Band 97 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 25

Graphisches Rechenverfahren zur Berechnung gedrückter Stäbe nach dem „Omega-Verfahren".

Von Dipl.-Ing. AUGUST KORHAMMER, München.

Bei dem Omega-Verfahren werden die massgebenden Grössen aus folgenden Gleichungen ermittelt:[1])

$$\sigma_{\max} = \frac{P\omega}{F} + \frac{M}{W} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

dabei ist $\omega = f(\lambda) \quad \ldots \ldots \quad (2)$

d. h. eine Funktion von λ, wobei $\lambda = \frac{L}{i}$.

Hierin bedeuten:

$\sigma_{\max}$ die grösste zulässige Druck- oder Zugbeanspruchung des Baustoffes,
P die Belastung des Stabes in seiner Längsaxe,
F den über die ganze Länge des Stabes gleichmässigen Querschnitt,
ω, λ Verhältniszahlen,
M ein zur Belastung P zusätzliches Biegungsmoment, etwa erzeugt durch Angriff von P ausserhalb des Schwerpunktes des Querschnitts F,
W das Widerstandsmoment des Querschnitts, bezogen auf die Axe des Moments M,
L die freie Länge des Stabes,
i den Trägheitshalbmesser des Querschnitts, bezogen auf jene Schwerpunktaxe, für die eine Knickgefahr besteht.

(Bezüglich der Dimensionen der genannten Grössen sei erwähnt, dass im folgenden immer mit mm und kg gerechnet wurde; lediglich die später erwähnten Trägheitsmomente sind in Anlehnung an die gebräuchlichen Tabellenwerke in cm⁴ angegeben.)

Die rein zahlenmässige Anwendung der Gleichungen (1) und (2) macht dann einige Schwierigkeiten, wenn, wie dies beim Entwurf von Bauwerken meist der Fall ist, eine oder mehrere der in Frage kommenden Grössen erst angenommen werden müssen, worauf die Rechnung probeweise durchgeführt wird und je nach Richtigkeit der anfangs gemachten Annahme ein- oder mehrmals wiederholt werden muss. Diesem Uebelstand soll, wenigstens für die nachstehend bezeichneten Fälle, durch das folgende graphische Rechenverfahren abgeholfen werden. Dabei muss ich erwähnen, dass ich die Anregung hierzu durch eine kürzlich erschienene ähnliche Arbeit[2]) erhalten habe.

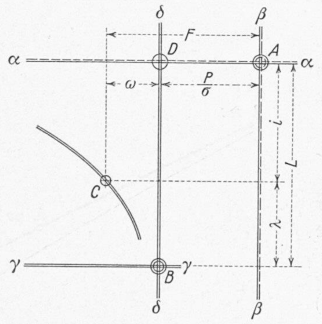

Abb. 1. Schema des Rechenverfahrens.

Nehmen wir zunächst eine rein zentrische Belastung, also im Schwerpunkt angreifend, an, so wird M zu 0 und die Gleichung (1) vereinfacht sich zu

$$\sigma_{\max} = \frac{P\omega}{F} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

oder nach kleiner Umformung und logarithmiert:

$$\log F = \log \frac{P}{\sigma_{\max}} + \log \omega \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

entsprechend lässt sich anschreiben:

$$\log L = \log \lambda + \log i \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Diese Gleichungen sind in Abb. 1 graphisch dargestellt durch zwei übereinandergelagerte rechtwinklige Koordinatensysteme mit paarweise parallelen Axen.

Im System mit dem Axenschnittpunkt A (die Axen sind durch eine volle und eine gestrichelte Linie gekennzeichnet) sind in logarithmischem Masstab auf der Abszissenaxe $\alpha - \alpha$ von A nach links die Grössen F und $\frac{P}{\sigma}$, auf der Ordinatenaxe $\beta - \beta$ von A nach unten die Grösse i, im System mit dem Axenschnittpunkt B (Axen durch zwei volle Linien dargestellt) auf der Abszissenaxe $\gamma - \gamma$ von B nach links die Grösse ω, auf der Ordinatenaxe $\delta - \delta$ von B nach oben die Grössen L und λ aufgetragen. Der Kürze halber sind lediglich die Bezeichnungen F, L, i usw. angeschrieben, statt $\log F$, $\log L$, $\log i$ usw. Die eingezeichnete Kurve liegt im System B und stellt die Funktion dar

