

# Graphische Analysis vermittelt des Linienbildes einer Funktion

Autor(en): **Meissner, E.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **97/98 (1931)**

Heft 26

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-44800>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

INHALT: Graphische Analysis vermittelt des Linienbildes einer Funktion. — Zu den Zeichnungen von Kantonsbaumeister Herrn. Fietz †. — Elektrisch geschweisster Blechträger. — Neuartige Fundation beim Bau der Brücke über den Kleinen Belf. — Vom gegenwärtigen Stand der Arbeitsphysiologie. — Mitteilungen: Dampfturbinen von 75 000 PS 3000 Uml/min für Paris. Automobile für die Durchquerung der Wüste

Sahara. Der Flugverkehr der italienischen Linien. Schweizer. Bundesrat. Schweizer. Bundesbahnen. Kraftwerk Wägital. Eidgen. Kunstkommission. Stadtpräsident von Lausanne. — Wettbewerbe: Krematorium beim Friedhof Nordheim in Zürich. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine. — Dieser Nummer ist das Inhalt-Verzeichnis des mit heute schliessenden Bandes 98 beigelegt.

Band 98

Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.

Nr. 26

Graphische Analysis vermittelt des Linienbildes einer Funktion.<sup>1)</sup>

Von Prof. Dr. E. MEISSNER, E. T. H., Zürich.

(Fortsetzung von Seite 290.)

5. Integration der totalen Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung.

Die meisten Probleme der Mechanik und Physik mit einem Freiheitsgrad und einer unabhängigen Veränderlichen führen auf totale Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die daher im Mittelpunkt des Interesses stehen. Solche Gleichungen geben eine Beziehung zwischen der gesuchten Funktion, ihren ersten Ableitungen und dem Argument, sind also von der Form

R(u, p, p', p'') = 0 . . . . . (4)

Wenn eine Gleichung nur von der ersten Ordnung vorliegt, oder, wie es gerade in der Mechanik oft vorkommt, wenn sich ein Integral dieser Gleichung angeben lässt (Energie-Integral), so hat man es zu tun mit einer Relation von der Form

R<sub>1</sub>(u, p, p') = 0 . . . . . (5)

Wenn man diese Relation nach u differentiirt, so geht sie in eine solche von der Form (4) über, sodass wir uns auf diese letzte beschränken können. Man löse sie nach p'' auf:

p'' = f(u, p, p').

Es ist dann auch

q = p + p' = F(u, p, p') . . . . . (6)

ein bekannter Ausdruck in den Grössen u, p und p'. In gewissen einfachen Fällen werden auf der rechten Seite nicht alle drei Argumente auftreten; wenn z. B. ein Integral (5) bekannt ist, kann immer eine der drei Grössen eliminiert werden. Dann vereinfacht sich die Lösung.

Statt die Funktion p(u) zu finden, die der Gleichung (4) bzw. (6) genügt, stellen wir uns jetzt die gleichwertige Aufgabe, ihr Linienbild C zu konstruieren. Dabei hat man sich für die Lösung bestimmte Anfangsbedingungen vorgeschrieben zu denken, etwa

p(0) = p<sub>0</sub> p'(0) = p'<sub>0</sub> . . . . . (7)

Die Differentialgleichung (6) gibt nun für jede Stelle P<sub>u</sub> des Linienbildes C den zugehörigen Krümmungsradius q<sub>u</sub>. In infinitesimaler Nähe von P<sub>u</sub> kann C ersetzt werden durch den dreipunktig berührenden Krümmungskreis vom Zentrum P<sub>u'</sub> und dem Halbmesser P<sub>u</sub>P<sub>u'</sub> = p<sub>u</sub> (Abb. 5 auf Seite 289). Mit Annäherung kann dieser Ersatz auch auf ein endliches Bogenstück ausgedehnt werden, und zwar umso genauer, je kleiner der dazu gehörige Zentriwinkel α ist. Unsere Annäherungsmethode besteht darin, die Kurve C durch solche kleine oskulierende Kreisbogenstücke zu ersetzen.

