

Objektyp: **TableOfContent**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **97/98 (1931)**

Heft 23

PDF erstellt am: **12.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*  
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

<http://www.e-periodica.ch>

INHALT: Graphische Analysis vermittels des Linienbildes einer Funktion. — Von den Völkerbund-Gebäuden in Genf. — Schweizer. Elektrotechnischer Verein und Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke. — Mitteilungen: Gleichrichter mit Steuergeräth. Sicherung der „Galleria“ in Mailand. Zum Obergeringieur des Kantons Graubünden. Der Bau der Dreirosenbrücke in Basel. Versuche mit 60 m langen Eisen-

bahnschienen. Eidgenössische Technische Hochschule. Schweizer Mustermesse 1932. — Wettbewerbe: Sekundarschulhaus Oberwinterthur. Neubau eines Stadthauses in Bern. Verwaltungsgebäude der städtischen Werke Baden. Hotel Viktoria - Umbau in Zürich. Krematorium beim Friedhof Nordheim in Zürich. — Mitteilungen der Vereine. — Sitzungs- und Vortrags-Kalender. — An unsere Abonnenten.

Band 98

Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich.  
Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.

Nr. 23

## Graphische Analysis vermittels des Linienbildes einer Funktion.

Von Prof. Dr. E. MEISSNER, E. T. H., Zürich.

*Vorwort.* In zwei Aufsätzen, die in der „Schweiz. Bauzeitung“ erschienen sind<sup>1)</sup>, habe ich ein graphisches Integrationsverfahren für totale Differentialgleichungen entwickelt, das seither in der Praxis Anwendung gefunden hat und seit einiger Zeit auch regelmässig an der Abteilung für Maschineningenieure der E. T. H. benützt wird. Infolgedessen ist der als Sonderdruck im Buchhandel erschienene grundlegende erste Aufsatz vergriffen. Statt ihn einfach neu drucken zu lassen, erschien es mir zweckmässig, seinen Inhalt mit jenem des zweiten Aufsatzes und mit weiterem, in Vorlesungen vorgetragenem Stoff zusammenzuarbeiten. Es lag nahe, an anderer Stelle von mir publizierte Dinge gelegentlich mit einzubeziehen. So ist die vorliegende Arbeit entstanden. Ihr Stoff ist, soweit er schon veröffentlicht wurde, den drei erwähnten Aufsätzen entnommen. Die durchgeführten Beispiele und ebenso die Figuren des Textes sind zum grossen Teil neu. Für die Herstellung der letzten bin ich meinen Assistenten Druey, Waldvogel und insbesondere Herrn Salzmann zu Dank verpflichtet.

Der Aufsatz wendet sich an Ingenieure und Techniker, die analytisch schwer oder gar nicht zugängliche totale Differentialgleichungen numerisch zu lösen haben. Die Anwendungsbeispiele sind daher meist der Mechanik entnommen.

### 1. Einleitung.

Die graphische Darstellung ist das ureigenste Ausdrucksmittel und Handwerkszeug des Ingenieurs. Wo immer es angeht, wird er die Anschaulichkeit der Zeichnung der abstrakten Blässe der Formel vorziehen. So werden in der Statik der Baukonstruktionen die verwickelten algebraischen Beziehungen durch die Kräfte- und Verschiebungspläne geometrisch konstruiert und Aehnliches gilt in andern Gebieten, wie Kinematik, Elektrotechnik, usw. Allerdings hat die analytische Behandlung den ungeheuren Vorteil, dass sie sich nicht auf eine ganz bestimmte Aufgabe festzulegen braucht, sondern dass sie gerade die Abhängigkeit der Lösung von den Parametern des Problems zum Gegenstand der Untersuchung machen kann. Man wird ihr daher nie entraten können, umso mehr auch, als sie allein die Lösung mit unbegrenzter Genauigkeit zu ermitteln erlaubt. Aber in den technischen Anwendungen hat man es immer mit einem eindeutig bestimmten Sonderfall zu tun, und mehr als die allgemein gültigen Eigenschaften der Lösung interessieren den Ingenieur die numerischen Besonderheiten dieses Einzelfalles.

In der Mechanik und Physik führen die meisten nicht algebraischen Probleme auf Differentialgleichungen, aus denen die unbekannt Funktionen bestimmt werden müssen.<sup>2)</sup> Je nachdem diese von mehreren oder nur einer einzigen Veränderlichen abhängig sind, hat man es mit

partiellen oder mit totalen Differentialgleichungen zu tun. Diese letzteren treten in der Mechanik besonders häufig auf; sie sind dort meist von der zweiten Ordnung.