$$\log \omega = \log f(\lambda)$$

Die Gleichung (4) können wir unmittelbar an der Abszissenaxe $\alpha - \alpha$ ablesen, die Gleichung (5) an der Ordinatenaxe $\beta - \beta$. Der Punkt C auf der Kurve erfüllt beide Gleichungen; aber auch jeder links unterhalb der Kurve gelegene Punkt erfüllt sie, denn laut Gleichung (4) darf ja $\log F$ grösser sein als $\log P/\sigma + \log \omega$, wenn wir nur für σ auch einen kleinern Wert als $\sigma_{\max}$ zulassen, was für einen solchen Punkt zutrifft. Legen wir also von vornherein das auf einem eigenen durchsichtigen Blatt (Deckblatt) zu denkende System B so auf das System A (Grundblatt), dass der Schnittpunkt D der Axen $\alpha - \alpha$ und $\delta - \delta$ die

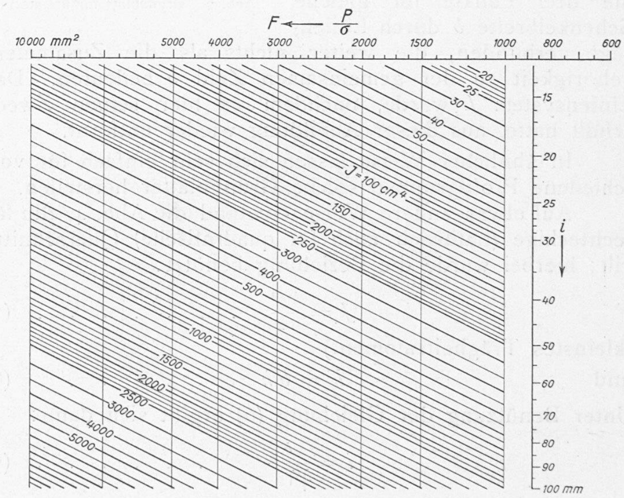

Abb. 2. Grundblatt für beliebige Querschnitte, gekennzeichnet durch Querschnittsfläche, Trägheitsmoment und Trägheitshalbmesser.

Abstände P/σ von A bezw. L von B hat, so hat irgend ein Punkt links unterhalb der Kurve solche Koordinaten F und i, die die Gleichungen (2), (4) und (5) erfüllen. Die Werte λ und ω interessieren gar nicht mehr, da sie nur Zwischenwerte in der Rechnung darstellen. Auch der Wert i ist oft nicht von Interesse, meist in den Tabellen für die verschiedenen Querschnitte nicht angegeben, statt dessen aber das Trägheitsmoment J. Mit diesem und der Querschnittsfläche F hängt i durch die Gleichung zusammen:

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Diesen Umstand benützen wir, um in das System A eine Linienschar mit dem Parameter J einzuzeichnen, wie in Abb. 2 geschehen. Statt hierin einen Punkt nach seinen Koordi-

[1]) Hütte 1925, I. Band, S. 573 bis 575.

[2]) „Die Berechnung gedrückter Profileisenstäbe nach dem Omegaverfahren mit Hilfe von graphischen Tafeln", von Dipl.-Ing. Adolf Künkler.

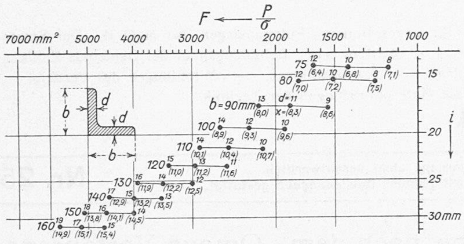

Abb. 3. Grundblatt für gleichschenklige Winkeleisen.

