

# Tangenten- und Krümmungskreis-Konstruktionen bei ebenen Kurven auf Grund ihrer vektoriellen Gleichung

Autor(en): **Michael, W.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **87/88 (1926)**

Heft 13

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-40867>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

INHALT: Tangenten- und Krümmungskreis-Konstruktionen bei ebenen Kurven auf Grund ihrer vektoriellen Gleichung. — Das Kraftwerk Amsteg der S. B. B.; II. Hochbaulicher Teil. — Mechano-statische Untersuchungen hochgradig statisch unbestimmter Tragsysteme. — Miscellanea: Automatische Entsandungs-Anlage der Kraftwerkes Lito-

inferiore. Eine neue Eisenbahnbrücke über den Rhein bei Duisburg-Hochfeld. Unterdruckmessungen an Stauwauern. Das Luftverkehrsnetz 1926. — Nekrologie: Anton von Rieppel. — Literatur. — Vereinsnachrichten: Basler Ingenieur und Architekten-Verein. Sektion Bern des S. I. A. Zürcher Ingenieur- und Architekten-Verein. S. T. S.

Band 87.

Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.

Nr. 13

### Tangenten- und Krümmungskreis-Konstruktionen bei ebenen Kurven auf Grund ihrer vektoriellen Gleichung.<sup>1)</sup>

Von Dr. W. MICHAEL, techn. Experte, Bern.

In der Elektrotechnik wird bekanntlich die Gleichung der sogenannten „Ortskurven“ oft in der vektoriellen Form  $V=F(v)$  . . . . . (1) gegeben<sup>2)</sup>, worin  $V$  den die Kurve beschreibenden Vektor bedeutet, der eine komplexe Funktion  $F$  des reellen Parameters  $v$  ist.  $v$  kann alle Werte von  $-\infty$  bis  $+\infty$  annehmen. Eine solche Gleichung kann für jede algebraische oder transzendente Kurve aufgestellt werden. Diese Art der Darstellung einer Kurve hat bis jetzt bei den Mathematikern noch wenig Beachtung gefunden, obwohl sie auch als Sonderfall einer konformen Abbildung aufgefasst werden kann. Im folgenden soll gezeigt werden, wie man mit Hilfe der Gleichung (1) das Problem der Tangente und der Krümmung einer Kurve behandeln kann. Einige Beispiele, die zu einfachen Lösungen führen, sollen die Brauchbarkeit der Methode illustrieren.

1. In Abbildung 1 sei  $C$  eine Kurve, die durch (1) gegeben ist. Wir betrachten zwei Punkte  $P_1$  und  $P_2$  mit den zugehörigen Vektoren  $V_1$  und  $V_2$ . Die Sekante  $P_1P_2 = \Delta V$  ist gleich der Differenz der Vektoren, denn, wie die Abbildung 1 zeigt, ist:

$$\Delta V = V_2 + (-V_1) = V_2 - V_1.$$

Lassen wir  $P_2$  immer näher gegen  $P_1$  rücken, so geht die Sekante  $\Delta V$  in das Bogenelement  $dV$  über, dessen Richtung mit derjenigen der Tangente in  $P_1$  übereinstimmt. Wir finden nun  $dV$  durch Differentiation der Gleichung (1):

$$dV = \frac{d(F(v))}{dv} dv \equiv V' dv \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Den Differentialvektor  $dV$  können wir nicht konstruieren; uns interessiert jedoch nur seine Richtung. Diese ist gegeben durch den Vektor  $V' = dV/dv$ , der im allgemeinen einen endlichen Betrag hat und parallel zu  $dV$  ist, weil  $dv$  eine reelle Grösse ist, die daher auf die Richtung keinen Einfluss hat. Wir haben somit den Satz:

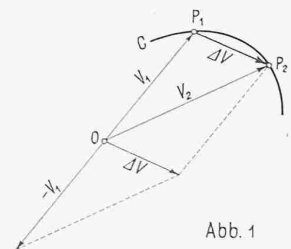


Abb. 1

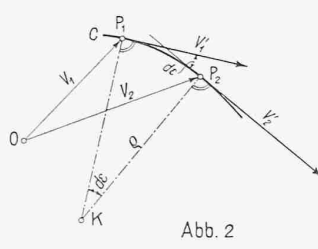


Abb. 2

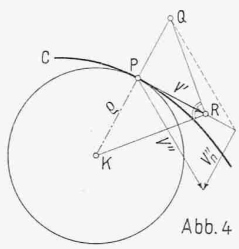


Abb. 4

Die erste Ableitung des Kurvenvektors nach dem Parameter liefert einen neuen Vektor, der die Richtung der Tangente hat. (Tangentenvektor) . . . . . (I)

Damit ist die Aufgabe der vektoriellen Bestimmung der Tangente in einem Punkte einer Kurve allgemein gelöst.