Man beginnt die Konstruktion bei dem durch (7) gegebenen Punkte P<sub>0</sub>, indem man die Punkte Q<sub>0</sub>, P<sub>0</sub>, Q<sub>0'</sub> aufträgt, sodass OQ<sub>0</sub> = p<sub>0</sub>, Q<sub>0</sub>P<sub>0</sub> = p'<sub>0</sub> = OQ<sub>0'</sub> wird (Abb. 8). Die Differentialgleichung (6) gibt jetzt den Krümmungsradius q<sub>0</sub> = P<sub>0</sub>P<sub>0'</sub> = F(0, p<sub>0</sub>, p'<sub>0</sub>), welche Strecke von P<sub>0</sub> aus auf der Normalen g<sub>0'</sub> bis P<sub>0'</sub> abgetragen wird. Wenn q<sub>0</sub> positiv ist, geht das Auftragen von P<sub>0</sub> aus in positivem Sinn, dem Pfeilsinn von g<sub>0'</sub>, im entgegengesetzten Sinn aber, wenn q<sub>0</sub> negativ ist. Es ist jetzt P<sub>0'</sub> der Krümmungsmittelpunkt von C in P<sub>0</sub>. Man wählt nun, je nach der verlangten Genauigkeit, einen kleinen Winkel α<sub>1</sub> und schlägt um P<sub>0'</sub> den Kreisbogen P<sub>0</sub>P<sub>1</sub> mit diesem Zentriwinkel und dem Halbmesser q<sub>0</sub>. Dieser in P<sub>0</sub> oskulierende Bogen wird näherungsweise als das erste Stück des Linienbildes C betrachtet. Es können jetzt für P<sub>1</sub> die entspre-

chenden Punkte Q<sub>1</sub>, Q<sub>1'</sub> gezeichnet und damit die Werte q<sub>1</sub> = p(a<sub>1</sub>) = OQ<sub>1</sub> = P<sub>1</sub>Q<sub>1'</sub> und p'<sub>1</sub> = p'(a<sub>1</sub>) = OQ<sub>1'</sub> aus der Zeichnung entnommen werden. Sie sind natürlich nur angenähert richtig, werden aber bei kleinem α<sub>1</sub> genügend genau, insbesondere wenn der Krümmungsradius im Intervall 0 bis a<sub>1</sub> nicht stark schwankt. Mit diesen Werten berechnet man jetzt den Krümmungsradius q<sub>1</sub> in P<sub>1</sub>, der durch den Wert

q<sub>1</sub> = F(a<sub>1</sub>, p<sub>1</sub>, p'<sub>1</sub>)

gegeben ist, und wiederholt nun die für P<sub>0</sub> beschriebene Konstruktion an P<sub>1</sub>, indem man P<sub>1</sub>P<sub>2</sub>' = q<sub>1</sub> macht und um P<sub>1</sub>' durch P<sub>1</sub> wieder einen kleinen Kreisbogen P<sub>1</sub>P<sub>2</sub> von beliebigem aber kleinem Zentriwinkel α<sub>2</sub> schlägt, der ein weiteres Bogenstück von C approximiert. Wenn nicht wegen starker Schwankung der Krümmung ein kleinerer Wert als α<sub>1</sub> angemessen ist, wird man zweckmässig α<sub>2</sub> = α<sub>1</sub> = α setzen, also mit gleichen Intervallen arbeiten. So fährt man weiter und erhält für C die Folge von Kreisbogenstücken P<sub>0</sub> P<sub>1</sub> P<sub>2</sub> P<sub>3</sub> . . .

