

# Die praktische Berechnung der Biegebeanspruchung in kreisrunden Behältern

Autor(en): **Pasternak, Peter**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **89/90 (1927)**

Heft 20

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-41807>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Luft, sowie einer *Zentrifugal-Oelpumpe* von rund 3,5 PS Kraftbedarf zur Förderung von rund 350 l Oel pro Minute. Die Pumpe ist unmittelbar mit einem zur Speisung der Beleuchtungs- und Steuerstromkreise dienenden Gleichstrom-Generator zusammengebaut.

Der zylinderförmige Oelkühler enthält eine grosse Anzahl glatter Röhren, die von der Kühlluft durchströmt werden. Zur Erreichung der grösstmöglichen Wirkung ist der Kühler mit senkrecht zu den Röhren eingebauten Blech-Zwischenlagen versehen, womit erzwungene Strömungsverhältnisse des Oeles erzielt werden. Diese Kühlungsart ist bekanntermassen sehr wirksam und zuverlässig, und ergibt überdies verhältnismässig kleine und leichte Kühlaggregate. Die durch den Kühler gesaugte Luft wird vom Ventilator über einen Luftkanal und eine im Lokomotivdach ausgesparte Oeffnung ins Freie befördert.

Die beiden zur Geschwindigkeitsregulierung der Triebmotoren dienenden Stufenschalter sind gleicher Bauart wie die in Band 85, Seite 290 abgebildeten der  $A_e^{3/6}$ -Schnellzug-Lokomotiven. Ihre Steuerung ist wie dort eine kombinierte elektromechanische, die so eingerichtet ist, dass die Schalter nach Wahl des Führers entweder elektrisch oder von Hand betätigt werden können. Der Antrieb besteht aus einem für beide Stufenschalter gemeinsamen Gleichstrom-Seriemotor mit teilweiser Fremderregung, dessen Drehmoment auf die Nockenwellen der Stufenschalter übertragen wird mittels Verbindungswellen, Zahn- und Kettenrädern, die auch bei Handbetrieb benützt werden und gleichzeitig für die mechanische Rückmeldung der Stufenschalter-Stellungen in den Steuerkontrollern dienen. Beim Uebergang von der einen zur nächstfolgenden Stufe schaltet abwechselungsweise nur der eine oder andere Stufenschalter, bezw. nur die mit den entsprechenden Schenkeln der zugehörigen *Ueberschaltrosselspulen* verbundene Stufenschalter-Hälfte. Jeder Stufenschalter besitzt zwölf Stufen, woraus sich bei der gewählten wechselweisen Betätigung der elektrisch in Serie geschalteten Stufenschalter insgesamt 23 Fahrstufen und eine Vorstufe ergeben.

Da auch die hier beschriebenen Lokomotiven für elektrische *Nutzbremung* nach der bekannten Schaltung der M. F. O. eingerichtet sind, besitzen die beiden *Wendesalter* (Abb. 8) die zur Umschaltung auf Bremsbetrieb notwendigen Stellungen und Kontakte. Der Antrieb erfolgt elektropneumatisch mittels je drei Steuerventilen und einem unmittelbar an die Schaltwalze angebauten Luftmotor mit Differentialkolben (Abb. 8, rechts). Die *Wendesalter* können auch direkt mittels Handgriff bedient und im Bedarfsfalle in deren Nullstellung gebracht und verriegelt werden, womit die betreffende Triebmotorengruppe ausser Tätigkeit gesetzt wird.

Die *Triebmotoren* (Abbildung 4) sind infolge Verbesserung der Kühlverhältnisse, trotz der erheblichen Leistungssteigerung, nur um nicht ganz 200 kg pro Motor schwerer ausgefallen als die frühern. Sie besitzen verteilte, mit den Hilfspolwicklungen dauernd in Reihe geschaltete Kompensationswicklungen. In den Rotorwicklungen sind keine Widerstandsverbindungen vorhanden. Die beiden Triebmotoren jedes Drehgestelles werden durch einen unmittelbar auf die Ventilationsöffnungen der Gehäuse aufgesetzten Ventilator gekühlt, dessen Antriebsmotor mit Ausnahme der Welle genau gleich ausgeführt ist wie die Antriebsmotoren der vereinheitlichten Kolbenkompressoren der S. B. B.<sup>1)</sup>

#### Ergebnisse der offiziellen Probefahrten.

Die offiziellen Abnahme-Probefahrten wurden am 20. März 1927 mit der Lokomotive Nr. 14307 auf der Strecke Basel-Bern durchgeführt. Hierüber schrieb das Pflichtenheft der S. B. B. vor, dass innert 22 h vier Hin- und Herfahrten Basel-Bern-Basel auszuführen seien, mit 1400 t Anhängengewicht in der Richtung Basel-Bern und 700 t Anhängengewicht in der Richtung Bern-Basel, mit je 20 min Halt auf den beiden Endstationen und mit der weitem Bestimmung, dass die Strecke Basel-Olten-Bern in höchstens 155 min (5 min Halt in Olten inbegriffen) zurückzulegen sei.

<sup>1)</sup> Siehe „Elektrische Bahnen“, Oktober 1925, Seite 394.

Für die Fahrten rüsteten die S. B. B. die Lokomotive und den mitgeführten, für die Prüfung elektrischer Triebfahrzeuge besonders eingerichteten Dynamometerwagen mit allen erforderlichen zusätzlichen Messeinrichtungen und Messleitungen aus. Der Einfachheit halber wurde der Dynamometerwagen jeweils nur für die an Steigungen reicheren Fahrten in Richtung Basel-Bern direkt hinter der Lokomotive eingestellt, für die Fahrten in Richtung Bern-Basel dagegen am Schluss des Zuges mitgeführt. Aber auch für die letztgenannten Fahrten wurden, ausser den Temperaturen, die Kurven des Triebmotorstromes und des Primärstromes des Stufentransformators aufgenommen, und zwar mit Hilfe von zwei tragbaren registrierenden Messinstrumenten.

