Band 95 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 26**

Die Anstrengungsfrage.

Von Dr. Ing. G. D. SANDEL, Chemnitz.

Auch neuere wertvolle Beiträge zur Lösung des Anstrengungsproblems[1]) zeigen noch offene Fragen, die nachstehend aufgewiesen und zu klären versucht werden.

I. DAS ANSTRENGUNGSPROBLEM.

Das Anstrengungsproblem stellt zweierlei Aufgaben: Die erste besteht darin, alle jene Grenzhauptspannungen anzugeben, bei denen die gleiche Fliess- oder Bruchgefahr besteht, die zweite darin, alle jene Hauptspannungen vorauszusagen, bei denen die gleiche Sicherheit gegen die Fliess- oder Bruchgefahr vorhanden ist.

Die Gesamtheit der Grenzhauptspannungen in Hauptspannungskoordinaten aufgetragen bildet die *Grenzfläche* $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, die sich mit den Poissonschen Gleichungen auch umformen lässt in eine Haupt*dehnungs*grenzfläche $f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Die „Grenzfläche $n$facher Sicherheit" ist nur dann eine $n$fache Verkleinerung der genannten Grenzflächen, wenn sich der Festigkeits- bezw. Anstrengungszustand bis zum Vergleichspannungszustand an der Grenze mit zunehmenden Spannungen linear und nicht unstetig ändert, d. h. wenn z. B. den Vergleichspannungen an der Fliessgefahrgrenze gerade noch die selben Materialeigenschaften entsprechen, wie an der Sicherheitsgrenze. Bei der Elastizitätsgrenze und allenfalls der oberen Streckgrenze treffen diese Voraussetzungen noch zu, an der unteren Streckgrenze aber nicht mehr. Denn für die Grenzfläche des schon eingetretenen Fliessens ist die Poissonsche Zahl $m = 2$, für die Sicherheitsgrenzfläche aber $m = \sim 10/3$. Der Fall $m = 2$ tritt für gesundes Material nicht ein. Bis zur oberen Streckgrenze, an der sich das Material plötzlich verändert — durch Eintreten von Zementitbrüchen nach G. Sachs — ist $m > 2 = \sim 10/3$. Es kann also der Fall $m = 2$ für die Beurteilung der Anstrengung nicht in Frage kommen, wohl aber für die Voraussage des Eintretens der unteren Streckgrenze und allenfalls des Eintretens des Schiebungsbruches bei spröden Materialien, für die $\varkappa = K_d/K_z > 1$ ist.

II. SPANNUNGSZUSTAND, FORMÄNDERUNGSZUSTAND.

Ein *Spannungszustand* ist durch die drei Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, bezw. durch Grösse und Richtung des Spannungshauptvektors, d. i. die geometrische Summe der drei Hauptspannungen, vollständig bestimmt.

Ein *Formänderungszustand* ist durch die drei Hauptdehnungen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, bezw. durch Grösse und Richtung des Dehnungshauptvektors, d. h. die geometrische Summe der drei Hauptdehnungen vollständig bestimmt. Der „Betrag" des Dehnungshauptvektors ist die relative Verlagerung eines Punktes gegenüber seiner ungespannten Lage.

Die Grössen, mit denen die Elastizitätslehre und speziell die Festigkeitstheorien rechnen, sind als Komponenten des Spannungs- oder des Dehnungshauptvektors anzusehen. Solche Komponenten sind:

a) Der Vektor der grössten Hauptspannung σ_1, den die *Spannungs*theorie (die Grundlage der Dampfkessel-Berechnungen) als Mass der Anstrengung ansieht.

b) Der Vektor der grössten Dehnung ε_1, den die *Dehnungs*theorie (Mariotte, Navier, Poncelet, Grashof) und nach ihnen heutzutage noch die meisten Lehrbücher der Festigkeitslehre als Mass der Anstrengung bezeichnen.