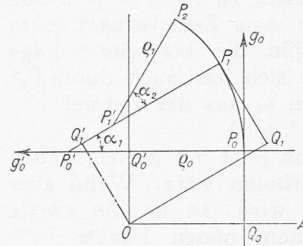


Abb. 8

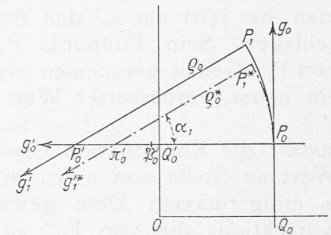


Abb. 9

Es ist klar, dass dieser Konstruktion ein Nachteil anhaftet, der aber in der Natur der Sache liegt. Jeder Punkt P<sub>i</sub> wird aus dem vorhergehenden P<sub>i-1</sub> konstruiert und in der Lage von P<sub>i-1</sub> enthaltene Ungenauigkeit überträgt sich daher auf P<sub>i</sub>. Im ungünstigsten Fall hat man daher eine Häufung der Fehler mit wachsender Zahl von Kreisbogenintervallen zu erwarten. Diese Häufung macht sich praktisch ganz besonders für die p' Werte bemerkbar.

Die Interpolation.

Man kann das besprochene Verfahren wesentlich verbessern, indem man eine einfache Interpolation hinzufügt. Da der Krümmungsradius q sich mit u im allgemeinen ändert, hat der ersetzende Kreisbogen P<sub>0</sub>P<sub>1</sub> nur im Anfangspunkt P<sub>0</sub> den durch die Differentialgleichung vorgeschriebenen richtigen Radius; für den Radius im Endpunkte P<sub>1</sub> würde die Differentialgleichung einen andern Wert, nämlich

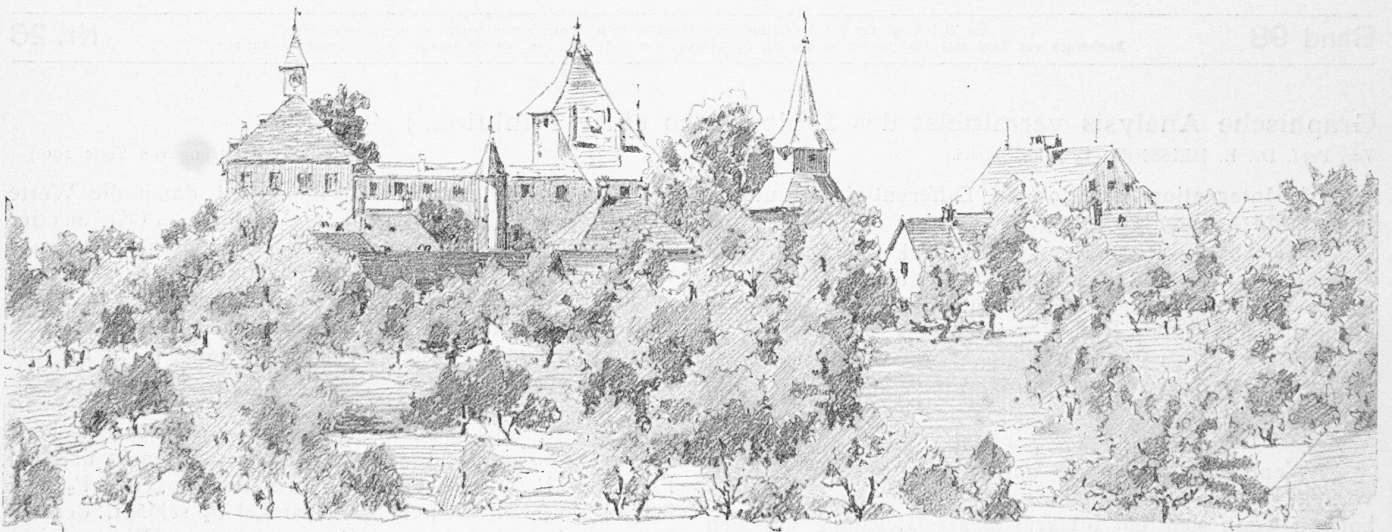
q<sub>1</sub> = F(a<sub>1</sub>, p<sub>1</sub>, p'<sub>1</sub>) . . . . . (8)

