Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 89/90 (1927)

Heft: 19

Artikel: Die praktische Berechnung der Biegebeanspruchug in kreisrunden Behältern mit gewölbten Böden und Decken und linear veränderlichen Wandstärken

Autor: Pasternak, Peter

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41800

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

INHALT: Die praktische Berechnung der Biegebeanspruchung in kreisrunden Behältern mit gewölbten Böden und Decken und linear veränderlichen Wandstärken. — Schaffhausen als Industriestadt. — L'aménagement de la vallée du Flon à Lausanne. — Das Tensometer von Huggenberger. — Theorie und Praxis der elektrischen Lichtbogen-Schweissung. — XI. Congrès International des Architectes, 1927. — † Hans Hugi. — Mitteilungen: Die rechtliche Ordnung der schweizerischen Elektrizitätsversorgung. Schweizer. Wasserwirtschaftsverband. Eidgen. Oberbauinspektorat. Gas- und Wasserwerk der Stadt Luzern. Le Corbusier. Eidgen. Tochnische Hochschule. — Wettbewerbe: Schulhaus in Zollikofen bei Bern. Ueberbauung des Stampfenbach-Areals in Zürich. — Literatur. — Vereinsnachrichten: Basler I.- u. A.-V. S. T. S.

Band 90. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 19

Die praktische Berechnung der Biegebeanspruchung in kreisrunden Behältern mit gewölbten Böden und Decken und linear veränderlichen Wandstärken.

Von Dr. Ing. PETER PASTERNAK, Privatdozent an der Eidgen. Techn. Hochschule in Zürich.

Die wirtschaftlichste Form für Hoch- und Tiefbehälter mit grösserem Fassungsvermögen ist zweifellos die im Titel genannte; denn es treten in solchen Behältern als Hauptbeanspruchungen die gleichförmig verteilten, statisch bestimmten Membran-Spannungen auf, die für die kreiszylindrische Wand und die gewölbten Böden und Decken die geringsten Beton- und Bewehrungs-Abmessungen ergeben.

Beträchtliche *Nebenspannungen,* die namentlich in Eisenbetonbehältern als Zugspannungen infolge der zusätzlichen *Meridianbiegemomente* nicht vernachlässigt werden dürfen, stellen sich nur in den Randkreisen ein, infolge der monolithischen Verbindung der Wand mit den Böden und Decken. Die an den genannten Stellen nötige Zusatzbewehrung erhöht die Behälterkosten nur in ganz geringem Masse, da die Meridianbiegemomente sehr rasch, von den Rändern weg, in das Innere der Wände, Böden und Decken abklingen.

Gerade umgekehrt ist die Grössenordnung der innern Schnittkräfte in den rechteckigen Kastenbehältern. Hier überwiegen die Biegebeanspruchungen bedeutend die von den zentrischen Normalkräften herrührenden Spannungen, und es ergeben sich deswegen in solchen Behältern sehr starke Beton- und Bewehrungs-Abmessungen, die selbst bei mässig grossen Spannweiten die Anordnung von in mancher Hinsicht störenden Zwischenstützen erfordern.

Freilich verlangen die kreisrunden Behälter, zumal in der Verschalungsarbeit der gewölbten Böden und Decken, eine ungleich sorgfältigere Ausführung und also technisch besser geschulte Arbeitsorgane. Die Ersparnisse an teurem Baumaterial, wie Zement und Eisen, die bei grössern Objekten gegenüber den Kastenbehältern 30 % und mehr betragen, fallen aber so stark ins Gewicht, dass man, bei Turm- und eingegrabenen Behältern unter Aufschüttung, ohne zwingende Gründe auf die kreisrunde Form und gewölbte Decken und Böden nicht verzichten soll.

Meistens begnügt man sich mit der Bemessung kreisrunder Behälter auf Grund der statisch bestimmten, spezifischen Meridian- und Ringnormalkräfte, deren einfache Berechnung schon *Lamé* angegeben hat. Es ist dann gleichgültig, ob die Wandstärken konstant oder veränderlich sind.

Für die Berechnung der zusätzlichen Meridianbiegemomente in den Anschlusskreisen bildet dies aber eine wesentliche Erschwerung, wenn nach mathematisch strengen Lösungen der sich ergebenden Differentialgleichungen geforscht wird. Begnügt man sich aber mit Näherungslösungen, die bei Eisenbetonbehältern mit den stark schwankenden elastischen Eigenschaften des Beton als begründet erscheinen, so können auch bei *linear veränderlichen Wandstärken einfache geschlossene Formeln für die als Matrixvorzahlen in die Kontinuitätsbedingungen tretenden Einflusszahlen der elastischen Randbewegungen der Einzelschalen* aufgestellt werden.[1])

[1]) Für *konstante* Wandstärken sind solche Formeln vom Verfasser schon früher angegeben worden in den Abhandlungen: „Formeln zur raschen Berechnung der Biegebeanspruchung in kreisrunden Behältern". „S. B. Z." 1925 S. 129, und „Die praktische Berechnung biegefester Kugelschalen, kreisrunder Fundamentplatten auf elastischer Bettung und kreiszylindrischer Wandungen in gegenseitiger monolither Verbindung". (Mit einem Zusatz über die Kegelschale) „Zeitschrift f. angew. Math. u. Mech." 1926 S. 1 bis 29.