2. Betrachten wir in Abbildung 2 zwei Punkte der Kurve  $C$ ,  $P_1$  und  $P_2$ , die sehr nahe gedacht sein sollen. Wir denken uns ferner die „Tangentenvektoren“  $V'_1$  und  $V'_2$  in  $P_1$  und  $P_2$  bestimmt, ferner die Normalen in letzteren

<sup>1)</sup> Wenn wir diesem, in der Mathemat. Vereinigung Bern gehaltenen, an der Grenze unseres Arbeitsgebietes liegenden Vortrag Aufnahme gewähren, so geschieht es, weil er gleichsam eine Weiterentwicklung der Arbeit unseres zu früh verstorbenen Kollegen Otto Bloch über Bestimmung der Ortskurven darstellt, einer Arbeit, deren Erscheinen in der «S. B. Z.» im November 1916 berechtigtes Aufsehen der Fachkreise erregt hatte. Red.

<sup>2)</sup> Vergleiche zum Beispiel: Dr. O. Bloch, Die Ortskurven der graphischen Wechselstromtechnik, Verlag von Rascher & Cie, in Zürich, 1917.

gezogen. Diese schneiden sich im Grenzfalle im Krümmungsmittelpunkt  $K$ , und die Strecke  $P_1K = \rho$  ist gleich dem Krümmungsradius;  $d\varepsilon$  ist der Kontingenzwinkel. Wir bezeichnen ferner mit  $|dV|$  den absoluten Wert oder den Betrag von  $dV$ , analog die Beträge der anderen Vektoren. Aus Abb. 2 folgt:

$$\rho = \frac{|dV|}{d\varepsilon} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Um  $d\varepsilon$  zu bestimmen, denken wir uns in Abbildung 3 die Vektoren  $V'_1$  und  $V'_2$  von einem Ursprung  $O'$  aus aufgezeichnet; sie bilden wiederum den Winkel  $d\varepsilon$  miteinander. Wir denken uns ferner ihr Differential gezeichnet:

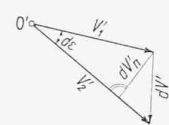


Abb. 3

$$dV' = V'_2 - V'_1$$

den wir aus der Gleichung:

$$\frac{dV'}{dv} = V'' = \frac{d^2(F(v))}{dv^2}$$

berechnen können. Die Projektion von  $dV'$  auf die Normale zu  $V'_2$  sei mit  $dV'_n$  bezeichnet. Sie ist auch gleich der Projektion von  $V''$  auf die Normale zu  $V'_2$ , die wir mit  $V''_n$  bezeichnen, multipliziert mit  $dv$ , das heisst also:

$$dV'_n = V''_n dv \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Im Grenzfalle geht  $V'_2$  in  $V'_1$  über und wir können setzen:  $V'_2 = V'_1 = V'$ . Aus Abbildung 3 folgt nun ferner:

$$d\varepsilon = \frac{|dV'_n|}{|V'|}$$

und somit auch:

$$\rho = \frac{|dV|}{\frac{|dV'_n|}{|V'|}} |V'| \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Setzt man aus (2) den Wert für  $|dV|$  und aus (4) den für  $|dV'_n|$  ein, so findet man schliesslich:

$$\rho = \frac{|V'|^2}{|V''_n|} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Die Brauchbarkeit dieser Formel beruht darauf, dass man sowohl  $V'$  als  $V''$  aus der Gl. (1) leicht bestimmen kann; man hat dazu nur (1) zweimal zu differenzieren.  $V''_n$  ist dann geometrisch ohne weiteres bestimmbar.

Aus Gl. (6) lässt sich ablesen:

Der Betrag des Tangentenvektors  $V'$  ist gleich der mittleren Proportionalen aus dem Krümmungsradius  $\rho$  und der Strecke  $|V''_n|$  . . . . . (II)

Dieser Satz führt zu folgender Regel für die Konstruktion von  $\rho$  in einem Punkte  $P$  der Kurve  $C$  (Abb. 4):

Man bestimmt aus Gleichung (1)  $V'$  und  $V''$ ; zieht die Normale in  $P$  zu  $V'$  und zeichnet  $V''_n$ ; macht die Strecke  $PQ$  auf der Normale in  $P$  gleich  $-V''_n$ ; verbindet  $Q$  mit  $R$  und errichtet die Senkrechte in  $R$  zu  $QR$ ; sie schneidet die Normale im Punkte  $K$ , dem gesuchten Krümmungsmittelpunkt<sup>1)</sup> . . . . . (III)

<sup>1)</sup> Die Sätze (I) und (II) führen sofort auf zwei bekannte kinematische Sätze, wenn man den Parameter  $v$  als Zeit auffasst. Die Gleichung (1) ist dann der analytische Ausdruck für eine bestimmte Bewegung eines Punktes in der Ebene.  $V'$  ist die Geschwindigkeit,  $V''$  die totale,  $V''_n$  die normale Beschleunigung des Punktes.

