Band 88. Nachdruck von Text und Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 18

Zur Theorie des Wärmeüberganges von Flüssigkeiten oder Gasen an feste Wände.

Von Prof. Dr. A. STODOLA, Zürich.

Seit Reynolds wird bekanntlich die Analogie zwischen dem molekularen Impuls- und Wärmetransport, wie er sich in Gasen abspielt, durch Prandtl und v. Kármán mit grossem Erfolg auf die Theorie des Wärmeüberganges auch in Flüssigkeiten, insbesondere bei turbulenter Strömung, angewendet. Dabei handelt es sich in vielen technischen Problemen nicht um die „ausgebildete Turbulenz" sondern um die „Anlaufstrecken", wo in der Hauptmasse eine Potentialströmung stattfindet, die an der Wand in die berühmten Grenzschichten Prandtl's übergeht. Der Anfang der Grenzschichte weist, wie Burgers[1]) durch Versuche erwiesen hat, laminare Strömung auf, die später in turbulente übergeht unter Beibehaltung eines schmalen laminaren Streifens an der Wand. Die Theorie v. Kármáns[2]) beruht auf der Annahme, dass die turbulente Strömung bis an die Wand reicht. Der nachfolgende Beitrag setzt sich zum Ziel, die Theorie auf den allgemeinen Fall auszudehnen und insbesondere *die Reibungswärme* der Turbulenz streng zu berücksichtigen. Die Arbeiten von Prandtl, v. Kármán, Latzko[3]) und Pohlhausen[4]) werden als bekannt vorausgesetzt.

Wir beschänken uns auf eine ebene Strömung längs einer Platte. Es bezeichnen:

x, y rechtwinklige Koordinaten,
u, v Geschwindigkeits-Komponenten nach x, y,
ϱ, γ, c_p Masse und Gewicht der Raumeinheit, spezifische Wärme bei unverändertem Druck,
μ Zähigkeitszahl,
$\nu = \mu/\varrho$ Kinematische Zähigkeit,
U Geschwindigkeit der ungestörten Strömung,
τ durch den Impulsaustausch hervorgerufene (innerhalb der Flüssigkeit scheinbare) Schubspannung, d. h. Reibung in Richtung von u, für die Flächeneinheit,
Δ die Dicke der Grenzschichte im Abstand x,
ϑ die von der Wandtemperatur als Nullpunkt aus gerechnete Temperatur im Abstand y,
Θ die Temperatur im Abstand $y = \Delta$,
q die durch Leitung pro Flächen- und Zeiteinheit hindurchgehende Wärme.

Massystem: technisch, m kg sek.

Die Differentialgleichung v. Kármáns für die Grenzschichtdicke

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_o^\Delta \varrho\, u\, dy + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\int_o^\Delta \varrho\, u^2\, dy - U\int_o^\Delta \varrho\, u\, dy\right\} = = -\Delta\frac{\partial p}{\partial x} - \tau_o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

muss berichtigt werden in

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_o^\Delta \varrho\, u\, dy - U\varrho\frac{\partial \Delta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\int_o^\Delta \varrho\, u^2\, dy - U\int_o^\Delta \varrho\, u\, dy\right\} = = -\Delta\frac{\partial p}{\partial x} - \tau_o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1a)$$

Es ist nämlich das erste Glied in (1) die Zunahme des Impulses in dem durch Δ und dx zur Zeit t bestimmten Rauminhalt, der im Sinne des Impulssatzes bei der Ableitung nach t als unveränderlich anzusehen ist. Da aber die Grenze Δ die Zeit mit enthält, nach der man in jener Schreibweise auch differenzieren müsste, ist es notwendig, entweder $\int_o^\Delta [\partial(\varrho\, u)/dt]\, dy$ zu schreiben, oder, für die Ausrechnung weit bequemer, die Form (1a) zu benützen.

Wir beschänken uns auf das sogen. $^1/_7$-Gesetz, d. h. wir nehmen als durch den Versuch erwiesen an, dass in der Grenzschichte, mit Ausnahme unmittelbarer Wandnähe das Gesetz

$$u = U\left(\frac{y}{\Delta}\right)^{1/7} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

gilt. Dann ergibt sich für die *stationäre Strömung* längs *der Platte* durch Integration von (1a) mit $\partial p/\partial x = 0$ und für $y = 0$

$$\tau_o = \psi\,\varrho\, U^2\left(\frac{\nu}{U\Delta}\right)^{1/4} \text{ mit } \psi = 0{,}0225 \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

die Schichtendicke

$$\Delta = 0{,}370\left(\frac{\nu}{Ux}\right)^{1/5} x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

wie man bei v. Kármán nachlesen kann.

Wir leiten nun zunächst eine Formel für den Wert der Schubspannung im beliebigen Abstand y ab aus den strengen hydrodynamischen Gleichungen (bei $\varrho =$ konst.)

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \tau}{\partial y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Die letzte Gleichung liefert mit Rücksicht auf obige Gleichung (2)

$$v = -\int_o^y \frac{\partial u}{\partial x}\, dy = \frac{U}{8}\left(\frac{y}{\Delta}\right)^{1/7} y\,\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{u\,y}{10\,x} \quad . \quad . \quad (7)$$

was mit Benützung von (4) in (5) eingesetzt und mit der Grenzbedingung $\tau = 0$ für $y = \Delta$ auf

$$\tau = \tau_o\left[1 - \left(\frac{y}{\Delta}\right)^{9/7}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

führt. Den *Uebergang zur Wärmeleitung* vermittelt die *„Wärmegleichung"*, die auf 1 m³ bezogen

$$d\,q_{\text{leit}} + d\,q_{\text{reib}} = \gamma\, d\, i - A\, dp \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

lautet, wo i den Wärmeinhalt (bei Gasen $= c_p\,\vartheta +$ konst.) bedeutet und wo man längs der Platte $dp = 0$ setzen kann. Innerhalb des turbulenten Gebietes ist nach v. Kármán die Leitungswärme senkrecht zur Platte

$$q_{\text{leit}} = \frac{\gamma}{\varrho}\, c_p\, \tau\, \frac{(\partial\,\vartheta/\partial\, y)}{(\partial\, u/\partial\, y)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Die Leitung in Richtung der Plattenlänge vernachlässigen wir, da sie erheblich kleinern Temperaturgefällen entspricht und hier nur das Wesentliche der Erscheinung hervorgehoben werden soll.

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (2), (3), (4) ist

$$q_{\text{leit}} = \varphi\left(\frac{y}{\Delta}\right)\frac{\partial\,\vartheta}{\partial\left(\frac{y}{\Delta}\right)} \text{ mit } \varphi\left(\frac{\nu}{\Delta}\right) = \frac{7\,\gamma\, c_p\,\tau_0}{\varrho\, U}\left[1 - \left(\frac{y}{\Delta}\right)^{9/7}\right]\left(\frac{y}{\Delta}\right) \quad (11)$$

Als Reibungswärme erhält man für die Raumeinheit, indem man nur die Spannung τ in Betracht zieht, d. h. von der Stirnreibung absieht:

---

[1]) Siehe die Dissertation: Measurements of the velocity Distribution in the boundary layer along a plane surface, von B. G. van der Hegge Zijnen, Delft 1924.

[2]) „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik" 1921.

[3]) Wärmeübergang aus einem turbulenten Flüssigkeits- oder Gasstrom; „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik", 1921.

[4]) Zur näherungsweisen Integration der Differential-Gleichung der laminaren Grenzschicht. „Zeitschrift für angewandte Mathematik u. Mechanik", 1921.