I. Die kreiszylindrische Behälterwand mit linear veränderlicher Wandstärke.

Diese ist erstmals von Professor *H. Reissner* behandelt worden in der Arbeit: „Ueber die Spannungsverteilung in zylindrischen Behälterwänden." [2]) In jener Abhandlung findet sich noch nicht die Zerlegung der sich ergebenden Differentialgleichung vierter Ordnung in zwei simultane zweiter Ordnung mit dem gleichen Differentialoperator, die der genannte Verfasser 1912 in der „Müller-Breslau Festschrift" für die Kugelschale gegeben und die Professor Dr. *E. Meissner* als grundlegend für das Biegeproblem aller Rotationsschalen erkannt hat. Zur Ableitung unserer Näherungslösung gehen wir von den simultanen Differentialgleichungen nach Prof. E. Meissner aus.[3])

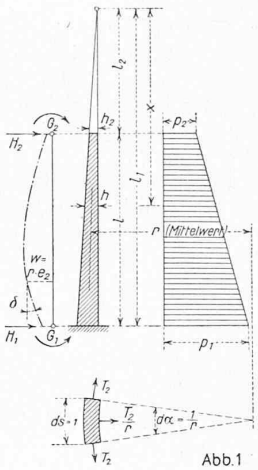

Abb. 1

Bezeichnungen (Abbildung 1).

a) für die *Wandabmessungen:*

r unveränderlicher Radius der Wand-Mittelfläche,

h linear veränderliche Wandstärke, h_1 und h_2 Randwerte,

l Wandlänge, l_1 und l_2 Abszissen des obern und des untern Randes inbezug auf den gewählten Nullpunkt, d. i. der Schnittpunkt der äussern und der innern Mantellinie im Meridianschnitt.

b) für die *spezifischen Werte der Schnittkräfte:*

T_2 Ringkraft, T_{20} ihr statisch bestimmter Wert,

H Querkraft, Randwerte H_1, H_2

G Meridianbiegemoment; Randwerte G_1, G_2,

c) für die *Deformationsgrössen:*

$e_3 = E\varepsilon_2 = E$-fache Ringdehnung,

$d = E\vartheta = E$-fache Meridian-Tangentendrehung,

d_0 ihr statisch bestimmter Wert.

d) *als stetig verteilte Belastung zwischen den Wandrändern wird ein linear veränderlicher Horizontaldruck* (Flüssigkeits- bezw. Erddruck) *p, mit den Randwerten p_1, p_2 angenommen.*

Der sehr geringe Einfluss der Vertikalbelastungen auf die Durchbiegung der Wand wird vernachlässigt, also gesetzt

$$\nu = \frac{1}{m} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Sämtliche weitern Bezeichnungen werden erst dort eingeführt, wo sie erstmals auftreten.

Gleichgewichtsbedingungen:

gegen Verschieben eines Wandelementes in horizontaler Richtung

$$\frac{T_2}{r} + H' - p = 0 \text{ oder } T_2 = -rH' + pr = -rH' + T_{20} \quad (2a)$$

gegen Drehen $G' = H$ (Satz von Schwedler) (2 b)

Elastizitätsbedingungen (unter Vernachlässigung von ν)

$$G = \frac{-h^3}{12} d' \quad . \quad . \quad (3a) \qquad e_2 = \frac{T_2}{h} \quad . \quad . \quad (3b)$$

[2]) „Beton und Eisen" 1908, Heft 6.

[3]) Ueber Elastizität und Festigkeit dünner Schalen. „Vierteljahrsschrift der Naturforsch. Gesellschaft Zürich" 1915. Vgl. auch Fussnote 7.

Verträglichkeitsbedingung.

$$d = r\,(e_2)' = r\left(\frac{T_2}{h}\right)' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Wählt man, nach E. Meissner,

$$d \text{ und } \sigma = \frac{H\,r}{h^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5a)$$

als Grundvariable, so erhält man durch beidseitige Ableitung von (3a) und aus (4) mit Berücksichtigung von (2a) und (2b) folgende zwei simultanen Differentialgleichungen mit dem selben Differentialoperator

$$\left.\begin{aligned} r\,h\left(d'' + \frac{3\,h'}{h}\,d'\right) &= 12\,\sigma \\ r\,h\left(\sigma'' + \frac{3\,h'}{h}\,\sigma'\right) &= -\,d + d_0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (5b)$$