Der Belastungszug bestand vorwiegend aus Kohlen-Güterwagen und hatte ein Gewicht von 1411 t. Er war mit der durchgehenden Kunze-Knorr-Bremse ausgerüstet und zählte 105 Achsen, wovon 75 Bremsachsen. Da es Schwierigkeiten bereitet hätte, die jeweils in Bern, entsprechend der Vorschrift des Pflichtenheftes (Fahrten in Richtung Bern-Basel mit nur 700 t Anhängengewicht) zurückzulassen, den 700 t Wagengewicht in Basel für die nächste Fahrt Basel-Bern wieder zur Verfügung zu stellen, wurde das gesamte Zugsgewicht auch auf den Fahrten in Richtung Bern-Basel jeweils wieder mitgenommen (also rund 1400 statt 700 t), wodurch natürlich die von der Lokomotive auf diesen Fahrten abzugebende Leistung entsprechend erhöht wurde. Nach der erstmaligen Zurücklegung der Strecke Basel-Bern und zurück bis Olten musste ein Wagen ausrangiert werden, sodass von da an der Belastungszug noch 103 Achsen zählte und ein Gewicht von 1388 t aufwies.

Für die Durchführung der Probefahrten war folgendes Programm aufgestellt worden: a) Basel-Bern (Wilerfeld); b) Bern-Pratteln; c) Pratteln-Bern, mit Anfahrt auf 10‰ Steigung bei Wynigen; d) Bern-Muttenz; e) Muttenz-Bern, mit Anfahrt auf 10,5‰ Steigung nach Sissach; f) Bern-Basel.

Die Messungen, die nach der dritten Ankunft in Bern, d. h. nach der Fahrt Muttenz-Bern (Fahrt e) vorgenommen wurden, zeigten indessen — verglichen mit den nach den frühern Fahrten gemachten Messungen — ganz einwandfrei, dass die Erwärmung der elektrischen Ausrüstungsteile auch bei weiterer Fortsetzung der Fahrt erheblich innerhalb der vertraglichen Grenzen bleiben würde, worauf die S. B. B. auf die vorgesehene weitere Fortsetzung der Fahrt verzichteten.

## Die praktische Berechnung der Biegebeanspruchung in kreisrunden Behältern.

Von Dr. Ing. PETER PASTERNAK, Privatdozent, Zürich.

(Fortsetzung von Seite 244.)

### II. DER RINGBEHÄLTER.

Beim Ringbehälter (Abbildung 3) wird der Behälterboden von einer Kreisringplatte gebildet, die mit den Wänden monolithisch verbunden und in den Randkreisen in vertikaler Richtung unverschiebbar gelagert ist.

Die spezifischen Einspannmomente  $M_2$  und  $M_1$  der Platte werden mit Hilfe von zwei Elastizitätsgleichungen bestimmt, ausgehend vom Hauptsystem mit gelenkiger Verbindung der Wände und der Bodenplatte.

Die Einflusszahl ( $b_{11}$ ) der Drehung einer unten festgehaltenen zylindrischen Wand ergibt sich aus

$$b_{11} = a_{11} - \frac{a_{12} \cdot a_{12}}{a_{22}} \dots \dots \dots (22a)$$

wobei die  $a_{ik}$  die Einflusszahlen bei freiem Rand bedeuten.

Vernachlässigt man im Zähler des Korrekturgliedes von  $a_{22}$

$$- 0,25 \frac{s}{l}, \text{ so wird}$$

$$b_{11} = \frac{s_1}{2} \frac{I}{I - 1,25 \frac{s_1}{l}} \dots \dots \dots (22b)$$

d. h. halb so gross wie bei frei beweglichem Rand, natürlich unter der Voraussetzung einer genügend grossen Wandlänge ( $\lambda = \frac{s}{l} > \sim 3$ ).

Die Beiträge an die Belastungsglieder der Elastizitäts-Gleichungen herrührend von den zylindrischen Wänden, d. s., bei unterdrückter Verschiebungsmöglichkeit, die untern Randdrehungen infolge des Wasserdruckes, folgen, mit  $\beta_2 = 0$ , aus der entsprechenden Reduktion der  $a_{10}$

$$b_{10} = a_{10} - \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{20} = \frac{\beta_1 s_1^4 h_2}{4 h_1 l} - \frac{\beta_1 s_1^3}{4} = -\frac{\beta_1 s_1^3}{4} \left( 1 - \frac{h_2}{h_1} \frac{l}{\lambda} \right) \quad (23)$$

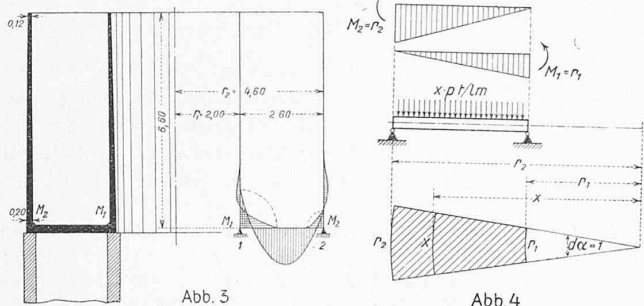


Abb. 5

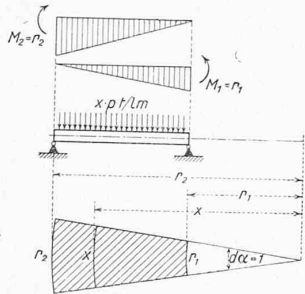


Abb. 4

Zur Aufstellung der Elastizitäts-Gleichungen fehlen uns noch die Einflusszahlen und Belastungsglieder der an den Rändern in vertikaler Richtung unverschieblich gelagerten Kreisringplatte, d. h. die Randdrehungen  $a_{22}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{11}$ ,  $a_{10}$ ,  $a_{20}$  infolge  $M_2 = 1$ ,  $M_1 = 1$ , und der gleichförmig verteilten Belastung  $p$  t/m<sup>2</sup> (Wasserhöhe).