Bekanntlich stützt sich die Toricelli-Roberval'sche Methode der Tangentenbestimmung auf der nunmehr auch aus Satz (I) folgenden Tatsache, dass die Geschwindigkeit mit der Tangente gleichgerichtet ist. Die genannte Methode findet gewissermassen im Satz (I) ihre natürliche, das heisst rein geometrische Begründung, während die aus Satz (II) abgeleitete Regel (III) gleichsam als ihre „Erweiterung“ angesehen werden könnte.

Anwendungen.

Es ist klar, dass man bei der Anwendung der Methode auf eine bestimmte Kurve nicht von deren „allgemeinen“ vektoriellen Gleichung, sondern von einer möglichst einfachen ausgehen wird. Ist eine solche Gleichung für die Kurve nicht schon anderweitig abgeleitet, so besteht der erste Schritt bei der Lösung unserer Aufgabe in der Aufstellung einer möglichst einfachen vektoriellen Gleichung der Kurve.

a) *Hyperbel*: Die vektorielle Gleichung einer Hyperbel, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt, kann wie bekannt<sup>1)</sup> in der Form geschrieben werden:

V = Av + B/v . . . . . (7)

worin A und B zwei gegebene Vektoren sind, die, wie man leicht sieht, die Lage der Asymptoten bestimmen. In Abbildung 5 ist die Kurve konstruiert worden, indem für v = 1, 2, 3 ... die entsprechenden Punkte bestimmt wurden. Zur Bestimmung von Tangente und Krümmungsradius müssen wir die Gleichung (7) zweimal ableiten und finden:

V' = A - B/v^2 = 1/v (Av - B/v) . . . . . (8)

V'' = 2B/v^3 . . . . . (9)

Aus Gleichung (8) folgt: der Tangentenvektor V' hat die Richtung desjenigen Vektors, der die Differenz der zu einem Punkte der Hyperbel gehörenden Vektorkomponenten Av und B/v bildet; wir zeichnen das entsprechende Parallelogramm; in Abbildung 5 ist dies z. B. für den Punkt v = 1 durchgeführt; ferner wollen wir die Vektor-Summe (Av + B/v) die erste, die Vektor-Differenz (Av - B/v) die zweite Diagonale des Parallelogramms nennen. Man kann dann den Satz aussprechen:

Die Tangente in einem Punkte der Hyperbel ist parallel der zweiten Diagonalen des zu dem Punkte gehörenden Asymptoten-Parallelogramms.

Dieser Satz führt auf die bekannte Konstruktion der Tangente und bietet somit nichts wesentlich neues. Nun bestimmen wir q. Nach Gleichung (6) ist:

q = |V'|^2 / |V''|^2 = (1/v^2 |Av - B/v|^2) / (1/v^2 |(2B/v)|^2) = |Av - B/v|^2 / |(2B/v)|^2

Wir interpretieren die Gleichung geometrisch und finden: Im Zähler steht das Quadrat des Betrages eines Vektors, der gleich der zweiten Diagonale des aus Av und B/v gebildeten Parallelogramms ist, im Nenner steht die Projektion des mit 2 multiplizierten Vektors B/v auf die Normale. Wir denken uns die Konstruktion für den Punkt 1 ausgeführt und ersehen aus Abbildung 5 ohne weiteres:

Die Strecke |Av - B/v| ist gleich dem Stück der Tangente zwischen Berührungspunkt und Schnittpunkt mit einer Asymptote, für Punkt 1 also gleich 1r.

Die Strecke |2B/v| ist gleich dem Stück der Asymptote vom Mittelpunkt O bis zum Schnittpunkt r der Tangente. Füllen wir die Senkrechte von O auf die Normale; diese werde in q getroffen, so ist die Strecke von q bis zum Berührungspunkt 1 gleich der Projektion |(2B/v)|.

Die Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes gestaltet sich somit äusserst einfach nach folgender Regel:

Man zieht die Tangente bis zum Schnitt q mit einer Asymptote, errichtet im Berührungspunkt (1) die Normale, fällt auf sie vom Mittelpunkt O aus das Lot Or, verbindet r mit q und errichtet die Senkrechte in q zu qr. Sie schneidet die Normale im Krümmungsmittelpunkt K.<sup>2)</sup>

1) Vergl. z. B. die Dissertation des Verfassers: Zur Geometrie der Ortskurven der graphischen Wechselstromtheorie, Zürich 1919.