Die Störungsfunktion d_0 in der zweiten Gleichung hat die anschauliche Bedeutung der *statisch bestimmten,* mit T_{20} aus (4) zu berechnenden Meridiantangentendrehung, also

$$d_0 = r\left(\frac{p}{h}\right)' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Berücksichtigt man, dass für die linear veränderlichen p und h die ersten Ableitungen konstant sind und die zweiten verschwinden, so erhält man aus (6)

$$d_0' = -\,\frac{2\,h'}{h}\,d_0\,, \qquad d_0'' = +\,\frac{6\,h'}{h}\,d_0 \quad . \quad (6a)$$

womit man erkennt, dass die statisch bestimmte Meridiantangentendrehung die Partikularlösung von (5) bildet. In der Tat werden die Gleichungen (5) unter Berücksichtigung von (6a) befriedigt durch

$$\sigma \text{ oder } H = 0 \quad \text{und} \quad d = d_0 \quad . \quad . \quad . \quad (6b)$$

Man kann also die in die Belastungsglieder der Kontinuitäts-Bedingungen tretenden Randdrehungen und Verschiebungen (a_{10}, a_{20}) der an beiden Rändern frei drehbaren und horizontal freiverschieblichen Zylinderschale infolge p, in aller Strenge, aus T_{20} allein ermitteln. Wir erledigen die Bestimmung von a_{10} und a_{20} für beide Ränder am besten gleich anschliessend.

Mit dem Anfangspunkt im obern Rand hat man

$$\left.\begin{aligned} p &= p_2 + (p_1 - p_2)\,\frac{x}{l} \\ h &= h_2 + (h_1 - h_2)\,\frac{x}{l} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

und damit für den untern Rand

$$a_{10} = r^2\left(\frac{p}{h}\right)'_1 = \frac{r^2}{l}\,\frac{\left(p_1\,\frac{h_2}{h_1} - p_2\right)}{h_1}$$

$$a_{20} = r\,(e_2)_1 = r\left(\frac{T_{20}}{h}\right)_1 = \frac{p_1\,r^2}{h}$$

und für den obern Rand

$$a_{10} = \frac{r^2}{l}\,\frac{p_1 - p_2\,\frac{h_1}{h_2}}{h_2}$$

$$a_{20} = p_2\,\frac{r^2}{h_2}$$

E-fache Werte . (8)

Zur Bestimmung der Einflusszahlen der elastischen Randbewegungen, d. s. die Drehungen und Horizontalverschiebungen (a_{11}, a_{12}, a_{22}) der Wandränder infolge der Gleichgewichtsysteme $G_1 = 1$, $H_1 = 1$ bezw. $G_2 = 1$, $H_2 = 1$ sind die *homogenen* Differentialgleichungen (5) zu integrieren. Dies kann angenähert wie folgt geschehen.

Mit $h = k\,x$ im ursprünglichen Koordinatensystem $\left(\text{also } k = \frac{h_1 - h_2}{l}\right)$ und $t = \frac{\sqrt{k\,x}}{\sqrt[4]{3}}$ führt man die neue numerische Variable $\xi = \frac{\sqrt{x}}{t}$ ein. Unterscheidet man die Ableitungen nach ξ von denen nach x durch Punkte an Stelle der Akzente und berücksichtigt

$$d' = \frac{1}{2\,t^2}\,\frac{1}{\xi}\,\dot{d}\,; \quad d'' = \frac{1}{4\,t^4}\,\frac{1}{\xi^2}\,\ddot{d} - \frac{1}{4\,t^4}\,\frac{1}{\xi^3}\,\dot{d} \quad . \quad . \quad (9)$$

so gehen die Gleichungen (5) in das einfachere System über

$$\left.\begin{aligned} \ddot{d} + \frac{5}{\xi}\,\dot{d} &= 4\sqrt{3}\,\sigma \\ \ddot{\sigma} + \frac{5}{\xi}\,\dot{\sigma} &= -\,\frac{d}{\sqrt{3}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Aus (10) können die ersten Ableitungen eliminiert werden durch die Ansätze:

$$d = \varrho\,u\,, \quad \sigma = \varrho\,v\,, \quad \varrho = \xi^{-5/2}, \quad \dot{\varrho} = \frac{-5}{2}\,\frac{\varrho}{\xi}\,, \quad \ddot{\varrho} = \frac{35}{4}\,\frac{\varrho}{\xi^2} \quad . \quad (11)$$

Man erhält das endgültige simultane System

$$\left.\begin{aligned} \ddot{u} - 3{,}75\,\frac{u}{\xi^2} &= 4\sqrt{3}\,v \\ \ddot{v} - 3{,}75\,\frac{v}{\xi^2} &= -\,\frac{u}{\sqrt{3}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

dessen Differentialoperator auf der linken Seite genau der selbe ist, wie in den entsprechenden Differentialgleichungen der Kegelschale mit konstanter Wandstärke.[4])