Die gegenseitigen Randdrehungen:  $a_{12}$  (Drehung am innern Randkreis infolge  $M_2 = 1$ ) und  $a_{21}$  (Drehung am äussern Randkreis infolge  $M_1 = 1$ ) sind einander nicht gleich, denn die  $M_2$  und  $M_1$  sind nicht Einzelkräfte, sondern Kraftgruppen, für die nicht das Maxwell-Mohrsche Reziprozitätsgesetz, sondern der allgemeinere Satz von Betti gilt. Aus diesem Satz folgt die Beziehung

$$1 \cdot 2 \pi r_1 a_{12} = 1 \cdot 2 \pi r_2 a_{21}$$

$$\text{oder} \quad a_{21} = a_{12} \frac{r_1}{r_2} \quad (24)$$

wo  $r_1$  den Radius des innern und  $r_2$  des äussern Randkreises bedeutet.

Die Berechnung der genauen Einflusszahlen und Belastungsglieder der beidseitig frei drehbar gelagerten Kreisringplatte kann erfolgen ausgehend von der vollständigen Lösung

$$w = C_0 + C_1 \ln x + C_2 x^2 + C_3 x^2 \ln x - \frac{p}{64} x^4$$

des Biegeproblems der gleichförmig belasteten Kreisplatte ( $w = \frac{J E}{1 - \nu^2} z$ ,  $z$  = Biegepeil im Abstand  $x$  vom Plattenmittelpunkt). Man erkennt, dass für die Bestimmung der drei verbleibenden Integrations-Konstanten ( $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ) drei lineare Gleichungen aufzustellen und aufzulösen sind. Die auf dem angedeuteten Wege sich ergebenden geschlossenen Formeln für die  $a_{ik}$  und  $a_{ko}$  werden daher schwerfällig und unübersichtlich. Für praktische Berechnungszwecke löst sich aber das gestellte Problem viel einfacher. Die genaue Berechnung zeigt nämlich, dass bei der vorausgesetzten Auflagerungsart die Ringmomente verschwindend klein werden, wenn der Radius  $r_1$  der Mittelöffnung nicht allzuklein ist, wie dies in den Anwendungen auch meistens zutrifft.

Vernachlässigt man also die Ringmomente, so können die  $a_{ik}$  und  $a_{ko}$  unter Umgehung der Integrationskonstanten, als Auflagerdrücke der Drehgewichte  $\frac{M dx}{J E} = \frac{M}{x h^3/12 E} dx$  infolge  $M_2 = r_2$ ,  $M_1 = r_1$  und der gleichförmig verteilten Belastung  $p$  im einfachen Balken der Abbildung 4 ermittelt werden. Der Ersatzbalken hat ein linear veränderliches Trägheitsmoment und liefert auf dem genannten unmittelbaren Weg folgende geschlossenen Formeln für die gesuchten  $\frac{h^3}{12} \cdot E$ -fachen Drehwinkel:

$$\left. \begin{aligned} a_{22} &= \frac{r_2}{(r_2 - r_1)^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{(x - r_1)^2}{x} dx \\ &= \frac{r_2}{2(r_2 - r_1)} \left[ r_2 - 3r_1 + \frac{2r_1^2}{r_2 - r_1} \ln \frac{r_2}{r_1} \right] \\ a_{11} &= \frac{r_1}{(r_2 - r_1)^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{(r_2 - x)^2}{x} dx \\ &= \frac{r_1}{2(r_2 - r_1)} \left[ r_1 - 3r_2 + \frac{2r_2^2}{r_2 - r_1} \ln \frac{r_2}{r_1} \right] \\ a_{12} &= \frac{r_2}{(r_2 - r_1)^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{(x - r_1)(r_2 - x) dx}{x} \\ &= \frac{r_2}{2(r_2 - r_1)} \left[ r_2 + r_1 - \frac{2r_1 r_2}{r_2 - r_1} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right) \right] \\ a_{21} &= a_{12} \frac{r_1}{r_2} \\ \frac{a_{20}}{p} &= \frac{2(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)}{6(r_2 - r_1)} \int_{r_1}^{r_2} \frac{(r_2 - x)(x - r_1)}{x} dx - \\ &\quad \frac{1}{6(r_2 - r_1)} \int_{r_1}^{r_2} \frac{2r_2^3 + x^3 - 3x r_2^2}{x} dx \\ &= \frac{1}{72} [3r_2^3 - 5r_1^3 - 11r_1 r_2 (r_2 + r_1)] + \\ &\quad + \frac{r_1^2 r_2 r_2 + r_1}{6} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

und entsprechend

$$\frac{a_{10}}{p} = \frac{1}{72} [5r_2^3 - 3r_1^3 + 11r_1 r_2 (r_2 + r_1)] - \frac{r_1 r_2^2 r_2 + r_1}{6} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right)$$

mit wachsenden  $r$  und kleinen Spannweiten  $r_2 - r_1 = l$  nähern sich die angegebenen Drehwinkel asymptotisch den Werten  $l/3$ ,  $l/6$  und  $l/24$ .

ZAHLENBEISPIEL 3.

Bodenplatte mit  $r_2 = 4,60$  m,  $r_1 = 2,00$  m,  $h = 0,25$  m. Zylindrische Wände: Untere Stärke in beiden Wänden  $h_1 = 0,20$ ; obere Stärke in beiden Wänden  $h_2 = 0,12$ ; Wandlänge  $l$  = maximale Wasserhöhe = 6,60 m.