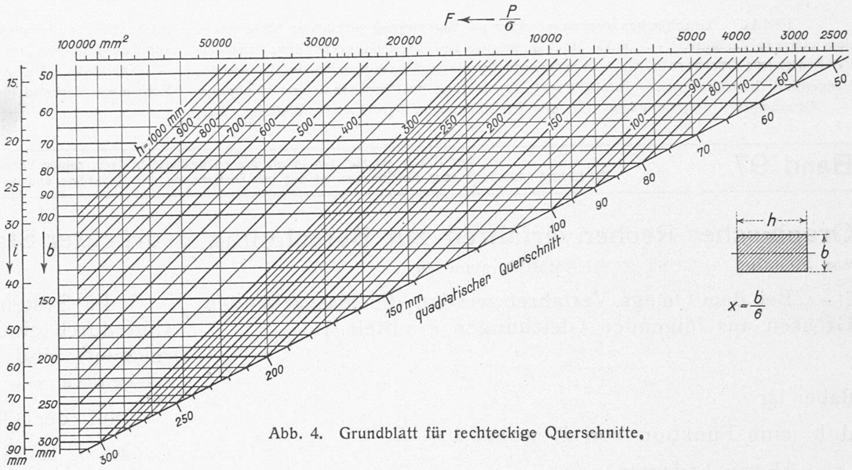

Abb. 4. Grundblatt für rechteckige Querschnitte.

naten F und i zu bestimmen, kann man ihn auch durch F und J festlegen. Dieses Blatt kann als einfachste Form eines Grundblattes angesehen werden, das für beliebige Querschnittformen verwendbar ist, indem man für die Werte F und J die zugehörigen Punkte aufsucht.

Ein solches Grundblatt wurde benützt, um die zusammengehörigen Querschnitts- und Trägheitswerte für gleichschenklige Winkeleisenprofile einzuzeichnen, wodurch Abb. 3 entstand. Entsprechend der Neigung gedrückter Stäbe, im allgemeinen um die Axe des kleinsten Trägheitsmomentes auszuknicken, wurde das kleinste Trägheitsmoment zugrunde gelegt. Jedem eingezeichneten Punkt entspricht ein Profil z. B. 120×15, 110×10 usw., wobei die ersten Zahlen die Schenkelbreiten b, die letzten die Schenkeldicken d angeben. Zur übersichtlichen Darstellung sind die drei Punkte für gleiche Schenkelbreite b durch Linienzüge verbunden, die weiter nichts als die Zusammengehörigkeit zu der gemeinsamen Zahl b bedeuten. Das Liniensystem J wurde, nachdem es hier seinen Zweck erfüllt hatte, aus dieser Abbildung wieder entfernt.

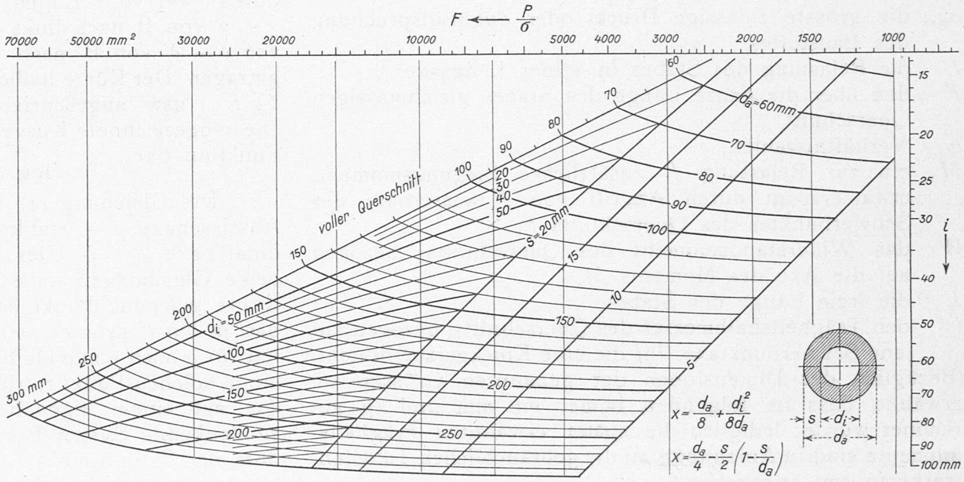

Abb. 5. Grundblatt für kreisförmige, hohle und volle Querschnitte.

In ähnlicher Weise lassen sich sehr einfach für verschiedene Profilgruppen solche Grundblätter herstellen.