2) Es ist hier zu bemerken, dass diese Konstruktion nicht eine unmittelbare Anwendung der Regel (III) darstellt, denn wegen der vorgenommenen Kürzung in der Formel für q werden nicht die Vektoren V' und -V''/v^2 selber aufgetragen, sondern die reduzierten Vektoren V'/v und -V''/v^2; um dieser Abweichung Rechnung zu tragen, haben wir in Abb. 5 die Buchstaben r und q statt R und Q wie in Abb. 4 eingeführt.

Eine unmittelbare Anwendung der Regel (III) findet statt, wenn man von einer anderen, weniger bekannten Gleichung für die Hyperbel ausgeht. Darauf soll bei der Ellipse noch hingewiesen werden.

b) *Ellipse*. Die einfachste Form, auf die die vektorielle Gleichung einer Ellipse gebracht werden kann, lautet:

V = r1 e^iq + r2 e^-iq . . . . . (10)

worin r1 und r2 Konstanten, q der Parameter (an Stelle von v) und i = sqrt(-1), die imaginäre Einheit, bedeuten. (10) ist die Gleichung einer Ellipse mit dem Mittelpunkt im Ursprung und den Axen in den Koordinatenachsen.<sup>1)</sup>

Man kann V in Formel (10) auffassen als die Resultierende zweier Vektoren, die gleichmässig, aber in entgegengesetztem Sinne zu einander rotieren. In Abbildung 6 sind die Kreise angedeutet, die die Endpunkte der Vektoren r1 e^iq und r2 e^-iq beschreiben; die erzeugte Ellipse ist stark ausgezogen. Zu einem Punkte P ist das entsprechende Parallelogramm gezeichnet.

Wir bilden nun aus (10) die erste und zweite Ableitung und erhalten:

V' = i (r1 e^iq - r2 e^-iq) . . . . . (11)

V'' = -(r1 e^iq + r2 e^-iq) = -V . . . . . (12)

Wir bemerken, dass in der Klammer auf der rechten Seite von (11) wie bei der Hyperbel die Differenz der Vektorkomponenten von V steht, das heisst, die zweite Diagonale im Parallelogramm OXPY. Der Faktor i bedeutet, dass der Tangentenvektor V' auf der zweiten Diagonale des Parallelogramms senkrecht steht (bei der Hyperbel hatte man Parallelität). Wir konstruieren V', indem wir durch P eine Senkrechte zu XY ziehen und PR gleich XY machen. Um q zu finden, haben wir |V''| zu bestimmen und Regel (III) anzuwenden. Da |V''| = |V| ist, bekommen wir |V''|, indem wir das Lot OS auf die Verlängerung von PR fallen. Wir ziehen die Parallele SQ zu OP; dann ist OS = PQ = |V''|. Schliesslich haben wir noch Q mit R zu verbinden und die Senkrechte in R auf QR zu ziehen. Ihr Schnittpunkt K mit der Normalen ist der gesuchte Krümmungsmittelpunkt.

Die Bestimmung von K ist hier ebenso einfach wie bei der Hyperbel, wenn man von der durch (10) gegebenen vektoriellen Konstruktion der Ellipse ausgeht. Man kann jedoch die Konstruktion des Krümmungskreises auch unabhängig von der beschriebenen vektoriellen Erzeugung ausführen, unter Benützung konjugierter Durchmesser, wenn man folgende Relationen aus Abbildung 6 ableitet.<sup>2)</sup>

Wendet man den Cosinussatz auf die Diagonal-Dreiecke OMX und OMY an, so findet man:

1/4 (OP^2 + XY^2 - 2 OP XY^2 cos delta) = r2^2 . . . (a)

1/4 (OP^2 + XY^2 + 2 OP XY^2 cos delta) = r1^2 . . . (beta)

(a)+(beta): 1/2 (OP^2 + XY^2) = r1^2 + r2^2 (a')

(a)-(beta): OP XY^2 cos delta = r1^2 - r2^2 (beta')

Die Gleichung (a') drückt eine besondere Eigenschaft aus, die zwischen den zwei Diagonalen des Parallelogramms des Ellipsenpunktes besteht.

Trägt man die zweite Diagonale XY in P senkrecht zur ersten Diagonale OP auf, so erhält man ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse konstant ist für alle Punkte der Ellipse. Man kann leicht ersehen, dass diese Hypotenuse der Radius des (nicht gezeichneten) Kreises ist, der durch die Ecken des der Ellipse umschriebenen Rechteckes geht.

Die Gleichung (beta') können wir folgendermassen interpretieren: es ist OP cos delta = OS = PQ; ferner ist XY = PR

und r1^2 - r2^2 = (r1 + r2)(r1 - r2) = ab wo a die grosse, b die kleine Halbaxe der Ellipse bedeuten. Es folgt somit:

OP XY cos delta = PR PQ = a b . . . . . (gamma)

Diese Produkte sind nichts anderes als die doppelten Inhalte der Dreiecke QPR beziehungsweise POR.