Äussere Wand:

$$s = 0,76 \sqrt{h_1 r_2} = 0,76 \sqrt{0,2 \cdot 4,60} = 0,729; \lambda = \frac{6,60}{0,729} = 9,05$$

$$l_1 = 6,60 \cdot \frac{20}{8} = 16,50; 1 - 1,25 \left( \frac{s}{l_1} \right) = 0,945$$

$$b_{11} = \frac{s_1}{2} \frac{1}{1 - 1,25 \left( \frac{s}{l_1} \right)} = \frac{0,729}{2 \cdot 0,945} = 0,386$$

$$b_{10} = + \frac{\beta_1 s_1^3}{4} \left( 1 - \frac{h_2}{h_1} \frac{l}{\lambda} \right) = \frac{6,60}{4} \cdot 0,386 \left( 1 - \frac{0,9336}{20 \cdot 9,05} \right) = + 0,597$$

Innere Wand:

$$s_1 = 0,76 \sqrt{0,2 \cdot 2} = 0,48; \lambda = \frac{6,60}{0,48} = 13,75$$

$$1 - 1,25 \left( \frac{s}{l_1} \right) = 1 - \frac{1,25 \cdot 0,48}{16,50} = 0,9636$$

$$b_{11} = 0,24 \cdot \frac{1}{0,9636} = 0,249$$

$$b_{10} = \frac{6,60}{4} \cdot 0,111 \left( 1 - \frac{0,9564}{20 \cdot 13,75} \right) = 0,175$$

Bodenplatte:

Mit  $r_2 = 4,60$ ;  $r_2^2 = 21,16$ ;  $r_2^3 = 252,02$

$$r_1 = 2; r_1^2 = 4; r_1^3 = 8; \ln \frac{r_2}{r_1} = 0,833$$

$$p = 6,60 \text{ t}; \left( \frac{h_{\text{Wand}}}{h_{\text{Boden}}} \right)^3 = \left( \frac{4}{5} \right)^3 = 0,512$$

berechnet man mit den Formeln 25.

$$a_{20} = + 0,707 \cdot 6,60 \cdot 0,512 = \underline{2,403}$$

$$a_{10} = + 0,738 \cdot 6,60 \cdot 0,512 = \underline{2,6628}$$

$$a_{22} = 1,029 \cdot 0,512 = \underline{0,527}$$

$$a_{11} = 0,6765 \cdot 0,512 = \underline{0,346}$$

$$a_{12} = 0,6237 \cdot 0,512 = \underline{0,319}$$

$$a_{21} = 0,319 \cdot \frac{2}{4,60} = \underline{0,1386}$$

Mit den berechneten Einflusszahlen und Belastungsgliedern können nun die beiden Elastizitätsgleichungen angeschrieben werden:

$M_2$	$M_1$	Belastungs- glieder	Festver- hältnisse
$0,386+0,527$	$0,1386$	$-(2,403-0,597)$	
$0,913$		$-1,806$	$-0,349$
$0,319$	$0,249+0,346$	$-(2,6628-0,175)$	
	$0,595 =$	$-2,488$	
	$-0,048$	$0,631$	
	$0,547$	$-1,857$	
	$M_1 =$	$-3,4 \text{ tm}$	
	$M_2 =$	$-1,45 \text{ tm}$	

Das spezifische Biegemoment  $M$  im Abstand  $x$  vom Plattenmittelpunkt ergibt sich aus

$$\frac{Mx}{\rho} = \frac{(2r_2 + r_1)(r_2 - r_1)(r_2 - x)}{6} - \frac{r_2^3 - x^3}{3} + \frac{x(r_2^2 - x^2)}{2} - \frac{M_2 r_2 (x - r_1) + M_1 r_1 (r_2 - x)}{\rho (r_2 - r_1)} \quad (26)$$

Die untere Zugbewehrung ist für den kreiszylindrischen Schnitt mit  $2\pi x M$  oder  $M \cdot x = \text{Max.}$  zu berechnen:

$$x = \sqrt{\frac{r_2^3 - r_1^3 - 6 \frac{M_2 r_2 - M_1 r_1}{\rho}}{3(r_2 - r_1)}} = \sqrt{\frac{89,46}{7,80}} = \sim 3,39 \quad (27)$$

$$M_{\text{max}} = + \frac{6,60}{3,39} \cdot 1,75 = + 3,41 \text{ tm}$$

*Biegemomente in den Behälterwänden:*

Ausser den errechneten Momenten  $M_2$  und  $M_1$  wirken an den untern Rändern noch entlastende Horizontalschübe  $H_2$  bzw.  $H_1$ , die aus

$$H = \frac{a_{20} + a_{12} M}{a_{22}} = \frac{\rho s_1}{2} + \frac{M}{s_1}$$

zu bestimmen sind:

$$H_2 = \frac{6,60 \cdot 0,729}{2} + \frac{1,45}{0,729} = \sim 4,4 \text{ t}$$

$$H_1 = 6,60 \cdot \frac{0,48}{2} + \frac{3,4}{0,48} = \sim 8,6 \text{ t}$$

Die Kurven der Meridianbiegemomente infolge der  $M$  und  $H$  ergeben sich mit  $\varphi = \frac{x}{s}$  und Benützung der erwähnten Zimmermann'schen Zahlentafel aus

$$M_x = M \eta_1 + (M - Hs) \eta_2$$

Aeussere Wand  $M = 1,45 \eta_1 - 1,76 \eta_2$

Innere Wand  $M = 3,4 \eta_1 - 0,7 \eta_2$

Durch die Annahme eines unveränderlichen  $s = s_1$  erhält man etwas zu grosse Biegemomente.

Abbildung 3 zeigt den Verlauf der Biegemomente in der Bogenplatte und den Wänden.

Die gegebene Berechnung der Biegebeanspruchung in Ringbehältern vernachlässigt die Dehnung der Bodenplatte infolge der radial-horizontalen Rand-Axialkräfte ( $H_2$  und  $H_1$ ), setzt also die Randkreise als unveränderlich voraus. Lagert man den Behälter auf Ringmauern, so ist diese Annahme, schon der auftretenden Reibung wegen, unbedingt zulässig.<sup>11)</sup>

Uebrigens sind diese Dehnungen infolge der horizontalen Rand-Radialkräfte im Vergleich mit denen der zylindrischen Wände klein. Bei *schmalen* Ringbehältern, die seltener zur Ausführung gelangen, kann man sie mit Hilfe der folgenden Einflusszahlen ( $E$ -fache Werte) für die horizontal-radialen Randverschiebungen leicht berücksichtigen.

$$\left. \begin{aligned} a_{22} &= \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{r_2}{h}, & a_{11} &= \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{r_1}{h} \\ a_{21} &= \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{r_2}{h}, & a_{12} &= \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{r_1}{h} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$(a_{12} r_1 = a_{21} r_2, \quad \nu = 0)$$

Diese Einflusszahlen folgen aus der homogenen Differentialgleichung:

<sup>11)</sup> Man wird kaum besondere Vorkehrungen zur Vermeidung dieser Reibung treffen. Immerhin sollen bei der Bemessung der Zugbewehrung der Bodenplatten neben den Biegemomenten auch  $H_1$  und  $H_2$  als axiale Zugkräfte berücksichtigt werden.

$$w'' + \frac{w'}{x} - \frac{w}{x^2} = 0,$$

mit der Lösung  $w = A_1 x + \frac{A_2}{x}$

für die  $E$ -fache Längenänderung des Plattenradius  $x$  infolge gleichförmig verteilter radial-horizontaler Randkräfte.<sup>12)</sup>

In unserm Falle findet man z. B. für die mit dem  $JE$  der Wand vervielfachte Randdehnung

$$a_{22} \text{ der Bodenplatte} \\ a_{22} = \frac{21,16 + 4}{17,16} \cdot \frac{4,60}{0,25} \cdot \frac{0,2^3}{12} = \sim 0,018$$

und für die äussere Wand

$$a_{22} = \frac{s_1^3}{2(1 - 1,25 \frac{s_1}{l_1})} = \frac{0,729}{2 \cdot 0,945} = 0,205$$

sodass die Randverschiebung der Wand 11,4 mal grösser als die entsprechende Dehnung der Bodenplatte ist.

Bei *breiten* Ringbehältern darf man also die Randkreise der Bodenplatte in der Tat als unverschieblich annehmen.

Dank dieser Einsicht kann auch die Berechnung der Biegebeanspruchung *mehrgeschossiger* Ringbehälter einfach gestaltet werden (Abbildung 5). In solchen Behältern wird man die Wandstärke im Bereich eines Geschosses unveränderlich halten, wobei sie natürlich für die Aussen- und die Innenwand verschieden gross sein kann. Die spezifischen Einspannmomente  $M_2$  und  $M_1$  einer Zwischenbodenplatte errechnen sich wieder aus zwei Elastizitätsgleichungen, ausgehend vom Hauptsystem der durchgehenden Wände und gelenkig angeschlossenen Bodenplatte unter der meistens zulässigen Annahme, dass die gegenseitige Beeinflussung der Deformations- und Spannungszustände in den einzelnen Knotenkreisen vernachlässigt werden darf. Be-

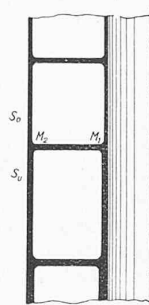


Abb.5

zeichnet man mit  $s'_0$  und  $s'_u$  die mit  $\frac{J_c}{J_0}$  bzw.  $\frac{J_c}{J_u}$  vervielfachten  $s_0$  und  $s_u$ -Werte der über und unter der betrachteten Bodenplatte liegenden Stockwerkwände, so kann man mit Hilfe der Drehwinkelmethode<sup>13)</sup> unmittelbar für die von den Wänden herrührenden Beiträge an die Matrix-Vorzahlen und die Belastungsglieder der genannten Elastizitätsgleichungen folgende, in ihrer Entstehung durchsichtigen Formeln anschreiben:

$$\left. \begin{aligned} b_{11} (b_{22}) &= \frac{1}{2 \cdot \left( \frac{1}{s'_0} + \frac{1}{s'_u} \right)} \\ b_{10} (b_{20}) &= - \frac{\gamma s_0^3 (\lambda_0 - 1) - s_u^3}{4 \cdot \left( \frac{1}{s'_0} + \frac{1}{s'_u} \right)} \end{aligned} \right\} \dots \dots (29)$$

( $\gamma = \text{spez. Gewicht der Flüssigkeit, } \lambda_0 = \frac{l_0}{s_0}$ )

Die Beiträge an die Elastizitätsgleichungen herrührend von der Bodenplatte sind die gleichen wie früher. Natürlich können die Beanspruchungen in mehrgeschossigen Ringbehältern, wie übrigens schon angedeutet, noch genauer ermittelt werden. Doch liegt es in der Absicht dieser Arbeit besonders auf kurze, meistens genügend genaue Näherungsverfahren zur Berechnung kreisrunder Behälter hinzuweisen.

ZAHLENBEISPIEL 4.

Abmessungen des Zwischenbodens wie im Beispiel 3; die Wandstärken seien beidseitig oben und unten gleich  $h = 0,20$ ; ebenso Behälterhöhen  $l = 6,60$ .

Mit  $Jc = J_{\text{wand}}$  hat man dann ganz einfach

$$b_{11} = \frac{s}{4}; \quad b_{10} = - \frac{s^4}{8} (\lambda - 2) \quad (\gamma = 1)$$

<sup>12)</sup> Es ist nützlich zu bemerken, dass obige Gleichung identisch ist mit der homogenen Differentialgleichung für den Meridianbiegewinkel der Kreisplatte.

<sup>13)</sup> Vergleiche z. B. des Verfassers „Berechnung vielfach statisch unbestimmter biegeester Stab- und Flächentragwerke S. 177. Verlag A.-G. Gebr. Leemann & Cie., Zürich und Leipzig.



Also Beiträge an die Elastizitätsgleichungen von der äussern Wand

$$b_{11} = \frac{0,729}{4} = 0,182;$$

$$b_{10} = -\frac{0,729^4}{8} (9,05 - 2) = -0,249$$

von der innern Wand

$$b_{11} = \frac{0,48}{4} = 0,12;$$

$$b_{10} = -\frac{0,48^4}{8} (13,75 - 2) = -0,0782$$

Mit den gleichen Werten für die Auflagerdrehwinkel der Bodenplatte wie im Beispiel 3 lauten jetzt die Elastizitätsgleichungen

$M_2$	$M_1$	Belastungsglieder
$0,182 + 0,527$	$0,1386$	$= - (2,403 - 0,249)$
$0,709$		$- 2,154$
$0,319$	$0,12 + 0,346$	$= - (2,6628 - 0,0782)$
	$0,466$	$- 2,585$
	$M_1 = - 3,99 \text{ tm}$	
	$M_2 = - 2,26 \text{ tm}$	

Die Einspannmomente sind also, wie es sein muss, grösser als im Beispiel 3. Sie werden, bei der angenommenen gleichen Wandstärke, je zur Hälfte von der obern und der untern Wand aufgenommen.

