Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 89/90 (1927)
Heft: 20

Artikel: Wärmeübergang in Grenzschichten bei grossen Temperatur-Unterschieden zwischen Wand und Flüssigkeit

Autor: Stodola, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41694

Band 89. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 20**

Wärmeübergang in Grenzschichten bei grossen Temperatur-Unterschieden zwischen Wand und Flüssigkeit.

Von Prof. Dr. A. STODOLA, Zürich.

Bei grossen Temperaturunterschieden zwischen Flüssigkeit und Wand darf weder die Zähigkeit noch der Rauminhalt innerhalb der Grenzschicht als unveränderlich vorausgesetzt werden, wodurch alle Formeln höchst verwickelt werden, indessen im Sonderfall der Strömung längs einer Platte dennoch auf die im nachfolgenden mitzuteilende einfache Beziehung führen.

Mit den Bezeichnungen meiner Aufsätze vom 30. Oktober 1926 und 9. April 1927 in der „Schweiz. Bauzeitung" (und fortlaufender Nummerierung) lauten die hydrodynamischen Gleichungen für zweidimensionale Beharrungsströmung:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85)$$

$$\frac{\partial (\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\varrho v)}{\partial y} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (86)$$

Die Wärmegleichung lautet bei Vernachlässigung der Wärmeleitung in Richtung der Strömung

$$\frac{dq}{ay} = \gamma c_p \left(u \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (87)$$

Im Sinne der turbulenten Wärmeleitungstheorie ist stets

$$q = \frac{\gamma c_p \tau}{\varrho} \frac{\partial \vartheta / \partial v}{\partial u / \partial y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (87a)$$

Setzen wir c_p als wenig veränderlich voraus, so geht (da $\gamma/\varrho = g$) Gl. 87 in

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial y} \left[\tau \frac{(\partial \vartheta / \partial y)}{(\partial u / \partial y)} \right] = u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \quad . \quad . \quad . \quad (88)$$

über. Der Vergleich von (85) und (88) zeigt, dass wie immer u und v von y abhängen mögen, die Sonderlösung

$$\vartheta = a u + a' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89)$$

wo a, a' Konstanten bedeuten, beide Gleichungen erfüllt. In der Tat reduziert sich (88) auf

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau \frac{a u'}{u'} \right) = \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) a \quad . \quad . \quad (88a)$$

welche Gleichung nach Kürzung mit a mit (85) identisch ist. Sollte der Versuch auf das Gesetz

$$u = U \left(\frac{y}{\Delta} \right)^{\frac{1}{n}} = U \eta^{\frac{1}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (90)$$

führen, so muss der Temperaturverlauf bei rein turbulenter Grenzschicht das Gesetz

$$\vartheta = \Theta \left(\frac{y}{\Delta} \right)^{\frac{1}{n}} = \Theta \eta^{\frac{1}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (90a)$$

befolgen, wo Θ den Unterschied zwischen der Temperatur des ungestörten Flüssigkeitsstromes und der Temperatur an der Wand bedeutet.[1])

Als Ausdruck der Schubspannung an der Wand darf man die klassische Form von Prandtl-Karmán wählen mit den Werten von ϱ und ν, die an der Wand vorhanden sind, d. h.

$$\tau_w = \psi \varrho_w U^2 \left(\frac{\nu_w}{U \Delta} \right)^{1/4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (91)$$

da ja nach der Theorie die Schubspannung nur von der Verteilung der Geschwindigkeit in unmittelbarer Nachbarschaft der Wand abhängen soll. Daraus kann die Grenzschichtdicke in Abhängigkeit von der Länge bestimmt werden, indem man die Differentialgleichung der Grenzschicht, d. h.

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\Delta} \varrho u^2 \, dy - U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\Delta} \varrho u \, dy = - \tau_w \quad . \quad . \quad (92)$$

integriert. Bezeichnen wir *für Gase* mit T_w, T_0, ϱ_w, ϱ_0 die absoluten Temperaturen und Dichten an der Wand und im ungestörten Strom, so ist mit $p =$ konst:

$$\varrho = \varrho_w \; \varrho/\varrho_w = \varrho_w \, T_w/T = \varrho_w T_w \, (T_w + \Theta \eta^{1/7}) = \varrho_w/(1 + \chi \eta^{1/7})$$

mit

$$\chi = \frac{\Theta}{T_w} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (93)$$