Wir haben somit den Satz: Das aus dem Ellipsenvektor und dem Tangentenvektor gebildete Dreieck hat den konstanten Inhalt 1/2 a b.

1) Siehe meine Dissertation. 2) Auf diese Möglichkeit machte mich zuerst Ing. M. Besso aufmerksam.

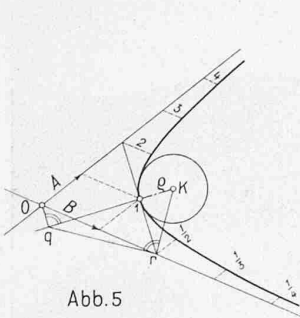


Abb. 5

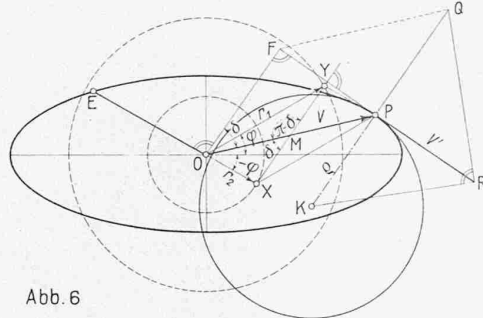


Abb. 6

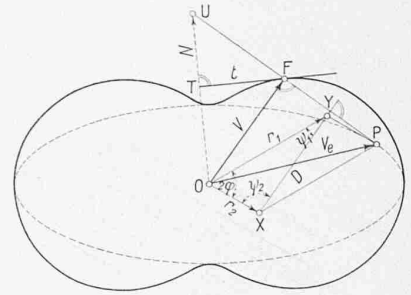


Abb. 7

Nun hat bekanntlich auch das aus zwei konjugierten Halbmessern der Ellipse gebildete Dreieck den konstanten Inhalt  $\frac{1}{2}ab$ . Betrachten wir daher den zu  $OP$  konjugierten Halbmesser  $OE$ . Dieser ist zur Tangente parallel. Somit gilt:

$$OE \perp OS, \quad \sphericalangle EOP = \delta + \frac{\pi}{2} = \sphericalangle OPR,$$

$$OP OE \sin\left(\delta + \frac{\pi}{2}\right) = OP OE \cos \delta = ab \quad (\delta)$$

Vergleicht man  $(\delta)$  mit  $(\gamma)$  so kommt:

$$OE = XY.$$

Das heisst: Der Betrag der zweiten Diagonale im Parallelogramm des Punktes  $P$  ist gleich dem Betrag des zum Halbmesser  $OP$  konjugierten Halbmessers. Dieser steht auf der zweiten Diagonale senkrecht.

[Nach Dr. J. Sauter kann man diesen Zusammenhang durch eine „vektorielle Ueberlegung“ viel einfacher beweisen: Wenn man nämlich in (10) an Stelle von  $\varphi$  den Wert  $\varphi + \pi/2$  setzt, so erhält man den Ellipsenvektor:

$$V_{\varphi+\pi/2} = r_1 e^{i(\varphi+\pi/2)} + r_2 e^{-i(\varphi+\pi/2)} = i\{r_1 e^{i\varphi} - r_2 e^{-i\varphi}\} = V'$$

das heisst  $V'$  ist gleich einem Halbmesser der Ellipse, und weil parallel der Tangente im Endpunkte des Halbmessers  $V_\varphi$ , ist  $V'$  der zu  $V_\varphi$  konjugierte Halbmesser.]

Die Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes  $K$  zu  $P$  kann jetzt folgendermassen angegeben werden:

Man trage auf der Tangente eine Strecke  $PR$  gleich dem konjugierten Halbmesser ab, ferner auf der Normalen eine Strecke  $PQ$  gleich dem Abstand der Tangente vom Mittelpunkt. Man errichte die Senkrechte in  $R$  zu  $QR$ . Ihr Schnittpunkt zu der Normalen ist der Krümmungsmittelpunkt  $K$ .

Wir bemerken noch, dass der aus Gleichung (a') gefundene aber nicht gezeichnete Kreis zur Bestimmung des Betrages des konjugierten Halbmessers in vorteilhafter Weise benutzt werden kann. Hierdurch ist die Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes, wie bei der Hyperbel, auf Elemente zurückgeführt, die unabhängig von der speziellen Konstruktion der Kurve sind.