Ist der Anlauf der Wand sehr gross, was bei reiner Betonkonstruktion oder gemauerten Behälterwänden der Fall sein kann, so führt man die Gleichungen (12) in fünfgliedrige symmetrische Differenzengleichungen über, die genau gleich lauten wie bei der Kegelschale konstanter Wandstärke.[5]) Bei Behälterwänden in Eisen- oder Eisenbetonkonstruktion, deren Anlauf gewöhnlich nur wenige Prozente (allerhöchstens 10 %) beträgt, können die Gleichungen (12) mit sehr guter Annäherung durch die resultierende Differentialgleichung

$$^1/_4\,u^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + u = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

ersetzt werden. Im Bereich der Behälterwand ist nämlich, dank der gemachten Voraussetzung, ξ^2 gross, und da gleichzeitig, für die hier in Frage kommenden Randbelastungen, u und v sehr rasch und unbeschränkt abklingende Funktionen darstellen, die gegenüber ihren zweiten Ableitungen sehr klein sind, kann man die aus doppeltem Grunde gegenüber $\ddot{u}$ und $\ddot{v}$ sehr kleinen zweiten Glieder im Differentialoperator von (12) vernachlässigen.

Meistens sind die dünnen Behälterwände so hoch, dass die Auflagerbedingungen an einem Rande den von den Gleichgewicht-Systemen G, H am andern Rande hervorgerufenen Spannungs- und Deformationszustand nicht beeinflussen können. Greifen also am Behälter nur G_1, H_1 oder G_2, H_2 an, so genügt es deswegen, nur die *abklingenden* Einzellösungen von (13) zu berücksichtigen. Diese Lösungen und ihre im folgenden notwendigen ersten drei Ableitungen lauten also

für den untern Rand:

$$\left.\begin{aligned} u &= C_1\,e^{\xi}\cos\xi + C_2\,e^{\xi}\sin\xi \\ \dot{u} &= C_1\,e^{\xi}(\cos\xi - \sin\xi) + C_2\,e^{\xi}(\cos\xi + \sin\xi) \\ \ddot{u} &= 2\,[-\,C_1\,e^{\xi}\sin\xi + C_2\,e^{\xi}\cos\xi] \\ \dddot{u} &= 2\,[-\,C_1\,e^{\xi}(\cos\xi + \sin\xi) + C_2\,e^{\xi}(\cos\xi - \sin\xi)] \end{aligned}\right\} \quad (14a)$$

und *für den obern Rand*

$$\left.\begin{aligned} u &= C_1\,e^{-\xi}\cos\xi + C_2\,e^{-\xi}\sin\xi \\ \dot{u} &= -\,C_1\,e^{-\xi}(\cos\xi + \sin\xi) + C_2\,e^{-\xi}(\cos\xi - \sin\xi) \\ \ddot{u} &= 2\,[C_1\,e^{-\xi}\sin\xi - C_2\,e^{-\xi}\cos\xi] \\ \dddot{u} &= 2\,[C_1\,e^{-\xi}(\cos\xi - \sin\xi) + C_2\,e^{-\xi}(\cos\xi + \sin\xi)] \end{aligned}\right\} \quad (14b)$$

A. Berechnung der Einflusszahlen für den untern Rand.

Für die Randgleichgewichtsysteme G_1, H_1 lauten die Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned} G_1 = (J\,d')_1 &= \left(\frac{J}{2\,t^2\,\xi}\,\dot{d}\right)_1 = \left[\frac{J\,\varrho}{2\,t^2\,\xi}\left(\dot{u} - \frac{2{,}5}{\xi}\,u\right)\right]_1 \\ H_1 &= \left(h^2\,\frac{\sigma}{r}\right)_1 = -\left(\frac{\varrho\,h^2}{4\sqrt{3}\,r}\,\ddot{u}\right)_1 \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Führt man die neuen Konstanten

$$A_1 = (J\,\varrho\,e^{\xi}\,C_1)_1\,, \quad A_2 = (J\,\varrho\,e^{\xi}\,C_2)_1$$

und die Randcharakteristik $s_1 = \frac{\sqrt{h_1\,r}}{\sqrt[4]{3}} = 0{,}76\sqrt{h_1\,r}$ (16)

ein, und berücksichtigt die leicht erkennbaren Beziehungen

$$s_1 = 2\sqrt{l_1}\,t_1\,, \quad \xi_1 = 2\left(\frac{l}{s}\right)_1, \quad \frac{h'}{h} = \frac{2}{\xi}$$

[4]) Vergleiche die erwähnte Abhandlung in der „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik".