III. Kugelschale mit linear veränderlicher Wandstärke.

A. Einflusszahlen.

Die Ableitung geschlossener Formeln für die elastischen Randbewegungen, und zwar sowohl für die Einflusszahlen als auch die Belastungsglieder, geschieht hier ganz ähnlich wie bei der Zylinderschale; nur gestalten sich die entsprechenden Ausrechnungen weitläufiger.

Ich begnüge mich deswegen mit der kurzen Ableitung der Ausgangsgleichungen und im übrigen mit der Angabe der Endergebnisse.

Ergänzende Bezeichnungen:

- $T_1, T_2$  spezifische Meridian- und Ringnormalkräfte
- $G_1, G_2$  " " Ringnormalmomente
- $N$  " " -Querkraft
- $V$  in die Axe fallende Resultierende aller über einem Parallelkreis der Mittelfläche liegenden polarsymmetrischen Belastungen.
- $Z, X$  längs eines Parallelkreises unveränderliche, spezifische Normal- bzw. Tangentialbelastung der Kugelschale.
- $\alpha$  halber Oeffnungswinkel des zu einem Parallelkreis gehörenden Normalenkegels.
- $r$  Radius der Mittelfläche.
- $h_1, h_2$  Schalendicken im Kämpfer und im Scheitel.
- $l$  halbe Bogenlänge des Meridians.
- $l_1$  gedachte Bogenlänge vom Kämpfer bis zum Schnittpunkt der äussern und innern Laibung.
- $'$  Ableitungen nach der Meridianbogenlänge.
- $\cdot$  Ableitungen nach  $\alpha$ .

Statisch bestimmte Membrankräfte.

$$T_{10} = \frac{V}{2\pi r \sin^2 \alpha} \dots \dots \dots (30a)$$

Aus der bekannten Gleichgewichtsbedingung gegen Verschieben eines Schalenelementes in Richtung der Normalen

$$\frac{T_{10}}{r_1} + \frac{T_{20}}{r_2} = Z, \text{ wo } r_1 \text{ und } r_2 \text{ die Hauptkrümmungsradien der Mittelfläche bedeuten, folgt im Falle der Kugelschale}$$

$$T_{20} = rZ - T_{10} \dots \dots \dots (30b)$$

Gleichgewichtsbedingungen für die nur am Rand durch die Gleichgewichtssysteme  $G_1 = M_0, N = H_0 \sin \alpha_0$  belastete Kugelschale:

$$T_1 = - \text{ctg } \alpha N \dots \dots \dots (31a)$$

$$T_2 = - N^1 r \dots \dots \dots (31b)$$

$$G_1' + \frac{G_1 - G_2}{r} \text{ctg } \alpha = - N \dots (31c)$$

Elastizitätsbedingungen:

$$G_1 = J \left( d' + v \frac{d \text{ctg } \alpha}{r} \right), G_2 = J \left( \frac{d \text{ctg } \alpha}{r} + v r d' \right) \quad (32a)$$

$$e_1 = \frac{T_1 - v T_2}{h}, e_2 = \frac{T_2 - v T_1}{h}, J = \frac{h^3}{12(1-v^2)}, d = E \vartheta \quad (32b)$$

Verträglichkeitsbedingung.

Die lineare Beziehung zwischen  $e_1, e_2$  und  $d$  kann für eine beliebige Rotationsschale aus den Abbildungen 6 und 7 durch die Uebereinlagerung der Meridiantan-

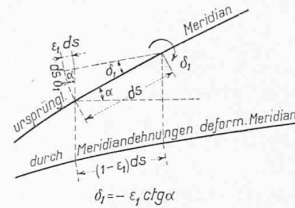


Abb. 6

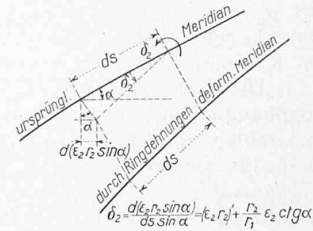


Abb. 7

gentendrehung  $d_1$  infolge der Meridianeinwirkung  $e_1$  und der entsprechenden Drehung  $d_2$  infolge der Ringeinwirkung  $e_2$  abgelesen werden.

$$d = (e_2 r_2)' + \left( e_2 \frac{r_2}{r_1} - e_1 \right) \text{ctg } \alpha \dots \dots (33a)$$

Für die Kugelschale wird

$$d = r e_2' + (e_2 - e_1) \text{ctg } \alpha \dots \dots \dots (33b)$$

Wählt man wieder  $d$  und  $\sigma = \frac{Nr}{h^2}$  als Grundvariable,

so ergeben sich aus dem Momentengleichgewicht unter (31c) und der Verträglichkeitsbedingung (33b) unter Berücksichtigung der übrigen unter (31) und (32) gegebenen Beziehungen, folgende simultanen Differentialgleichungen mit dem gleichen Differentialoperator:

$$\left. \begin{aligned} r h \left[ d'' + d' \left( \frac{\text{ctg } \alpha}{r} + \frac{3 h'}{h} \right) \right] &= 12 \sigma \\ r h \left[ \sigma'' + \sigma' \left( \frac{\text{ctg } \alpha}{r} + \frac{3 h'}{h} \right) \right] &= -d + d_0 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Die streng genauen Differentialgleichungen enthalten zwar diesmal noch Glieder mit den Stammfunktionen  $d$  und  $\sigma$ . Die Vorzeichen dieser letzten sind aber bei nicht allzukleinem Pfeilverhältnis und bei der vorausgesetzten langsamen und beschränkten Aenderung der Schalendicke so kleine Grössen<sup>14)</sup>, dass man die Glieder unbedingt vernachlässigen darf, umso mehr da  $d$  und  $\sigma$  selbst, als rasch abklingende Funktionen, gegenüber ihren Ableitungen klein sind.