Die gefundenen Konstruktionen für Tangente und Krümmungskreis bei Hyperbel und Ellipse lassen bereits eine Dualitätsverwandtschaft erkennen, die noch klarer zu Tage tritt, wenn man die Gleichung (7) der Hyperbel anders schreibt. Führen wir nämlich die Substitution ein:

$$v = e^\psi$$

beziehungsweise  $\frac{1}{v} = e^{-\psi}$ ,

so erhalten wir die neue Hyperbelgleichung:

$$V = A e^\psi + B e^{-\psi} \quad (7')$$

für die Ellipse können wir statt (10) schreiben:

$$V = A e^{i\varphi} + B e^{-i\varphi} \quad (10'')$$

(10'') geht aus (7') hervor, wenn man  $\psi$  durch  $i\varphi$  ersetzt. Aus (7') folgt:

$$V' = A e^\psi - B e^{-\psi}, \\ V'' = A e^\psi + B e^{-\psi} = V.$$

Hieraus ergibt sich die in Abbildung 5 veranschaulichte Konstruktion in unmittelbarem Anschluss an die Abbildung 4 beziehungsweise an Regel (III). An Stelle

<sup>1)</sup> Siehe meine Dissertation.

von  $r$  und  $q$  dürfen wir jetzt, ebenso wie bei der Ellipse,  $Q$  und  $R$  setzen. Gleichung (7') steht der Gleichung (10'') dual gegenüber und erweist sich als die einfachste für die Lösung unserer Aufgabe.

Die Parabel kann analog behandelt werden. Es ergeben sich hierbei ebenso einfache Konstruktionen wie bei den anderen Kegelschnitten. Der Leser kann sich davon selber leicht überzeugen.

c) Zum Schlusse möge noch eine Anwendung auf eine Kurve höherer Ordnung stattfinden. Wir wählen hierfür, im Anschluss an das Vorige, die Fusspunktkurve der Ellipse mit dem Zentrum der Ellipse als Pol.

Wir müssen zunächst die Kurve vektoriell darstellen. Wir gehen von der Gleichung der Ellipse aus, wobei wir jetzt aber  $V_e$  statt  $V$  schreiben:

$$V_e = r_1 e^{i\varphi} + r_2 e^{-i\varphi}.$$

Man erhält nun einen Punkt  $F$  der Fusspunktkurve, indem man in Abbildung 7 vom Zentrum  $o$  auf die Ellipsentangente in  $P$  das Lot fällt. Die Kurve ist bekanntlich vierter Ordnung. Wir denken uns das zu  $V_e$  gehörige Parallelogramm gezeichnet und bezeichnen die zweite Diagonale  $XY$  mit  $D$ .

Es ist dann der Vektor  $V = OF$  parallel zu  $D$ . Es erweist sich als zweckmässig, für den Vektor einen Richtungsvektor einzuführen, den wir definieren als einen Vektor vom Betrage 1 und von der selben Richtung wie  $D$ .

Wir wählen für den Richtungsvektor ein neues Symbol, nämlich das Vektorsymbol zwischen zwei horizontalen Strichen:  $\underline{D}$ .<sup>1)</sup> Für den absoluten Betrag von  $D$  wollen wir  $d$  schreiben. Definitionsgemäss soll also sein:

$$d = |D| \\ \underline{D} = D/d.$$

Wir berechnen nun an Hand der Abbildung 7 den Richtungsvektor  $\underline{D}$ ; ferner den Betrag von  $V$ . Es ist dann:  $V = |V| \underline{D} \equiv |V| \frac{D}{d}$ .

Aus Abbildungen 6 und 7 folgt:

$$a) D = r_1 e^{i\varphi} - r_2 e^{-i\varphi};$$

$$\text{ferner ist: } b) d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos 2\varphi$$

$$c) |V| = r_1 \cos \psi_1 - r_2 \cos \psi_2$$

$$r_1^2 + d^2 - 2 r_1 d \cos \psi_1 = r_2^2$$

$$r_2^2 + d^2 - 2 r_2 d \cos \psi_2 = r_1^2$$

$$\text{hieraus: } \cos \psi_1 = \frac{r_1^2 + d^2 - r_2^2}{2 r_1 d}; \quad \cos \psi_2 = \frac{r_2^2 + d^2 - r_1^2}{2 r_2 d}$$

$$\text{somit: } |V| = \frac{1}{d}(r_1^2 - r_2^2)$$

$$V = \frac{r_1^2 - r_2^2}{d^2}(r_1 e^{i\varphi} - r_2 e^{-i\varphi}) \quad (13)$$

Das ist die gesuchte vektorielle Gleichung unserer Fusspunktkurve; darin ist  $d^2$  die in Gleichung (b) gegebene Funktion von  $\varphi$ . Wir differenzieren nun Gleichung (13) nach  $\varphi$ :

$$V' = (r_1^2 - r_2^2) \frac{id^2(r_1 e^{i\varphi} + r_2 e^{-i\varphi}) - 2 d d'(r_1 e^{i\varphi} - r_2 e^{-i\varphi})}{d^4}$$

In den Klammern des Zählers stehen die Vektoren  $V_e$  und  $D$ , ferner folgt durch Differentiation der Gleichung (b):

$$2 d d' = 4 r_1 r_2 \sin 2\varphi.$$

<sup>1)</sup> Im Gegensatz zu den vertikalen Strichen für die Bezeichnung des absoluten Betrages des Vektors.