Die Integrale in (92) nehmen die Form

$$\int_0^1 \varrho_w U \frac{\eta^{1/7} \, d\eta}{1 + \chi \eta^{1/7}} = \varrho_w U \psi_1 (\eta_1 \chi) \Big|_0^1 = \varrho_w U \; \psi_{11} \quad . \quad (93a)$$

$$\int_0^1 \varrho_w U^2 \frac{\eta^{2/7} \, d\eta}{1 + \chi \eta^{1/7}} = \varrho_w U \psi_2 (\eta_1 \chi) \Big|_0^1 = \varrho_w U^2 \psi_{21} \quad . \quad (93b)$$

an, wo ψ_{11} ψ_{21} graphisch oder analytisch bestimmt werden können. Gl. (92) lautet dann

$$\Delta' = \frac{\partial \Delta}{\partial x} = \frac{\tau_w}{(\psi_{11} - \psi_{21}) \, \varrho_w U^2} \quad . \quad . \quad . \quad (93c)$$

$$\text{Mit } \tau_w = \psi \varrho_w U^2 \left(\frac{\nu_w}{U \Delta} \right)^{1/4} \text{ und } \psi = 0{,}0225 \quad . \quad . \quad (94)$$

erhält man durch Integration von (93c):

$$\Delta = \psi_0 (\chi) \left(\frac{\nu_n}{U x} \right)^{1/5} x \quad \text{mit } \psi_0 (\chi) = \left(\frac{4}{5} \frac{\psi}{\psi_{11} - \psi_{21}} \right)^{4/5} \quad . \quad (95)$$

folgende Abhängigkeit des ψ_0 von χ

$\chi =$	0	1	3	5
$\psi_0 =$	0,370	0,587	0,975	1,355

oder angenähert

$$\psi_0 = 0{,}370 + 0{,}198 \, \chi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (96)$$

Die an die Wand übergehende Wärme ist nach (87a) durch Gleichung

$$q = \gamma_w c_p \frac{\tau_w}{\varrho_w} \frac{(\partial \vartheta / \partial y)}{(\partial u / \partial y)_{y=0}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97)$$

gegeben. Mit Gl. (90a) und $n = 7$ entsteht

$$q = \psi \gamma_w c_p U \Theta \left(\frac{\nu_w}{U \Delta} \right)^{1/4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97a)$$

Die grosse Veränderlichkeit des γ und ν in der Nähe der Wand legt es nahe, den Einfluss der *laminaren „Endschichte"* zu untersuchen. In dieser darf man, wie in der „S. B. Z." vom 30. Oktober 1926 erläutert

$$\vartheta_1 = a \eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

setzen und deren Dicke $\Delta_1 = \Delta \eta_1$ aus der Gleichheit der Schubspannungen in der Uebergangsebene bei $\eta = \eta_1$ bestimmen. Dabei kommt die Veränderlichkeit der Temperatur dadurch zur Geltung, dass man für die Zähigkeit nicht den Wert ν_w bei $\eta = 0$, sondern einen Mittelwert zwischen ν_w und $\nu_{\eta = \eta_1}$ nehmen muss.

Die Nachrechnung mit den vollständig integrierten Gleichungen der rein turbulenten Schicht weist nach, dass die Schubspannung in der Nähe der Wand schlimmstenfalls mit dem Abstand verhältnisgleich abnimmt. Da nun $\Delta_1/\Delta = \eta_a$ im allgemeinen sehr klein sein wird (aber auch nur für solche Fälle), darf man als Wert der Schubspannung im Abstande Δ_1 den Betrag annehmen, den die Schubspannung bei Fortsetzung des zwischen Δ und Δ_1 bestehenden Temperaturverlaufes an der Wand annehmen würde. Für die Temperatur innerhalb des turbulenten Bereiches gilt das Gesetz

$$\vartheta_{II} = \Theta_1 \eta^{1/7} + \Theta_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (98a)$$

[1]) Die Beziehung (90a) findet sich zum ersten Male für $\varrho =$ konst. in meinem Aufsatz vom 30. Oktober 1926 in „S. B. Z." abgeleitet. Für veränderliches ϱ wurde sie von meinem Assistenten Herrn Ing. Herzog durch vollständige Ausrechnung der Grundgleichungen unter der Annahme $u = U \eta^{1/7}$ festgestellt. Sie ist, wie aus obigem erhellt, allgemein, für jeden Geschwindigkeitsverlauf gültig.

mit der Bedingung, dass für $\eta = 1$ der gegebene Temperatur-Unterschied Θ erreicht werde, d. h. $\Theta = \Theta_1 + \Theta_2$ oder $\Theta_2 = \Theta - \Theta_1$ somit

$$\vartheta_{II} = \Theta - \Theta_1 (1 - \eta^{1/7}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (98\,b)$$