Die Störungsfunktion  $d_0$  ist die Meridiantangentialdrehung infolge der statisch bestimmten Membrankräfte. Sie berechnet sich für jeden Sonderfall stetig und symmetrisch verteilter Belastung aus der Verträglichkeitsbedingung mit Hilfe der  $T_{10}$  und  $T_{20}$ .

Zur Bestimmung der Einflusszahlen der elastischen Randbewegungen ist  $d_0 = 0$  zu setzen. Mit der gleichen numerischen Variablen  $\xi = \frac{x}{l}$  wie bei der Zylinderschale, wo nun aber  $x$  die veränderliche Bogenlänge auf dem kreisförmigen Mittelmeridian bis zum gedachten Schnittpunkt der beiden Schalen-Laibungen bedeutet, schafft man zunächst aus (34) den Faktor  $r h$  weg und hierauf die ersten Ableitungen durch die Ansätze

$$d = \varrho u, \sigma = \varrho v, \varrho = \xi^{-5/2} \sin \xi^{-1/2} \dots \dots (35)$$

Auf ähnliche Weise wie bei der Zylinderschale erkennt man dann, dass sich  $u$ , mit den entsprechenden Randbedingungen, wieder aus der vereinfachten Differentialgleichung

$$\frac{1}{4} U^{IV} + U = 0$$

bestimmen lässt. Die im Prinzip wie bei der Zylinderschale gleichen aber hier umständlicheren Berechnungen ergeben folgende geschlossenen Formeln für die Einflusszahlen der elastischen Randbewegungen einer im Scheitel vollen Kugelschale mit linear veränderlicher Wandstärke:

<sup>14)</sup> Vergl. die vollständigen Differentialgleichungen in der erst-erwähnten Abhandlung von Prof. E. Meissner.

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= s \frac{1}{1 - (1/2 - \nu) \frac{s}{r} \operatorname{ctg} \alpha - 1,25 \frac{s}{l_1}} = \frac{s}{\omega_1} \\ a_{12} &= \frac{s^2 \sin \alpha}{2 \omega_1} \\ a_{22} &= \frac{s^3 \sin^2 \alpha}{2 \omega_1} \frac{1 - 0,5 \frac{s}{r} \operatorname{ctg} \alpha - 0,25 \frac{s}{l_1}}{\omega_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{s^3}{2} \sin^2 \alpha \end{aligned} \right\} (36)$$

$l_1$  errechnet sich aus der Formel

$$l_1 = r a_0 \frac{h_1}{h_1 - h_2} \dots (37)$$

wo  $a_0$  den halben Öffnungswinkel des Randkreis-Normalenkegels in Bogenmass und  $h_1, h_2$  die Schalendicken am Kämpfer und im Scheitel bedeuten.

Die Formeln (36) sind vom Verfasser vollständig unabhängig von andern von ihm früher bestimmten Einflusszahlen berechnet worden. Als Zuverlässigkeitsprobe kann für sie der Umstand gelten, dass sie sowohl die *Einflusszahlen der Kugelschale unveränderlicher Dicke* ( $l_1 = \infty$ ) als auch die der *Zylinderschale linear veränderlicher Wandstärke* ( $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ) als Sonderfälle enthalten. Mit  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  erhält man zwar die Einflusszahlen der dünnen Halbkugelschale; doch leuchtet ein, dass sie sich von den Einflusszahlen der Zylinderschale mit dem gleichen Randkreis und gleichem Wandstärkengesetz praktisch nicht unterscheiden können.<sup>15)</sup>

*B. Belastungsglieder.*

Aus der streng mathematischen Theorie der Kugelschale mit unveränderlicher Dicke weiss man, dass die Belastungsglieder  $a_{10}, a_{20}$  d. s. die *JE*-fachen Randdrehungen und Randverschiebungen infolge stetig verteilter polarsymmetrischer Vollbelastung, sich mit grosser Genauigkeit aus den statisch bestimmten Membranspannungen  $T_{10}, T_{20}$  errechnen lassen.

Die Uebertragung dieses wichtigen Ergebnisses auf die Kugelschale linear veränderlicher Dicke liegt nahe. Man hat nachzuweisen, dass  $\sigma = 0, d = d_0$  mit genügender Genauigkeit die Gleichungen (34) befriedigen. Diesen Nachweis wollen wir hier raumbalber weglassen.

Mit der gemachten Annahme erhält man für die *JE*-fache horizontalradiale Randverschiebung

$$a_{20} = - \frac{T_{20} - \nu T_{10}}{h_1} r \sin \alpha \frac{h_1^3}{12} = - \frac{T_{20} - \nu T_{10}}{r} \frac{s^4}{4} \sin \alpha \dots (38)$$

Die *JE*-fache Randdrehung  $a_{10}$  ergibt sich aus der negativ genommenen Verträglichkeitsbedingung (33) (wir rechnen  $a_{10}$  positiv bei einer Drehung des Randquerschnittes nach aussen)

$$a_{10} = - \frac{l_1^3}{12} [e_2' + (e_2 - e_1) \operatorname{ctg} \alpha] = \frac{T_{20} - \nu T_{10}}{r l_1} \frac{s^4}{4} - \frac{(T_{20}' - \nu T_{10}') + (1 + \nu) (T_{20} - T_{10}) \operatorname{ctg} \alpha}{r_2} \frac{s^4}{4} \dots (39)$$

Das erste Glied in  $a_{10}$  kann durch  $\frac{a_{20}}{l_1 \sin \alpha}$ , der zweite Klammerausdruck ebenfalls durch einen bequemern ersetzt werden. Man erhält ihn, wenn von der Ableitung der Gleichgewichtsbedingung gegen Verschieben in Meridiannormalenrichtung

$$T_{20}' + T_{10}' = r Z'$$

die mit  $(1 + \nu)$  vervielfachte Gleichgewichtsbedingung eines Schalenelementes gegen Verschieben im Meridiantangentenrichtung:

$$(1 + \nu) T_{10}' - (1 + \nu) (T_{20} - T_{10}) \operatorname{ctg} \alpha = (1 + \nu) r X$$

abgezogen wird:

$$\frac{(T_{20}' - \nu T_{10}') + (1 + \nu) (T_{20} - T_{10}) \operatorname{ctg} \alpha}{r^2} = \frac{Z - (1 + \nu) X}{r}$$

Also gilt endgültig

$$a_{10} = \frac{a_{20}}{l_1 \sin \alpha} + \frac{(1 + \nu) X - Z}{r} \dots (39a)$$

Bei unveränderlicher Schalendicke verschwindet in  $a_{10}$ , mit  $l_1 = \infty$ , das erste Glied.