[5]) Bei der Zylinderschale erhält man bei jedem, auch nur graphisch gegebenem Wandstärkegesetz aus der Differentialgleichung

$$\left(\frac{h^3}{12}\,w''\right)'' + \frac{w}{r^2} = 0$$

wo w die E-fache horizontal-radiale Verschiebung bedeutet, *fünfgliedrige und symmetrische Differenzengleichungen.* Die aus (12) bei linear veränderlicher Wandstärke sich ergebenden Differenzengleichungen haben aber den *Vorteil, für alle Zylinderschalen die gleichen* zu sein, und dass in jeder Gleichung, an der Stelle von *drei,* nur *zwei* neue Matrixvorzahlen auftreten.

so gehen die Gleichungen (15) über in

$$\left.\begin{aligned} &A_1\left[\cos - \sin - 1{,}25\left(\frac{s}{l}\right)\cos\right] + \\ &A_2\left[\left(\cos + \sin - 1{,}25\left(\frac{s}{l}\right)_1 \sin\right)\right] = s_1\, G_1 \\ &- A_1 \sin + A_2 \cos = - H_1\left(\frac{s_1^2}{2}\right) \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

(zur Vereinfachung ist das Argument ξ_1 weggelassen).

Aus (17) errechnet man

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= G_1 \frac{s_1 \cos}{1 - 1{,}25\left(\frac{s}{l}\right)_1} + H_1 \frac{s_1^2}{2}\left[\cos + \sin - 1{,}25\left(\frac{s}{l}\right)_1 \sin\right] \\ A_2 &= G_1 \frac{s_1 \sin}{1 - 1{,}25\left(\frac{s}{l}\right)_1} - \frac{H s_1^2}{2}\,\frac{\left[\cos - \sin - 1{,}25\left(\frac{s}{l}\right)_1 \cos\right]}{1 - 1{,}25\left(\frac{s}{l}\right)_1} \end{aligned}\right\} (17a)$$

Die Einflusszahlen der elastischen Verschiebungen des untern Randes, das sind die JE-fachen Drehungen und Verschiebungen infolge $G_1 = 1$ und $H_1 = 1$, ergeben sich als Vorzahlen von Jd und Jw infolge der gleichzeitigen Wirkung von G_1 und H_1

$$\begin{aligned} Jd &= A_1 \cos + A_2 \sin \\ &= \frac{s_1}{1 - 1{,}25\left(\frac{s}{l}\right)_1} G_1 + \frac{H_1 s_1^2}{2}\,\frac{1}{1 - 1{,}25\left(\frac{s}{l}\right)_1} \end{aligned} \quad (18)$$

Die Bestimmung von Jw ist umständlicher; zunächst hat man

$$\begin{aligned} w &= r\left(\frac{T_2}{h}\right) = - r^2 \frac{H'}{n} = - \frac{r}{h}(h^2 \sigma)' = \frac{r}{h s}(h^2 \sigma)^{\cdot} \\ &= - \frac{r h}{s}\left(\sigma + \frac{2h^{\cdot}}{h}\sigma\right) = - \frac{r h}{s}\left(\sigma^{\cdot} + \frac{4}{\xi}\sigma\right) \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} J w &= \frac{- r h \varrho}{s\, 4\sqrt{3}} J\left[u^{\cdot\cdot} - \frac{2{,}5}{\xi} u^{\cdot} + \frac{4}{\xi} u^{\cdot}\right] \\ &= \varrho \frac{J s}{4}\left[u^{\cdot\cdot} + 0{,}75\left(\frac{s}{l}\right)_1 u^{\cdot}\right] \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} J w = - \frac{s_1}{2}\Big[&- \left(\cos + \sin + 0{,}75\left(\frac{s}{l}\right)_1 \sin\right) A_1 + \\ &+ \left(\cos - \sin + 0{,}75\left(\frac{s}{l}\right)_1 \cos\right) A_2\Big] \end{aligned}$$

Setzt man A_1 und A_2 aus (17a) ein, so wird

$$\begin{aligned} J w = &\frac{s_1^2}{2}\,\frac{1}{1 - 1{,}25\left(\frac{s}{l}\right)_1} G_1 + \\ &+ \left[\frac{1 - 0{,}625\left(\frac{s}{l}\right)_1}{1 - 1{,}25\left(\frac{s}{l}\right)_1} + 0{,}375\left(\frac{s}{l}\right)_1\right]\frac{s_1^3}{2} H_1 \end{aligned} \quad (18a)$$

Der Klammerausdruck in (18a) kann, unter Vernachlässigung des quadratischen Gliedes, genau genug ersetzt werden durch

$$\frac{1 - 0{,}25\left(\frac{s}{l}\right)_1}{1 - 1{,}25\left(\frac{s}{l}\right)_1}$$

Damit sind die Einflusszahlen für den dickern Rand gefunden; wir wollen sie mit den JE-fachen Belastungsgliedern unter (8) zusammenstellen.