Bis zur Wand, d. h. $\eta = 0$ fortgesetzt, erhielte man für die absolute Temperatur den Betrag

$$T_w' = T_w + \Theta_2 = T_w + \Theta - \Theta_1 \quad . \quad . \quad (98c)$$

und dieser entspricht die Schubspannung

$$\tau_w' = \psi \varrho' U^2 \left(\frac{\nu'}{U \Delta^*}\right)^{1/4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (99)$$

wobei ϱ' ν' sich auf T_w' beziehen. Die neue Schichtendicke Δ^* wird angenähert wieder aus (93c) gewonnen, worin jedoch die Integrale (93a) (93b) nicht auf T_w sondern auf T_w' bezogen werden müssen, d. h. an Stelle von χ die Grösse

$$\chi' = \frac{\Theta_1}{T_w'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (99a)$$

zu setzen ist. Wollte man genauer vorgehen, so müsste zwischen $\eta = 0$ und $\eta = \eta_1$ mit linearem Verlauf der Geschwindigkeit integriert werden. Im andern Falle ist es erlaubt, den Beiwert ψ_0' in Gl. (95) gemäss Gl. (96) mit χ' nach Gl. (99a) zu berechnen.

Die erste der zu erfüllenden Bedingungen, d. h. die Gleichheit der Schubspannungen lautet mithin, wenn man die Mittelwerte zwischen $\eta = 0$ und $\eta = \eta_1$ durch Ueberstreichen der Buchstaben bezeichnet:

$$\bar{\varrho}\,\bar{\nu}\,\frac{u_1}{\Delta_1} \cong \tau_w' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (99\,b)$$

Die Gleichheit der Temperaturen wird durch die Beziehung

$$a\,\eta_1 = \Theta_1\,\eta_1^{1/7} + \Theta - \Theta_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (100)$$

ausgesprochen. Die Gleichheit der aus der turbulenten in die laminare Schichte übergehenden Wärmemenge fordert

$$q_1 = g\,c_p\,\tau_w'\,\frac{\Theta_1}{U} = \lambda\,\frac{\bar{\vartheta}_1}{\Delta_1} = \frac{\gamma\,c_p}{\bar{\sigma}}\,\frac{\bar{\nu}}{\Delta^*}\,\frac{a\,\eta_1}{\eta_1} \quad . \quad . \quad (101)$$

Aus (99) bis (101) sind zu bestimmen Δ_1, a, Θ_1. Wir schieben a aus (100) in Gl. (101) ein und erhalten die Zwischenauflösung

$$\Theta_1 = \frac{\Theta}{1 + (\bar{\sigma} - 1)\,\eta_1^{1/7}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (102)$$

Somit ist die an die Wand übergehende Wärme, angenähert als gleich gross wie q_1 in Gl. (101) aufgefasst:

$$q_0 = \frac{g\,c_p\,\tau_w'\,\Theta/U}{1 + (\bar{\sigma} - 1)\,\eta_1^{1/7}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (103)$$

Bei technischen Gasen wird man im Mittel $\bar{\sigma} = 1$ setzen dürfen, wodurch $\Theta_1 = \Theta$ wird, somit τ_w' in τ_w gemäss Gl. (91) übergeht. Dies bedeutet, dass die *übergehende Wärmemenge mit derjenigen, die einer rein turbulenten Grenzschichte* (d. h. Gl. 97a) *entspricht, übereinstimmt.*

Ist $\bar{\sigma}$ von 1 verschieden, so verursacht die Auflösung grosse Umständlichkeiten. Die Temperatur Θ_1 ist dann in χ', Δ^*, ν', ϱ', $\bar{\sigma}$, η_1 enthalten. Die zu einem frei gewählten Abstand x zu bestimmenden Grundgrössen sind Θ_1, Δ_1, Δ^*, a; die zur Verfügung stehenden Gleichungen: (95), (99), (100), (101). Die Auflösung kann offenbar nur auf dem Wege des Probierens erfolgen. Dabei darf nicht übersehen werden, dass am Anfang der Platte die Grenzschichte rein laminar verläuft und dass unsere Formeln nur für kleine Werte von η_1 gelten.

Nachtrag zum Wärmeübergang bei veränderlicher Grundströmung.

(Zum Aufsatz auf Seite 193 vom 9. April)

Obschon bei den Beobachtungen von Dönch die Geschwindigkeit trotz Beschleunigung der Grundströmung überall das $^1/_8$-Gesetz, also $n =$ konst. einzuhalten scheint, wird bei grössern Beschleunigungen eine Verformung der Geschwindigkeitskurve[1] zu erwarten sein, die man in erster Näherung durch Einführung von n in der Grundformel

$$u = U\eta^{1/n} \quad \text{mit} \quad \eta = y/\Delta \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