ergeben. Man wird im allgemeinen eine bessere Annäherung an den wahren Mittelwert erzielen, wenn dem Kreisbogen nachträglich statt mit q<sub>0</sub> mit dem arithmetischen Mittel q\* = (p<sub>0</sub> + p<sub>1</sub>)/2 geschlagen wird. Dieser neue Bogen P<sub>0</sub>P<sub>1</sub>\* hat als Endpunkt einen Punkt P<sub>1</sub>\*, der etwas verschieden von P<sub>1</sub> sein wird. Demgemäss ergeben sich an Stelle von p<sub>1</sub> und p'<sub>1</sub> neue, korrigierte Werte p<sub>1</sub>\* und p'<sub>1</sub>\*, wobei sich zeigt, dass die Korrektur in p' viel beträchtlicher ist, als in p.

Praktisch ist die neue Konstruktion folgendermassen auszuführen (Abb. 9):

Nachdem P<sub>1</sub> wie früher konstruiert und q<sub>1</sub> aus Formel (8) gefunden worden ist, trage man von P<sub>0</sub> aus auf der Normalen P<sub>0</sub>Q<sub>0'</sub> bis nach P<sub>0'</sub> die Länge q<sub>1</sub> ab, und

<sup>1)</sup> Diese Artikelfolge wird als Sonderdruck erscheinen. Red.



Aug. 8. 86.

Schloss Kyburg

Schloss Kyburg nach Bleistiftskizze von † Kantonsbaumeister Hermann Fietz aus dem Jahre 1886.

halbiere nun  $P_0'P_0'$  durch  $\pi_0'$ . Dann ist  $P_0\pi_0' = Q_0^{**}$ , und man hat jetzt um  $\pi_0'$  den Bogen vom Zentriwinkel  $\alpha_1$  zu schlagen. Sein Endpunkt  $P_1^*$  gibt die korrigierte Lage von  $P_1$ . Genau genommen ergibt sich jetzt auch durch  $P_1^*$  ein neuer, verbesserter Wert von  $Q_1$  aus der Formel

$$Q_1^{**} = F(\alpha_1, p_1^*, p_1'^{**})$$

sodass die Konstruktion eigentlich jetzt mit diesem neuen Wert an Stelle von  $Q_1$  zu wiederholen wäre. Wenn aber  $\alpha_1$  einigermassen klein gewählt wird, so ist die zweite Korrektur, die von  $P_1^*$  zu einem neuen Punkte  $P_1^{**}$  führen würde, so klein, dass sie schon innerhalb der Genauigkeit der Zeichnung liegt und weggelassen werden kann.

Wenn von der Differentialgleichung ein erstes Integral (5) bekannt ist, so wird das besprochene Interpolationsverfahren durch folgendes ersetzt:

Man konstruiert wie früher zunächst den Punkt  $P_1$  und entnimmt daraus den Wert von  $p_1$ , der ja durch das Interpolationsverfahren nur sehr wenig korrigiert würde. Mit diesem berechnet man jetzt aus der Relation (5) den Wert von  $p_1'$  und hat damit eine Korrektur  $g_1'^{**}$  der Geraden  $g_1'$ . Diese schneidet  $g_0'$  in einem Punkte  $\pi$ , der nachträglich als Zentrum des Näherungsbogens verwendet wird. Der Endpunkt des neuen Bogens  $P_1^*$  ergibt die korrigierte Lage von  $P_1$ .

#### Bemerkungen zur Ausführung der graph. Integration.

Die Anwendung der graphischen Methode kann noch wesentlich vereinfacht werden, wenn man eine Reihe von Dingen beobachtet.

Zunächst ist es am Platze, für die beiden veränderlichen  $u$  und  $p$  dimensionslose Zahlen einzuführen, indem man das Verhältnis der ursprünglichen Veränderlichen zu Standardgrössen bildet, die durch das Problem selbst gegeben sind. Ferner wird man jedesmal zu überlegen haben, ob es gelingt, der Differentialgleichung eine für die Integration einfachere Form zu geben. Man hat dabei insbesondere zwei Möglichkeiten zur Verfügung, von denen man häufig Gebrauch machen wird:

Einmal kann man von der zu suchenden Funktion einen Faktor abspalten, sodass für den verbleibenden Rest eine neue einfachere Gleichung resultiert. Wenn die Differentialgleichung z. B. linear ist, so kann man auf

diese Weise etwa das Glied mit  $p'$  entfernen; oder man kann den Koeffizienten der Gleichung eine Form erteilen, die der Konstruktion zugänglicher ist.