Einflusszahlen:

Drehung infolge $G_1 = 1$

$$a_{11} = \frac{1}{1 - 1{,}25\left(\frac{s}{l}\right)_1} s_1$$

Verschiebung infolge $G_1 = 1$ oder Drehung infolge $H_1 = 1$

$$a_{12} = \frac{1}{1 - 1{,}25\left(\frac{s}{l}\right)_1}\,\frac{s_1^2}{2}$$

Verschiebung infolge $H_1 = 1$

$$a_{22} = \frac{1 - 0{,}25\left(\frac{s}{l}\right)_1}{1 - 1{,}25\left(\frac{s}{l}\right)_1}\,\frac{s_1^3}{2} \quad (19)$$

Belastungsglieder infolge linear veränderlichem Horizontal-Druck:

Drehung $a_{10} = \frac{s_1^4}{4\,l}\left(p_1 \frac{h_2}{h_1} - p_2\right)$

Verschiebung $a_{20} = \frac{s_1^4}{4} p_1$

B. Berechnung der Einflusszahlen für den dünnern Rand.

Diese erfolgt, unter Benützung der Lösung (14b), auf sonst genau gleichem Weg wie unter A. ausführlich dargelegt, sodass man sich mit der Angabe der Ergebnisse begnügen kann:

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{1 + 1{,}25\left(\frac{s}{l}\right)_2} s_2 \\ a_{12} &= \frac{1}{1 + 1{,}25\left(\frac{s}{l}\right)_2}\,\frac{s_2^2}{2} \\ a_{22} &= \frac{1 + 0{,}25\left(\frac{s}{l}\right)_2}{1 + 1{,}25\left(\frac{s}{l}\right)_2}\,\frac{s_2^3}{2} \\ a_{10} &= \frac{s_2^4}{4\,l}\left(p_1 - p_2 \frac{h_1}{h_2}\right) \\ a_{20} &= \frac{s_2^4}{4} p_2 \end{aligned}\right\} \quad (19a)$$

Mit $h_1 = h_2$, $l_1 = l_2 = \infty$ gehen sämtliche berechneten Verschiebungsgrössen in jene der Zylinderschale mit konstanter Wandstärke über. Die Einflusszahlen unter A und B unterscheiden sich nur in den Vorzeichen von $\left(\frac{s}{l}\right)_1$ und $\left(\frac{s}{l}\right)_2$. Die auftretenden Vorzeichen entsprechen der Anschauung: Am untern Rand müssen sich grössere, am obern kleinere Drehungen und Verschiebungen wie bei unveränderlicher Wandstärke h_1 bezw. h_2 ergeben.

Man kann noch genauere Formeln für die Einflusszahlen erhalten, indem man die Gleichungen (12) entweder mit dem von Prof. *O. Blumenthal* bei der Kugelschale benützten asymptotischen Reihenansatz integriert[6]), oder noch unmittelbarer sich der asymptotischen Reihen bedient, die Prof. *E. Meissner*, für den betrachteten Fall, auf Grund der *Hankel*'schen asymptotischen Darstellung der komplexen Zylinderfunktionen berechnet hat.[7]) Beide Male erhält man die Korrektur-Koeffizienten der gesuchten Einflusszahlen als Potenzreihen des Argumentes $\left(\frac{s}{l}\right)_1$ bezw. $\left(\frac{s}{l}\right)_2$, die, *mit dem linearen Glied abgebrochen, genau die selben Ausdrücke ergeben, wie die von uns auf elementarem Wege berechneten.* Da $\left(\frac{s}{l}\right)_1$ und auch $\left(\frac{s}{l}\right)_2$ immer kleine Brüche darstellen, können unsere Formeln bei Eisenbetonbehältern als *genau* und bei Behältern mit grösserem Anlauf als praktisch genügend angenähert betrachtet werden.

Es sei noch erwähnt, dass die gegebene Ableitung der Formeln für die Einflusszahlen vereinfacht werden kann, indem man den Nullpunkt jeweils an den belasteten Rand verlegt, wie dies bei der Aufstellung der entsprechenden Formeln für die Schalen konstanter Wandstärke in der erwähnten Abhandlung getan wurde.

ZAHLENBEISPIEL 1.

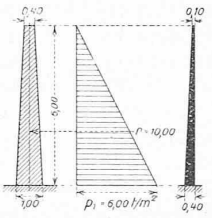

Abb 2

Eine kreiszylindrische Behälterwand in Stampfbeton 1:6 mit den Abmessungen nach Abbildung 2, hat einen Anzug von 10 % und ist am untern Rand vollkommen eingespannt. Man bestimme die Festhaltungskräfte.

$$s_1 = 0{,}76\sqrt{1 \cdot 10} = 2{,}4 \text{ m},$$

$$\lambda = \frac{l}{s_1} = \frac{6{,}00}{2{,}4} = 2{,}5$$

$$l_1 = 10{,}00 \text{ m}; \quad \frac{s}{l_1} = 0{,}24; \quad 1{,}25\,\frac{s}{l_1} = 0{,}3$$

$$s_1^2 = 5{,}76; \quad s_1^3 = 13{,}82; \quad s_1^4 = 33{,}1$$

[6]) Ueber asympt. Integration von Differentialgleichungen mit Anwendung auf die Berechnung von Spannungen in Kugelschalen. „Zeitschr. für Math. und Phys." 1913, S. 343. Die asympt. Integration nach Blumenthal vereinfacht sich wesentlich, wenn man sie auf eine der beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung, in die die Differentialgleichung vierter Ordnung nach E. Meissner zerfällt, anwendet. Vergl. Sammelband des Internat. Kongr. für Techn. Mech. Zürich 1927. Verlag Orell Füssli.