c) Der Kompressionsvektor $\varrho_p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sqrt{3}}$, der dem „hydraulischen Druck" $p = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$ proportional ist. Der Druck im Innern eines Werkstoffes ist die Summe aus dem Kohäsionsdruck σ_{zzz} und dem „hydraulischen" Druck p.

d) Der Dichte-, Lockerungs- oder Volumdehnungsvektor $\varrho_v = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{\sqrt{3}}$, der der Volumdehnung $e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ proportional ist.

e) Der Vektor der grössten Schubspannung $\tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$, den die *Schub*theorie als Mass der Anstrengung bezeichnet.

f) Der Vektor der grössten Verschiebung $\gamma_{13} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$, der auf Grund der Poissonschen Gleichungen mit $m = \text{const.}$ dem Vektor τ_{13} proportional ist und darum auch als Mass der Anstrengung nach der Schubtheorie gelten kann.

g) Der Schubspannungshauptvektor

$\varrho_\tau = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2}$, der sich als Mass der Anstrengung nach der *Gestaltsänderungstheorie* ergibt.

h) Der Verschiebungshauptvektor

$\varrho_\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\gamma_{12}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{31}^2}$, d. h. die relative *Verschiebung* eines Punktes gegenüber seiner ungespannten Lage, die auf Grund der Poissonschen Gleichungen mit $m = \text{const.}$ dem Vektor ϱ_τ proportional ist und darum ebenfalls als Mass der Anstrengung nach der Gestaltsänderungstheorie angesprochen werden kann.

Ein Spannungszustand (Formänderungszustand) kann in rechtwinkligen Koordinaten durch die drei Hauptspannungen (Hauptdehnungen) oder in Zylinderkoordinaten durch den axialen Vektor ϱ_p (ϱ_v) und den radialen Vektor ϱ_τ (σ_γ) dargestellt werden. Die Axe fällt in die Richtung $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ $(\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3)$.

Es ist $\varrho_\sigma = \sqrt{\varrho_p^2 + \varrho_\tau^2}$

und $\varrho_\varepsilon = \sqrt{\varrho_v^2 + \varrho_\gamma^2}$

Andere Darstellungen der Grenzfläche als diese sind nicht einwandfrei, da sie, wie z. B. die Mohrsche, auf einer nicht bestätigten Hypothese fussen. Die verschiedenen Anstrengungshypothesen sehen also in verschiedenen Komponenten des Spannungs- oder Dehnungshauptvektors das Mass der Anstrengung.

Ausser den erwähnten Anstrengungshypothesen sind noch zu nennen:

1. Die Mohrsche, die hier in der Form: $\tau_{13} = f(\sigma_1 + \sigma_3)$ wiedergegeben wird.

2. Die Schleichersche: $\varrho_\tau = \text{const.}$ für $p = \text{const.}$ und allgemein $\varrho_\tau = f(p)$.

3. Die Formänderungsenergiehypothese. Beltrami, Girtler u. a. bezeichneten den auf die Volumeinheit entfallenden Grenzwert der Formänderungsarbeit als Mass der Anstrengung.

Diese letzte durch ihre begriffliche Einfachheit berückende Hypothese hat viel für sich, wird aber durch die Versuche wider Erwarten nicht bestätigt. In Ansehung der Versuche stellten Huber, Henkey u. a. wenigstens für die bildsamen Werkstoffe $(\varkappa = 1)$ nur den Anteil der Gestaltsänderungsarbeit an der ganzen Formänderungsarbeit

[1]) a) *F. Schleicher*, „Der Spannungszustand an der Fliessgrenze" „Z. A. M." 1926, S. 199 — b) *Roš* und *Eichinger*, Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr. Diskussionsbericht „E. M. P. A." Zürich 1926. — c) *Lode*, Der Einfluss der mittleren Hauptspannung. „F. H." 803. 1928. — d) *F. Schleicher*, Ueber die Sicherheit gegen Ueberschreiten der Fliessgrenze. „Bauingenieur" 1928, S. 295. — e) *v. Burzinsky*, Ueber Anstrengungshypothesen. „S.B.Z." Bd. 94, Nr. 21.