Als zweites kann man auch für die unabhängige Veränderliche selbst eine neue Funktion substituieren.

Beispiel: Die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\lambda \frac{dy}{dt} + a^2 [1 - q \cos(\omega t)] = 0$$

geht durch die Substitution  $y = e^{-\lambda t} p$  über in

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + p [a^2 - \lambda^2 - a^2 q \cos(\omega t)]$$

und durch Einführung von  $u = \sqrt{a^2 - \lambda^2} t$  als neuer Veränderlicher in

$$\frac{d^2 p}{du^2} + p \left[ 1 - \frac{a^2}{a^2 - \lambda^2} q \cos\left(\frac{\omega}{\sqrt{a^2 - \lambda^2}} u\right) \right] = 0$$

was für die Konstruktion wesentlich einfacher ist, da ja jetzt

$$q = -A p \cos(\kappa t)$$

wobei

$$\left( A = \frac{a^2}{a^2 - \lambda^2} q; \quad \kappa = \frac{\omega}{\sqrt{a^2 - \lambda^2}} \right)$$

Man wird weiter zu entscheiden haben, welcher Längenmasstab in der Zeichnung für  $p$  zu wählen ist. Im allgemeinen ist ein grosser Masstab im Interesse der Genauigkeit; jedoch ist durch die Art der Zeichenmittel natürlich hierfür eine obere Schranke gegeben. Alsdann hat man die Grösse der Intervalle  $\alpha_i$  zu wählen. Man wird sich dabei vorbehalten, im Laufe der Konstruktion die  $\alpha_i$  zu verkleinern, wenn die Ungenauigkeit zu gross wird, zu vergrössern im Interesse der Kürze des Verfahrens, wenn es die Genauigkeit erlaubt. Als Mass dafür wird man die Grösse der Korrektur ansehen dürfen, die das Interpolationsverfahren liefert.

Das Verkleinern der Intervalle ist nur oberhalb einer gewissen Grenze zweckmässig; denn mit zu kleinen Winkeln zu operieren wird wegen der Zeichenfehler ungenau und ist auch sehr mühsam. In den ausgeführten Beispielen ist nie unter  $5^\circ$  hinabgegangen worden; der grösste verwendete Wert von  $\alpha$  ist  $15^\circ$ . Wenn die mit  $\alpha = 5^\circ$  erzielte Genauigkeit nicht genügt, so transformiert man zweckmässig die zu integrierende Differentialgleichung  $p'' = f(u, p, p')$ , indem man statt  $u$  die neue veränderliche  $v = k u$  einführt. Hier bedeutet  $k$  eine genügend grosse,



Schloss Kyburg nach Bleistiftskizze von † Kantonsbaumeister Hermann Fietz aus dem Jahre 1918.

zweckmässigerweise ganze Zahl  $p(u)$  geht über in eine Funktion  $q(v)$ , für die die Differentialgleichung gilt

$$q'' = \frac{1}{k^2} f\left(\frac{v}{k}, q, kq'\right)$$

Schwankt  $u$  in einem bestimmten Intervall, so schwankt  $v$  in einem Intervall von  $k$ -facher Grösse, und einer Winkeldifferenz  $\alpha$  von  $u$  entspricht eine solche  $k\alpha$  von  $v$ .