Auf etwas andere Weise entstand die Abb. 4, die für rechteckige (natürlich auch für quadratische) Querschnitte gilt; hierbei wurde die Beziehung benützt:

$$J = \frac{h\,b^3}{12} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

(kleinstes Trägheitsmoment)

und

$$F = b\,h \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Unter Benützung der Gleichung (6) ergibt sich dann:

$$i = \frac{b}{\sqrt{12}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

und

$$i = \frac{F}{h\sqrt{12}} \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

Die letzten beiden Gleichungen stellen im logarithmischen System $F - i$ Geradenscharen dar, die durch die schräge Gerade für quadratische Profile $i = \sqrt{\frac{F}{12}}$ begrenzt werden. Für jeden Punkt des Feldes können die zugehörigen Werte b und h, nach Belieben auch F und i angegeben werden.

Als ein letztes der vielen noch möglichen Beispiele wurde die Abb. 5 für kreisförmige Profile, sowohl volle als auch hohle (Rohre) gezeichnet. Hier dienten die Beziehungen

$$J = (d_a^4 - d_i^4)\,\frac{\pi}{64} \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

und

$$F = (d_a^2 - d_i^2)\,\frac{\pi}{4} \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

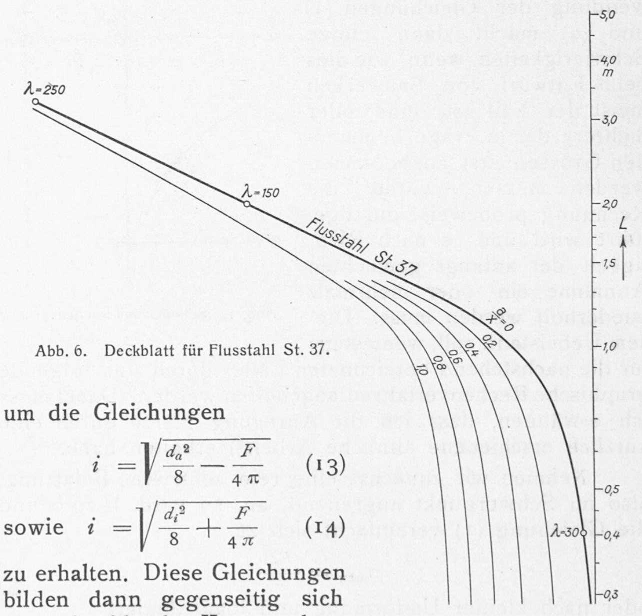

Abb. 6. Deckblatt für Flusstahl St. 37.

um die Gleichungen

$$i = \sqrt{\frac{d_a^2}{8} - \frac{F}{4\pi}} \quad (13)$$

sowie

$$i = \sqrt{\frac{d_i^2}{8} + \frac{F}{4\pi}} \quad (14)$$

zu erhalten. Diese Gleichungen bilden dann gegenseitig sich überschneidende Kurvenschar-Scharen mit den Parametern d_a und d_i, begrenzt von der Geraden für volle Querschnitte

$$i = \sqrt{\frac{F}{4\pi}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

Weil in dem Bereich geringer Unterschiede zwischen d_a und d_i, also geringer Wandstärken, sich die Kurvenscharen nur sehr flach schneiden, wurde dort der Parameter d_i ersetzt durch die Wandstärke s nach der Gleichung

$$s = \frac{d_a - d_i}{2} \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

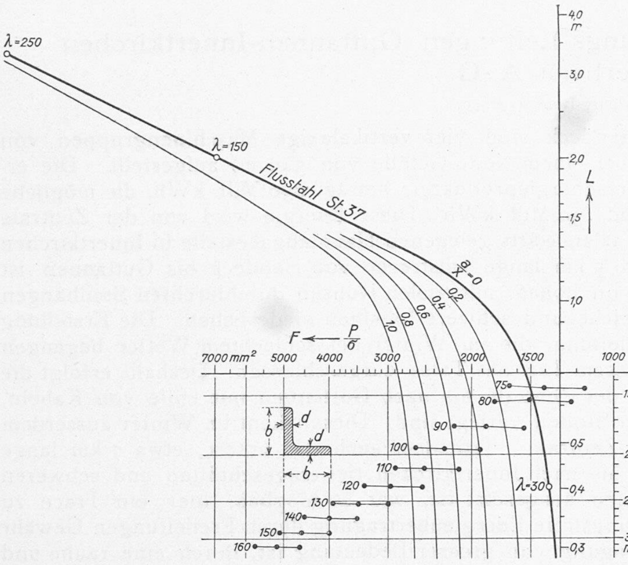

Abb. 7. Zusammenstellung der Abb. 3 und 6.

