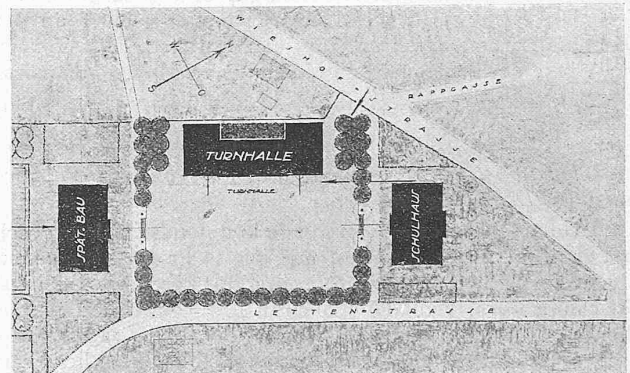
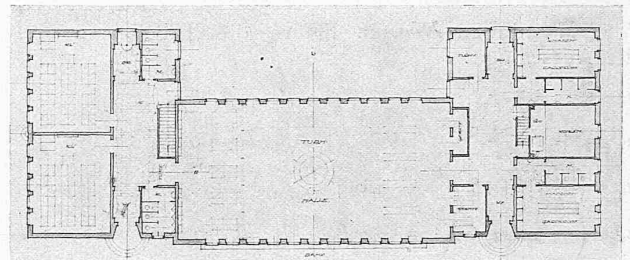
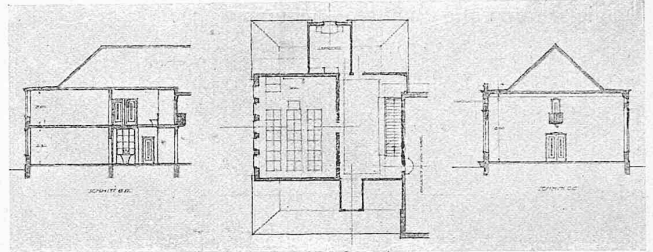
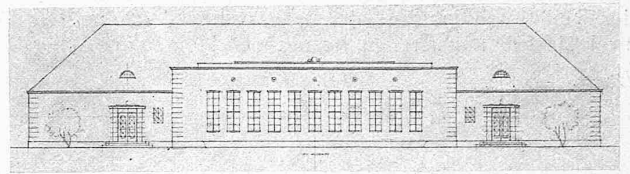
### Wettbewerb für einen Turnhallebau in Winterthur-Wülflingen.

Von den Wettbewerben des zu Ende gehenden Jahres haben wir noch zweier Objekte für sportliche Leibesübung Erwähnung zu tun: des Turnhallebaues für Wülflingen bei Winterthur und der Erweiterung des Schwimm- und Luftbades im Marzili an der Aare in Bern.

Der Turnhalle-Wettbewerb war auf Winterthurer Architekten beschränkt. Es waren 43 Entwürfe eingelaufen, die von einem fünfgliedrigen Preisgericht mit den Architekten M. Häfeli und W. Pfister in Zürich und H. Ziegler, dem Chef des Hochbaubureau Winterthur, beurteilt wurden. Zur Prämierung standen 3000 Fr. zur Verfügung, wobei dem Erstprämiierten anstelle eines Geldpreises die Bauausführung zugesichert war. Das Preisgericht war in der angenehmen Lage, einen I. Preis erteilen zu können und den Entwurf im Sinne des Programms zur Ausführung zu empfehlen; das vollständige Ergebnis haben wir am 21. April d. J. bereits mitgeteilt; hier folge noch die Dar-

### Turnhalle-Wettbewerb Winterthur-Wülflingen.

I. Rang (Ausführung), Nr. 35. — Arch. K. Kaczorowski, Winterthur.



Grundrisse, Schnitte und Südostfassade 1: 600. — Lageplan 1: 2500.

stellung der beiden besten Entwürfe und deren Bewertung durch die Jury.

Entwurf Nr. 25 „Wulfilo“. Situation gut, Schulzimmer günstig gelegen; zweckmässiger, knapper Grundriss. Die Beleuchtung der Turnhalle mit ausschliesslich hoch liegenden Fenstern ist nicht erwünscht. Die Architektur ist in allen Einzelheiten fein empfunden, erscheint aber fremdartig.

Entwurf Nr. 35 „Trennung“. Stellung des Gebäudes gut, im richtigen Höhenverhältnis zum Schulhaus. Für die Benützung zweckmässig ist die Trennung von Schul- und Turnbetrieb. Garderoben und Aborte richtig, der Turnhallevorplatz ist etwas reichlich bemessen. Alle Schulzimmer sind vorzüglich orientiert und vom Turnplatz abgekehrt. Der Treppenlauf hat zu wenig Längentwicklung. Das schlichte Aeusserer würde sich dem bestehenden Schulhaus gut unterordnen; die Gebäuderisalite der Rückseite dürften besser gelöst sein.“ —

Gemäss Antrag des Preisgerichts hat in der Folge die Behörde das Bauprojekt vom I. Preis-Träger ausarbeiten lassen; die Baukosten der Turnhalle (mit vier Schulzimmern) sind auf rund 300 000 Fr. veranschlagt. Der Ausführungsbeschluss soll demnächst gefasst werden.