Der Erwähnung wert ist auch noch der Fall, wo während der Konstruktion der Krümmungsradius  $\rho$  durch Null geht. Die Kurve  $C$  hat an jener Stelle im allgemeinen eine Spitze. Allerdings kann dies stets vermieden werden, indem man statt  $p(u)$  die Funktion  $q(u) = p(u) + a$  einführt, wo  $a$  genügend gross gewählt wird. Denn das Linienbild von  $q$  hat einen Krümmungsradius  $q + q'' = p + p'' + a = \rho + a$ , der bei passender Wahl von  $a$  in einem gegebenen Intervall von  $u$  nicht Null wird. Aber selbst wenn an einer Stelle  $P_u$  der Krümmungsradius durch Null geht, versagt die Konstruktion keineswegs. Die Spitze der Kurve  $C$  ist dann in unmittelbarer Nähe

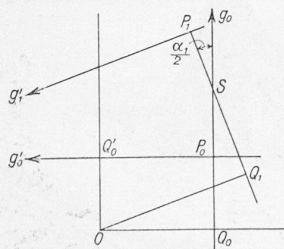


Abb. 10

von  $P_u$  mit einer Kreisevolvente identisch; und zwar ist der zugehörige Kreis der Krümmungskreis der Evolute  $C'$  von  $C$  an jener Stelle, also ein Kreis vom Radius  $\rho' = \rho' + \rho''$ .

Wenn auch der Radius dieses Kreises wieder Null ist, dann hat man zu höhern Evoluten überzugehen. Ein Beispiel dieser Art gibt die in Abschnitt 12 und in Abbildung 32 behandelte Differentialgleichung.

Eine Abänderung der Konstruktion ist auch erforderlich, wenn die Zentra der Kreisbogen  $P_0P_1, P_1P_2$  usw. ausserhalb des Zeichnungsblattes fallen. Ist z. B.  $\rho_0$  der Bogenradius von  $P_0P_1, \alpha_1$  der Zentriwinkel, so trägt man etwa (Abb. 10) von  $P_0$  aus auf der Tangente  $g_0$  nach  $S$

die Strecke  $P_0S = \rho_0 \operatorname{tg} \alpha_1/2$  auf, und von  $S$  aus die selbe Strecke unter dem Winkel  $\alpha_1/2$ ; ihr Endpunkt ist dann der zweite Endpunkt  $P_1$  des Bogens  $P_0P_1$ .

Wenn endlich an einer Stelle die Lösung eine wesentliche Singularität hat, sodass dort etwa  $p$  oder die Ableitungen von  $p$  unendlich werden, so wird man für diese eine Stelle das graphische Verfahren durch eine analytische Untersuchung ergänzen müssen, in welcher der Charakter der Singularität und das Verhalten der Lösung festgestellt wird. (Forts. folgt.)

### Zu den Zeichnungen von Kantonsbaumeister Hermann Fietz †.

Die Wirksamkeit des anfangs dieses Jahres verstorbenen Zürcher Kantonsbaumeisters Dr. h. c. Hermann Fietz ist bereits früher in dieser Zeitschrift gewürdigt worden. Dank dem Entgegenkommen seiner Erben sind wir heute in der Lage, einige seiner Skizzen in originalgetreuen Reproduktionen hinzuzufügen. Die beiden ersten, die Kyburg von der Südost-Seite, zeigen den Entwicklungsgang einer 30-jährigen Zeichentätigkeit, von der zierlichen, etwas zaghaften Fassung von 1886 zur straffen, malerischen Haltung von 1918. Die übrigen Blätter sind aus dem reichen Schatz des an die 1000 Blätter enthaltenden Nachlasses des Verstorbenen ausgewählt und legen Zeugnis ab für sein Bemühen, treu und ehrlich, in liebevoller Nachempfindung das Objekt selbst sprechen zu lassen, ohne sich durch eine gewollte oder gar gespreizte Stilisierung selbst in den Vordergrund zu drängen. Es sind Ferienfrüchte, Erholungsarbeiten eines Mannes, dem nur selten die Muse vergönnt war, mit dem Stift in der Hand seine Umwelt zu schildern. Und etwas wie Feiertagstimmung liegt auch über den sicher hingsetzten Skizzen, die als freundliches Andenken an ihren Schöpfer in dieser Weihnachtsnummer der „S. B. Z.“ Aufnahme gefunden haben.

Dr. R. B.