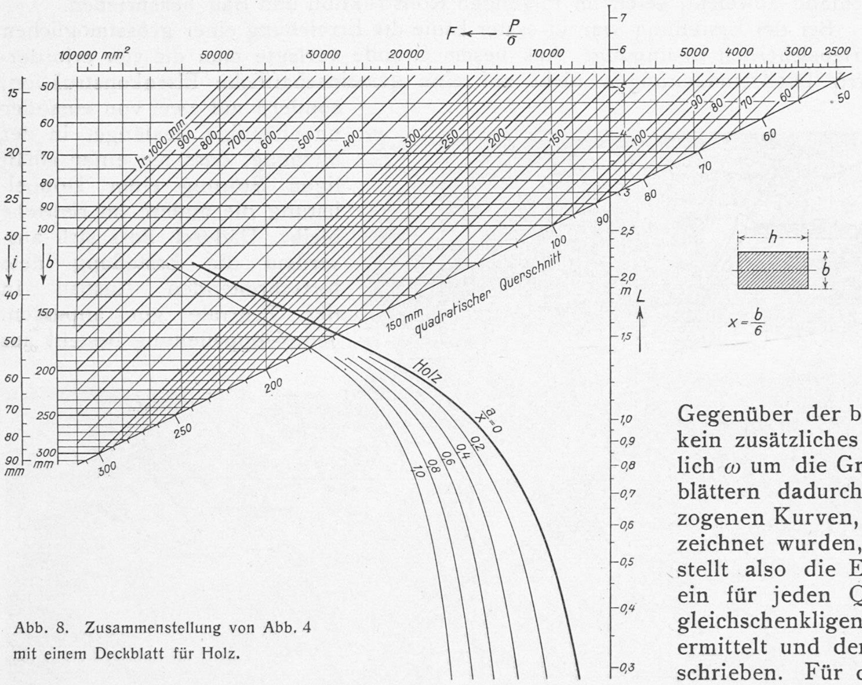

Abb. 8. Zusammenstellung von Abb. 4 mit einem Deckblatt für Holz.

Das lieferte dann an Stelle der Gleichung (16) die folgende:

$$i = \sqrt{\frac{\left(\frac{F}{\pi}\right)^2 + s^4}{8\, s^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

Für jeden Punkt des Kurvenfeldes sind also die entsprechenden Durchmesser d_a und d_i oder die Wandstärke s des kreisförmigen Querschnitts abzulesen.

Neben den Abb. 3 bis 5, die verschiedene Arten von Grundblättern darstellen (System A), benötigt man noch Deckblätter, wie ein solches in Abb. 6 wiedergegeben ist. Sie enthalten nur Kurven für ω bei verschiedenen Werkstoffen (z. B. für Flusstahl St 37 und Holz nach „Hütte" 1925 I, S. 574 und 575) sowie Skalen für L. Die Masstäbe für ω und λ wurden, weil unnötig, weggelassen. Als ω-Kurven wollen wir zunächst nur die dick ausgezogenen betrachten. Es kann nun ein beliebiges Deckblatt auf ein beliebiges Grundblatt gelegt werden, um damit die Verhältnisse an gedrückten Stäben zu ermitteln (Abb. 7 u. 8).

Der Abb. 7 liegt folgendes Beispiel zugrunde: Für eine zentrische Last $P = 15\,600$ kg, eine zulässige Belastung von $\sigma_{max} = 12$ kg/mm², also für $P/\sigma_{max} = 15\,600/12 = 1300$ mm², sowie eine Knicklänge von $L = 0{,}8$ m soll ein gleichschenkliges Winkeleisen ermittelt werden. Hierzu wurde Abb. 6 so auf Abb. 3 gelegt, dass sich die beiden Skalen für P/σ und L bei den angegebenen Werten schneiden. Sämtliche links unterhalb der dick ausgezogenen Kurve liegenden Punkte entsprechen dann der Forderung. Natürlich wählen wir das leichteste Profil, also den Punkt am weitesten rechts, d. h. mit dem kleinsten Querschnitt, das ist der Winkel 80 × 10. Die Zahl 10 ist in Abb. 7 der Uebersichtlichkeit halber weggelassen, kann aber aus Abb. 3 für den in Frage kommenden Punkt abgelesen werden.