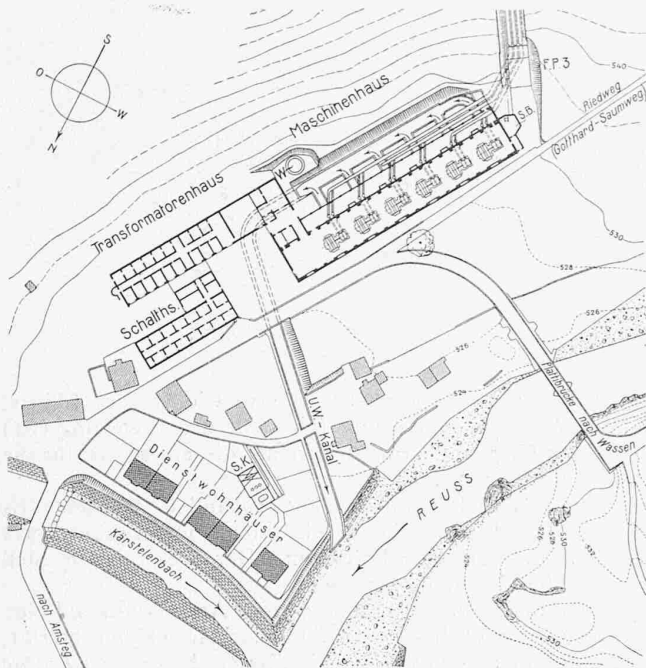


Abb. 73. Uebersichtsplan von Maschinenhaus, Schaltthaus und Dienstwohnhäusern des Kraftwerkes Amsteg. — Masstab 1:3000.

Wir können daher schreiben:

$$V' = \frac{r_1^2 - r_2^2}{d^2} \left\{ i V_e - \frac{4 r_1 r_2 \sin 2 \varphi}{d} \frac{D}{d} \right\} \quad (14)$$

Nun ist  $r_1 r_2 \sin 2 \varphi$  gleich dem Inhalt des Parallelogramms  $OPXY$  (Abbildung 6). Betrachten wir  $D$  als dessen Grundlinie, so ist seine Höhe gleich  $\frac{PF}{2}$  zu setzen. Setzt man noch  $h = PF$  so ist also:

$$2 r_1 r_2 \sin 2 \varphi = h d;$$

dieser Wert und für  $\frac{D}{d}$  das Symbol  $\bar{D}$  in (14) eingesetzt ergibt:

$$V' = \frac{r_1^2 - r_2^2}{d^2} \{ i V_e - 2 h \bar{D} \} \quad (15)$$

Für die Konstruktion der Tangente interessiert uns nur die Richtung von  $V'$ . Für diese ist in Gleichung (15) nur der Klammerausdruck massgebend, denn der davor stehende Faktor ist eine reelle Grösse. Es erweist sich ferner als bequem, zunächst die Richtung der Normalen, statt der Tangente anzugeben. Wir betrachten daher den zu  $V'$  senkrecht stehenden Vektor  $N$ , den wir aus Gleichung (15) durch Multiplikation mit  $-i$  und Weglassen des reellen Faktors erhalten:

$$N = V_e + i 2 h \bar{D} \quad (16)$$

$N$  ergibt sich aus (16) als die Summe des Ellipsenvektors  $V_e$  und eines Vektors vom Betrage  $2h = 2PF$ , der zu  $D$  senkrecht steht, also die Richtung der Ellipsentangente in  $P$  besitzt. Zur Konstruktion von  $N$  hat man somit folgendes zu tun:

*Auf der Tangente in  $P$  trägt man die Strecke  $PF$  von  $F$  aus nach aussen ab und erhält den Punkt  $U$ . Der Vektor  $OU$  ist dann gleich dem Vektor  $N$ , der die Richtung der Normalen im Punkte  $F$  der Fusspunktkurve hat. Die gesuchte Tangente in  $F$  ist dann die zu  $OU$  senkrecht gezogene Gerade  $FT$ .*

Es ist ersichtlich, dass auch diese Tangenten-Konstruktion an Einfachheit nichts zu wünschen übrig lässt. Hingegen hat sich für den Krümmungsmittelpunkt keine einfache Konstruktion ergeben, weshalb hier darauf nicht näher eingetreten wird.