[7]) *E. Meissner*, Beanspruchung und Formänderung zylindrischer Gefässe mit linear veränderlicher Wandstärke. „Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich" 1917, S. 153.

$$a_{11} = \frac{s_1}{1 - 1{,}25\,\frac{s_1}{l_1}} = \frac{2{,}4}{0{,}7} = 3{,}43$$

$$a_{12} = \frac{s_1^2}{2\left(1 - 1{,}25\,\frac{s_1}{l_1}\right)} = \frac{5{,}76}{1{,}4} = 4{,}12$$

$$a_{22} = \frac{s_1^3}{2}\,\frac{1 - 0{,}25\left(\frac{s}{l}\right)_1}{1 - 1{,}25\left(\frac{s}{l}\right)_1} = \frac{13{,}82}{2}\cdot\frac{0{,}94}{0{,}7} = 9{,}28$$

$$a_{20} = \frac{s_1^4}{4}\,p_1 = \frac{33{,}1}{4}\cdot 6 = 49{,}6$$

$$a_{10} = a_{20}\,\frac{h_2}{h_1}\,\frac{1}{l} = \frac{49{,}6\cdot 0{,}4}{6} = 3{,}31\,.$$

Elastizitätsgleichungen [8]):

H_1	G_1	Belastungsglieder	Festverhältnisse
9,28	— 4,12	49,6	+ 0,443
	3,43	— 3,31	
	— 1,82	+ 22	
	1,61	18,69	
	$G_1 =$	11,6 tm	
	$H_1 =$	10,5 t	

Vernachlässigt man die Abnahme der Wandstärke nach oben, so erhält man [9]):

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= \frac{s^3}{2}(\lambda - 1) = \frac{13{,}82\cdot 1{,}5}{2} = 10{,}35 \text{ tm} \\ H &= \frac{s^2}{2}(2\lambda - 1) = \frac{5{,}26\cdot 4}{2} = 11{,}52 \text{ t} \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Das genaue Einspannmoment ist also um 12 % grösser als bei unveränderlicher Wandstärke.

Die Kurve der Meridianbiegemomente infolge der errechneten Randkräfte bestimmt man, genau genug, unter Annahme konstanter Wandstärke und mit Benützung der bekannten *Zimmermann*'schen Zahlentafel [10]) für den unendlich langen Balken auf elastischer Bettung aus folgender leicht ersichtlichen Gleichung

$$\left.\begin{aligned} G = G_1\,e^{-\varphi}\cos\varphi + (G_1 - H_1\,s_1)\,e^{-\varphi}\sin\varphi = G_1\,\eta_1 + \\ (G_1 - H_1\,s_1)\,\eta_2 \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

wo $\varphi = \frac{x}{s_1}$ mit Nullpunkt am untern Rand.

ZAHLENBEISPIEL 2.

Wird die selbe Behälterwand in leichter Eisenbeton-Konstruktion ausgeführt ($h_2 = 0{,}1$ m; $h_1 = 0{,}4$ m), so ist

$$s_1 = 0{,}76\sqrt{0{,}4\cdot 9{,}70} = \sim 1{,}5\,; \quad \lambda = \frac{6}{1{,}5} = 4$$

$$s_1^2 = 2{,}25\,; \quad s_1^3 = 3{,}375\,; \quad s_1^4 = 5{,}06$$

$$l_1 = 0{,}4\cdot 20 = 8 \text{ m}\,; \quad \frac{s_1}{l_1} = \frac{1{,}5}{8} = 0{,}1875$$

$$a_{11} = 1{,}96\,; \quad a_{12} = 1{,}47\,; \quad a_{22} = 2{,}21\,; \quad a_{20} = -7{,}55\,;$$
$$a_{10} = +0{,}314$$

und aus den entsprechenden Gleichungen

$$G_1 = 4{,}87 \text{ tm}, \quad H_1 = 6{,}66 \text{ t}$$

Die geschlossenen Formeln für unveränderliche Wandstärke ($h = 0{,}40$ m) ergeben

$$G_1 = \frac{3{,}375}{2}\cdot 3 = 5{,}07 \text{ tm } (+4{,}1\,\%)$$

$$H = \frac{2{,}25}{2}\cdot 7 = 7{,}88 \text{ t}$$

Das massgebende Randbiegemoment ergibt sich also praktisch gleich gross wie bei Berücksichtigung des Anlaufes. (Forts. folgt.)

[8]) Zur abgekürzten Schreibweise und Auflösung der Elastizitäts-Gleichungen vergleiche des Verfassers „Berechnung vielfach statisch unbestimmter biegefester Stab- und Flächentragwerke" Seite 25 (Verlag A.-G. Gebr. Leemann & Cie, Zürich und Leipzig).