Für die analytische Lösung totaler Differentialgleichungen liegen eine Reihe von Integrationsmethoden vor, die aber nur in den einfachern Fällen zum Ziele führen, d. h. für die gesuchte Funktion einen Ausdruck in elementaren Funktionen ( $x^n$ ,  $e^x$ ,  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ ,  $\lg(x)$  usw.) zu finden erlauben; denn in der Mehrzahl der Fälle werden durch die Differentialgleichungen neue Funktionen definiert, die sich überhaupt nicht elementar darstellen lassen. So führen viele Bewegungsaufgaben, z. B. das Pendel- und das Kreiselproblem, auf elliptische Funktionen, während andere wieder Funktionen ergeben, die auch dem Mathematiker unbekannt sind (Dreikörperproblem der Himmelsmechanik).

Nun ist für den Techniker und Physiker der Standpunkt gegenüber solchen „unlösbar“ Differentialgleichungen durchaus nicht der selbe wie für den Mathematiker. Während dieser nach der Existenz, dem Charakter und den Eigenschaften der Lösung fragen wird, begnügt sich der Techniker, wenn er bei gegebenen Anfangsbedingungen den Verlauf der Funktion qualitativ, womöglich auch quantitativ beurteilen kann, wobei es ihm auf Fehler von einigen Prozenten im allgemeinen kaum viel ankommen dürfte. Er wird also nach Verfahren suchen, die die Lösung wenigstens mit Annäherung zu berechnen erlauben.

Zu diesem Zweck kann er einmal für die Lösung eine Potenzreihe (oder eine andere Funktionenreihe mit genügend vielen verfügbaren Konstanten) ansetzen und so der Differentialgleichung zu genügen suchen. Aber diese Methode ist selten praktisch durchführbar und man hat häufig Konvergenzschwierigkeiten.

Ein zweites Mittel besteht darin, schon die Differentialgleichung zu vereinfachen, indem etwa Glieder vernachlässigt werden, deren Einfluss voraussichtlich klein ist. Das tut man z. B. bei der Behandlung der gewöhnlichen Pendelschwingungen, wo die genaue Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - \frac{g}{l} \sin(\varphi)$$

unter Voraussetzung von kleinen Schwingungen durch die viel einfachere

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - \left[ \frac{g}{l} \varphi \right]$$

ersetzt wird. Aber dieses Verfahren hat stets gewisse Voraussetzungen, die nicht immer erfüllt sind; auch ist man im Unsichern über den Geltungsbereich der gefundenen Lösung.

Eine dritte Methode benützt das sogen. Differenzenverfahren. Sie ersetzt die Differentialgleichung durch eine Differenzgleichung, die Differentiale durch endlich grosse, wenn auch sehr kleine Differenzen und berechnet so schrittweise die Funktion angenähert aus den gegebenen Anfangswerten. Schon in einfachen Fällen kommt man aber auf diese Weise zu umfangreichen Rechnungen und mehr oder weniger unübersichtlichen Zahlentabellen.

Es liegt nahe, den Gedanken, der hier zu Grunde liegt, zu verwenden, um ein graphisches Verfahren darauf aufzubauen. Das ist auch deswegen empfehlenswert, weil gelegentlich die schon in der Differentialgleichung auftretenden Funktionen und umso mehr die Lösung sich entweder garnicht oder nur umständlich analytisch beschreiben lassen, während sie graphisch einfach durch ein Dia-

<sup>1)</sup> „Ueber graphische Integration von totalen Differentialgleichungen“, erschienen in „S. B. Z.“, Bd. 62, Nr. 15 und 16 (11./18. Oktober 1913).

„Zur Schwingungslehre“, erschienen in „S. B. Z.“, Bd. 84, Nr. 23 und 24 (6./13. Dezember 1924).

S. a. „Ueber die Anwendung von Fourier-Reihen auf einige Aufgaben der Geometrie und Kinematik“, in der Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Jahrgang 54 (1909).

<sup>2)</sup> Zwar ist häufig auch die Formulierung als Variationsproblem möglich; doch wird man überall da, wo es sich nicht nur um den Verlauf der Lösung im Ganzen, sondern um ihre lokalen Besonderheiten handelt, die Bestimmung durch die Differentialgleichung vorziehen.