Die gegebenen Beispiele dürften genügen, um das Wesen und die Brauchbarkeit der neuen Methode darzulegen. Es sei noch bemerkt, dass sie sich auch bei transzendenten Kurven mit Erfolg verwenden lässt. Besonders einfach lassen sich die Zykloiden und die Spiralen behandeln.

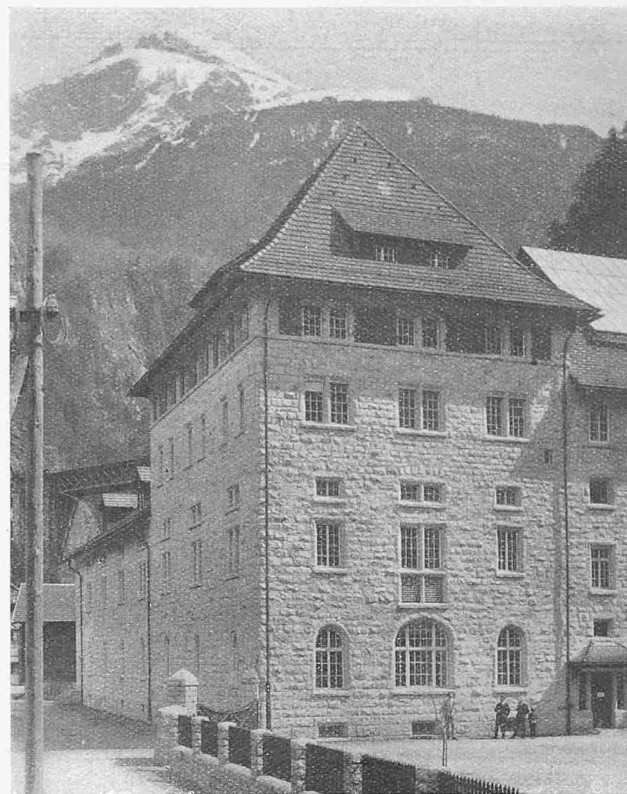


Abb. 74. Das Schalthaus aus SW, rechts das Schaltstand-Gebäude.

### Das Kraftwerk Amsteg der S. B. B. II. Hochbaulicher Teil.<sup>1)</sup>

Von Arch. TH. NAGER, S. B. B., Bern.

Die Zentrale des Kraftwerkes Amsteg liegt am südlichen Ende der untersten Talstufe des ernerischen Reusstales, unmittelbar vor dem Aufstieg der Gotthardstrasse gegen Gurtellen (vergl. Situationsplan Abbildung 73). Der hier zur Verfügung stehende Platz war relativ eng begrenzt durch den Zug der Bristenlawine und den Felsenrücken seitlich des Kärstelenbaches einerseits, den steilen Berghang und der Gotthardstrasse andererseits. Da zudem noch Raum für spätere Erweiterungsbauten, eventuell auch für eine Freiluftstation vorzusehen war und die Anordnung des Unterwasserkanals, der den vorhandenen Wiesengrund durchschnitten, gegeben war, wurde durch eine Gruppierung von verschiedenen einzelnen Baukörpern eine möglichst weitgehende Platzausnützung erstrebt. Für die Wirkung der Neubauten musste die Nachbarschaft des recht charakteristischen Dorfes von Amsteg mit seiner dominierenden Kirche berücksichtigt werden, welches Bild durch die bedeutenden Baumassen des neuen Kraftwerkes nicht erdrückt werden durfte (vergl. Abbildung 74, S. 171). Ferner war mit dem Umstand zu rechnen, dass die Baugruppe ausser von der seitlich vorbeiführenden Landstrasse hauptsächlich von der in einem Bogen hoch über die Baustelle herumfahrenden Bahn aus gesehen wird (vergl. die Abbildungen 75 und 76, Seite 171/172). Diese Erwägung führte zu einer Massengruppierung, die die verschiedenen Bauteile: Maschinenhaus, 15 kV-Schaltgebäude und Transformatoren-Gebäude annähernd parallel zur Gotthardstrasse mit einem eingeschobenen Hofe stellte, diese beiden letzten Längsbauten mit dem quergestellten Schaltstandgebäude verband und das südliche Ende des 15 kV-Schaltgebäude mit den Bureaux und Verwaltungsräumen als Kern der Baumassen um zwei Geschosse höher führte. Auf diese Weise kommt jeder einzelne Bauteil entsprechend seiner Zweckbestimmung nach aussen klar zur Geltung, leichte Zugänglichkeit, gute Belichtung und Belüftung wird erreicht; die unter-

<sup>1)</sup> Vergl. I. Wasserbaulicher Teil, von Ing. Hans Studer, in Bd. 86.