[9]) Vgl. „S. B. Z." vom 12. Sept. 1925. — In den Formeln für M auf Seite 131 ist dort das positive Zeichen durch das *negative* zu ersetzen.

[10]) Ein Neuabdruck dieser Zahlentafel findet sich in der Abhandlung des Verfassers: Die baustatische Theorie biegefester Balken und Platten auf elastischer Bettung. „Beton und Eisen" 1926, Heft 9 und 10.

Schaffhausen als Industriestadt.

Vortrag, gehalten von Ing. H. KÄSER, an der Generalversammlung der G. E. P. 1927 in Schaffhausen.

(Fortsetzung von Seite 233)

Das Bedürfnis nach einer Kraftanlage und Kraftübertragung lag aber doch in der Luft, und als von Seiten der Industriegesellschaft Neuhausen ein Projekt über Kraftvermittlung durch komprimierte Luft ausgearbeitet und bekannt gegeben wurde, da entbrannte ein heftiger Kampf zwischen den Anhängern der Luft und denen des Wassers. Moser zog sich verärgert zurück; „werden meine Mitbürger durch Erfahrung etwas klüger und beweisen, dass sie selber etwas zu leisten den Willen und die Kraft haben, so gehe ich dann wahrscheinlich auch wieder an die Arbeit". Das sollte nun glücklicherweise nicht mehr lange dauern; der Geist Mosers hatte gezündet und seine Eigenschaft, die Tüchtigen für sich zu gewinnen, erwies sich zu Nutz und Frommen Schaffhausens auch hier. Männer, wie der damalige Regierungsrat Moser-Ott, der geistvolle Mathematiker Prof. Dr. Amsler-Laffon, die Praktiker Johannes und Konrad Rauschenbach waren ihm unermüdliche Mitarbeiter. Moser ging der Stadt gegenüber die Verpflichtung ein, für eine niedrig gestellte Summe am Rhein ein Wasserwerk zu bauen, das die für die damalige Zeit gewaltige Energie von 500 Pferdekräften zu leisten vermöge. Es bedurfte der hohen Intelligenz, der unerschütterlichen Energie, der grossen Geldmittel und der leidenschaftlichen Liebe zur Vaterstadt, die Moser vereinigte, um das Werk nach gewaltigen Schwierigkeiten zu einem guten Ende zu führen.

Der 9. April 1866 war der Schicksalstag allererster Ordnung für Schaffhausen: da wurden zum ersten Male die Schleusen der Turbinen geöffnet, da drehten sich zum ersten Male vor den Augen der erstaunten Bürger die grossen Räder, und ausgedehnte Seiltransmissionen längs des städtischen Rheinufers leiteten die Kraft in die dortigen Werkstätten.[1]) Die Technikerschaft von ganz Europa bewunderte Mosers Werk, und die Bahn Schaffhausens als Industriestadt war geöffnet.

Als eines der ersten industriellen Unternehmen, das unter Heinrich Moser entstanden ist, erwähne ich die Maschinenfabrik Rauschenbach; sie fabrizierte zunächst Mühlenwerke und allerlei landwirtschaftliche Maschinen; später kam eine eigene Giesserei dazu. Im Verlaufe der Jahrzehnte errang sich das Unternehmen einen Weltruf und war führende Firma im Bau von Müllerei-, Landwirtschafts- und Holzbearbeitungsmaschinen. Der Krieg und andere ungünstige Umstände setzten ihr dann schwer zu, aber in enger Verbindung mit den mächtigen Eisen- und Stahlwerken bearbeitet sie heute ihr altes Gebiet und baut dazu noch Dieselmotoren.

In der Nähe des Rheins, gut erreichbar von der Seil-Transmission, erstellte Heinrich Moser in den Sechziger Jahren ein grosses Industriegebäude, in dem er das Schaffhauser Kleinhandwerk günstig unterzubringen und zu vereinigen hoffte. Sein Plan erfüllte sich nicht, aber in dem Gebäude errichtete Rudolf Schöller aus Breslau im Jahre 1867 eine Kammgarn- und Kammwollspinnerei, aus der sich im Laufe der Jahrzehnte die blühende Kammgarnspinnerei Schaffhausen (und Derendingen) entwickelte. Das Unternehmen beschäftigt in Schaffhausen etwa 550, in seinen übrigen Fabriken über 2000 Arbeiter und Arbeiterinnen; es fabriziert als Spezialität hochfeine Kammgarne für Kleiderstoffe, Unterkleider und dergleichen. Aus dem selben Ursprunge entstand die Kammwollspinnerei Chessex & Cie., die unter dem Namen Schaffhauserwolle ihre geschätzten Wollstrickgarne in den Handel bringt.

In die Zeit Heinrich Mosers fällt auch die Gründung der bekannten Firma Alfred J. Amsler & Cie., eines Schaffhauser Unternehmens, das seinen Weltruf dem wissen-

[1]) Vergl. die Bilder in Bd. 54 (Dez. 1909) S. 352/52 u. 375. Red.