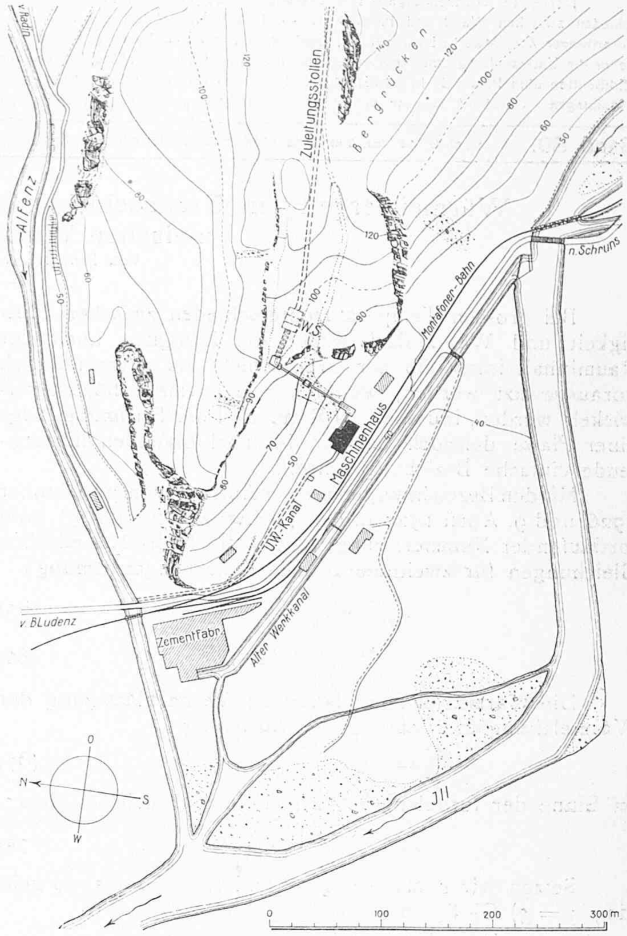

Abb. 22. Lageplan des Kraftwerks samt Umgebung. — Masstab 1 : 6000.

als einer Funktion der Weglänge x zum Ausdruck bringen kann. Bei einer Verzögerung findet schliesslich Ablösung mit Rückströmung statt, und für die Geschwindigkeitsfunktion müsste eine gar verwickelte Form gewählt werden. Nach (104) wird mit $\partial n/\partial x = n'$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U'\eta^{1/n} - \frac{U}{n}\eta^{1/n}\frac{\Delta'}{\Delta} - U\eta^{1/n}\,\mathrm{lgn}\,(\eta)\,\frac{n'}{n^2} \quad (105)$$

Um den berichtigten Wert der Schubspannung an der Wand abzuleiten ist $\partial\tau/\partial y$ zu bilden, was am bequemsten an Hand der Grundgleichung (36) geschieht, und für $\eta = 1$ im Sinne des fraglichen Aufsatzes auf die Bedingung

$$\frac{\Delta'}{\Delta} > -\frac{U'}{U} - \frac{n'}{n\,(n+1)} \quad . \quad . \quad . \quad (106)$$

führt. Die Differentialgleichung der Grenzschichte lautet, nachdem die Integrationen durchgeführt worden sind,

$$\frac{\partial}{\partial x}\,\varrho U^2\Delta\,\frac{n}{n+2} - U\,\frac{\partial}{\partial x}\,\varrho U\Delta\,\frac{n}{n+1} = \varrho\,\Delta\,UU' - \tau_w \quad (107)$$

und liefert

$$\Delta' = -\frac{3n+2}{n}\,\frac{U'}{U}\,\Delta + \frac{(n^2-2)\,n'\,\Delta}{n\,(n+1)\,(n+2)} + \frac{(n+1)\,(n+2)}{n}\,\frac{\tau_w}{\varrho U^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (108)$$

durch dessen Einschieben in (106) sich ein unterer Grenzwert für τ_w ergibt. Die Wiederholung des gleichen Gedankenganges wie im fraglichen Aufsatz führt auf den Schlussausdruck

$$\tau_w = \frac{2}{n+2}\,\varrho\,\Delta\,UU' - \frac{n\,\Delta\,\varrho\,U^2\,n'}{(n+1)\,(n+2)^2} + \tau_0 \quad (109)$$

mit

$$\tau_0 = B^{\frac{-2n}{n+1}}\,\varrho\,U^2\left(\frac{\nu}{U\Delta}\right)^{\frac{2}{n+1}} \quad . \quad . \quad . \quad (110)$$

Sowohl n wie n' sind offenbar Abhängige von U, U'. Auf weitere Diskussion, insbesondere die Bestimmung der durchgehenden Wärme einzugehen, hat keinen Sinn, bevor jenes Abhängigkeitsgesetz durch den Versuch ermittelt worden ist.

[1] Ich verdanke Dr. J. Ackeret diesen Hinweis und die Mitteilung, dass bereits Beobachtungen hierüber vorliegen. Nachträglich bemerke ich, dass meine eigenen Versuche in „Dampf- und Gasturbinen" (V. Aufl., S. 53, Abb. 34 und 35) denselben Gegenstand betreffen und bereits gewisse Einblicke gewähren.