Die Auswertung von  $a_{20}$  und  $a_{10}$  kann natürlich für jeden Belastungsfall  $X, Z$  in geschlossener Form erfolgen.

<sup>15)</sup> Natürlich gilt dies nur für *dünne* Schalen. Für unveränderliche Wandstärken ist die genannte Uebereinstimmung von Prof. E. Meissner in aller Strenge nachgewiesen worden. Vergl. „S. B. Z.“ Bd. 86, Seite 1: Zur Festigkeitsberechnung von Hochdruck-Kesseltrommeln.

Doch lohnt sie sich nicht, da man ohnehin die statisch bestimmten Membrankräfte  $T_{10}, T_{20}$  berechnen muss. Man wird also mit ihrer Hilfe zunächst den Zahlenwert von  $a_{20}$ , hierauf von  $\frac{(1 + \nu) X - Z}{r}$  ermitteln, worauf dann auch die zahlenmässige Bestimmung von  $a_{10}$  erfolgen kann.

Für die *Randwerte* von  $T_{10}, T_{20}$  und  $\frac{(1 + \nu) X - Z}{r}$  lassen sich folgende *geschlossene Formeln* ableiten. *Eigengewicht.*

Bezeichnet man mit  $g_1$  und  $g_2$  die Gewichte pro  $m^2$  Schalenoberfläche am Kämpfer und im Scheitel, so erhält man aus (30a) und (30b), bei Annahme linear veränderlicher Schalendicke durch leichte Integration

$$\left. \begin{aligned} T_{10} &= \frac{r}{\sin^2 \alpha} \left[ g_1 \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} - \cos \alpha \right) + g_2 \left( 1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) \right] \\ T_{20} &= r g_1 \cos \alpha - T_{10} \\ X &= g_1 \sin \alpha, Z = g_1 \cos \alpha, \frac{(1 + \nu) X - Z}{r} = \frac{(2 + \nu) g_1 \sin \alpha}{r} \end{aligned} \right\} (40)$$

*Gleichförmig verteilte Belastung auf die Horizontalfläche der Schale  $p \text{ t/m}^2$*

$$\left. \begin{aligned} X &= p \sin \alpha \cos \alpha, Z = p \cos^2 \alpha \\ T_{10} &= \frac{p r}{2}, T_{20} = \frac{p r}{2} \cos \alpha, \frac{(1 + \nu) X - Z}{r} = \frac{p}{2 r} (3 + \nu) \sin 2 \alpha \end{aligned} \right\} (41)$$

*Flüssigkeitsdruck.*

$X = 0, Z = \gamma [t + (1 - \cos \alpha) r]$ ;  $\gamma$  = spez. Gewicht der Flüssigkeit,  $t$  = Flüssigkeitstiefe über dem Bodenscheitel, also  $\frac{(1 + \nu) X - Z}{r} = \sin \alpha$ .

Gewöhnlich ist der, eine Kugelkalotte bildende Behälterboden durch den Kämpferkreisradius  $\rho$  und die Pfeilhöhe  $f$  im Scheitel gegeben. Der Kugelradius  $r$  der Schalenmittelfläche ergibt sich dann aus

$$r = \frac{\rho^2 + f^2}{2f}$$

und es lassen sich nun leicht die Randwerte von  $T_{10}, T_{20}$  durch  $r, f, t$  ausdrücken.

$$\left. \begin{aligned} T_{10} &= \frac{\gamma r}{2} \left[ t + \frac{f(3r - 2f)}{3(2r - f)} \right] \\ T_{20} &= \gamma r (t + f) - T_{10} \end{aligned} \right\} \dots (43)$$

(Schluss folgt.)

**Die Schweizergruppe an der Stuttgarter Ausstellung „Die Wohnung“.**

(Hierzu Tafeln 18 bis 21.)

Sechs Wohnungen im Miethausblock von Mies van der Rohe sind dem Schweizerischen Werkbund zur Einrichtung übertragen worden, wobei die Einrichtung auch die ganze Anordnung der Scheidewände, also die Zimmerdisposition betraf. Der S.W.B. hat dann eine Gruppe jüngerer Architekten zur Mitarbeit eingeladen, grosszügigerweise ohne Rücksicht auf ihre Vereinszugehörigkeit. Sie bestand aus den Architekten E. F. Burckhardt, K. Egender, A. Gradmann, M. E. Häfeli, H. Hofmann, W. Kienzle, W. Moser, H. Neisse, R. S. Rüttschi, R. Steiger, sämtliche in Zürich, F. Scheibler, Winterthur, P. Artaria und H. Schmidt, Basel; die Leitung lag bei Max Ernst Häfeli. Es berührt überaus sympathisch, dass auf kleinliche Festlegung der einzelnen Urheberschaften verzichtet wurde, sodass die Gruppe als geschlossene Einheit auftreten konnte. An der Herstellung der durchweg verwendeten Serienmöbel waren schweizerische und Stuttgarter Firmen beteiligt.

Gegeben war nur die Lage des Treppenhauses, die Umfassungs- sowie die Scheidewände, und die bandartig um das Haus laufende ununterbrochene Fensterreihe; eine weitere Bindung ergab sich aus der Notwendigkeit, Küchen und Bäder in allen Geschossen übereinanderzulegen. Die in möglichst leichter, und vor allem trockener Konstruktion hergestellten Zwischenwände und Schiebewände bestehen aus einem Lattenrost mit beidseitiger „Calotex“-Verkleidung. Mit den gleichen, aus Zuckerrohrfaser hergestellten kartonartigen Platten wurden die Decken belegt; die ziemlich raue Oberfläche ist gestrichen.