Bei Abb. 8 sei ein Holzpfeiler von $b = 150$ mm und $h = 240$ mm mit einer Belastung von $P = 750$ kg und einer zulässigen Beanspruchung von $\sigma_{max} = 1$ kg/mm² gegeben. Gesucht sei die zulässige Knicklänge. Das betreffende Deckblatt wird so auf das Grundblatt Abb. 4 gelegt, dass die dick ausgezogene Kurve durch den Punkt $b = 150$ und $h = 240$ geht und die L-Skala durch den Skalenpunkt $P/\sigma = \frac{750}{1} = 750$ mm²; dort wird dann die L-Skala im Punkt 5,5 m, der höchstzulässigen Knicklänge, geschnitten.

Nun kommen wir noch zu der Berücksichtigung eines zusätzlichen Moments M, das durch eine Verlegung der Druckkraft P um den Abstand a vom Schwerpunkt erzeugt werden kann. Das für dieses Biegungsmoment $M = P\,a$ in Betracht zu ziehende Widerstandsmoment W sei auf die gleiche Axe bezogen, wie das bei der Bestimmung von i und ω vorgekommene kleinste Trägheitsmoment. Dann lässt sich ersetzen:

$$M = a\,P, \quad W = \frac{J}{y} \quad \text{und} \quad J = i^2 F,$$

also

$$\frac{M}{W} = \frac{a\,P\,y}{i^2 F} \quad . \; . \; . \quad (18)$$

$x = \frac{b}{6}$

wobei y den Abstand der gespanntesten Faser vom Schwerpunkt bedeutet. Gleichung (1) wird dann zu

$$\sigma_{max} = \frac{P}{F}\left(\omega + \frac{a}{x}\right) \quad . \quad (19)$$

worin

$$x = \frac{i^2}{y} \quad . \; . \; . \quad (20)$$

Gegenüber der bisherigen vereinfachenden Annahme, dass kein zusätzliches Moment vorhanden sei, wird jetzt lediglich ω um die Grösse a/x vergrössert. Dies ist in den Deckblättern dadurch ermöglicht, dass neben den dick ausgezogenen Kurven, für die $a/x = 0$ ist, einige weitere eingezeichnet wurden, bis zum Werte $a/x = 1{,}0$. Der Wert a stellt also die Exzentrizität der Last P dar, der Wert x ein für jeden Querschnitt verschiedenes Mass. Für die gleichschenkligen Winkelprofile (Abb. 3) wurde dieses Mass ermittelt und den einzelnen Punkten in Klammern beigeschrieben. Für die rechteckigen Profile sind sie leicht zu ermitteln aus der Gleichung:

$$x = \frac{b}{6} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

Diese leitet sich ab aus den Beziehungen

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \frac{b}{\sqrt{12}} \quad \text{und} \quad y = \frac{b}{2}.$$

Für kreisförmige Querschnitte wird

$$x = \frac{d_a}{8} + \frac{d_i^2}{8\,d_a} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

Diese Gleichung ergibt sich aus

$$i = \frac{1}{4}\sqrt{d_a^2 + d_i^2} \quad \text{und} \quad y = \frac{d_a}{2} \quad \text{sowie} \quad s = \frac{d_a - d_i}{2}.$$

Auf die Fälle der Abb. 7 angewendet, ergibt sich z. B. bei einer Verschiebung des Angriffspunktes der Kraft P um $a = 10$ mm (vom Schwerpunkt gemessen senkrecht zur Axe des kleinsten Trägheitsmomentes) und bei Wahl des Profils 120 × 11 ein $x = 11{,}6$ mm, also $\frac{a}{x} = \frac{10}{11{,}6} = 0{,}86$; dieses Profil ist also zulässig, denn es liegt auf der Kurve $a/x = 0{,}9$. Man kann natürlich auch umgekehrt verfahren und für die in Frage kommenden Profile die zugehörigen Werte a/x sowie x ablesen und durch Division den jeweils höchstzulässigen Wert a errechnen.