

Objektyp: **TableOfContent**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **99/100 (1932)**

Heft 13

PDF erstellt am: **08.08.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*  
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

<http://www.e-periodica.ch>

INHALT: Einige geometrische und kinematische Anwendungen der Stützfunktion. — Eigenheim des Architekten Prof. O. R. Salvisberg, Zürich. — Mitteilungen: Die Personen-Seilschwebbahn Chamonix-Brévent. Die bauliche Entwicklung der Stadt Paris. Kreiselwipper für 200 t/h. „Budd-Micheline“. Die Kohle- und

Koks-Transportanlagen in der neuen Gaskokerei Basel. Internationale Kongresse für Neues Bauen. Der im Fluge verstellbare Propeller. — Wettbewerbe: Schulhausanlage an der Tannenrauchstrasse in Zürich-Wollishofen. — Literatur: Tragwerk und Raumabschluss. — Sitzungs- und Vortrags-Kalender.

Band 99

Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.

Nr. 13

Einige geometrische und kinematische Anwendungen der Stützfunktion.

Von Prof. Dr. E. MEISSNER, E. T. H., Zürich.

Anschliessend an die Artikelserie über graphische Analysis<sup>1)</sup> sollen noch einige Untersuchungen angedeutet werden, in denen mit Vorteil von der Stützfunktion einer Kurve Gebrauch gemacht wird. Der Kürze wegen beschränken wir uns auf konvexe, einfach geschlossene Kurven, sog. *Ovale*. Der Krümmungsradius  $\rho$  ist dann eine periodische nicht negative Funktion von  $u$  mit der Periode  $2\pi$ . Er braucht nicht stetig zu sein, vielmehr wollen wir nur annehmen, dass er sich in eine Fourier-Reihe entwickeln lässt, die wir in der Form

$$\rho(u) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(ku) + b_k \sin(ku)]$$

annehmen. Ist  $s$  wieder die Bogenlänge auf  $C$  und sind  $x, y$  die rechtwinkligen Koordinaten des Berührungspunktes  $P$  der Tangente  $g(u)$ , so gelten die Formeln von Seite 42  $ds = \rho(u) du$   $dx = -\rho(u) \sin(u)$   $dy = \rho(u) \cos(u)$  Da  $C$  eine einfach geschlossene Kurve ist, so ist ferner

$$\int_c dx = -\int_0^{2\pi} \rho(u) \sin(u) du = 0 \quad \int_c dy = \int_0^{2\pi} \rho(u) \cos(u) du = 0$$

$$\int_c ds = \int_0^{2\pi} \rho(u) du = L$$

unter  $L$  die Gesamtlänge des Ovals verstanden. Dies gibt für die Fourierreihe

$$b_1 = 0 \quad a_1 = 0 \quad a_0 \pi = L$$

Multipliziert man die Reihe andererseits mit  $\cos(u)$  und  $\sin(u)$  und integriert, so ergeben sich die Formeln

$$x = \xi + \sum_{k=1}^{\infty} \left( -\frac{a_{k+1} - a_{k-1}}{2k} \cos(ku) - \frac{b_{k+1} - b_{k-1}}{2k} \sin(ku) \right)$$

$$y = \eta + \sum_{k=1}^{\infty} \left( -\frac{b_{k+1} + b_{k-1}}{2k} \cos(ku) + \frac{a_{k+1} + a_{k-1}}{2k} \sin(ku) \right)$$

Für die hier auftretenden Integrationskonstanten  $\xi, \eta$  ergibt sich durch Integrieren über das Intervall 0 bis  $2\pi$ :

$$\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x \left( \frac{1}{\rho} \right) ds$$

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y \left( \frac{1}{\rho} \right) ds$$

Somit sind  $\xi, \eta$  die Koordinaten des Schwerpunktes der Kurve  $C$ , wenn man sie sich mit Masse belegt denkt, die an jeder Stelle der Kurvenkrümmung  $1/\rho$  proportional ist; in allfälligen Ecken sind endlich grosse Massen proportional dem Eckenwinkel anzunehmen. Dieser von J. Steiner erstmals eingeführte Punkt heisst der *Krümmungsschwerpunkt*  $S^*$  der Kurve  $C$ . Wenn man nun noch die Beziehungen

$$p = x \cos(u) + y \sin(u) \quad p' = -x \sin(u) + y \cos(u)$$

mit den erhaltenen Reihen für  $x$  und  $y$  kombiniert, so kommt für die Stützfunktion nach einiger Umrechnung die Reihe

$$p(u) = \frac{a_0}{2} + \xi \cos(u) + \eta \sin(u) - \sum_{k=2}^{\infty} \left( \frac{a_k}{k^2 - 1} \cos(ku) + \frac{b_k}{k^2 - 1} \sin(ku) \right)$$

und für ihre Ableitung

$$p'(u) = -\xi \sin(u) + \eta \cos(u) - \sum_{k=2}^{\infty} \left( \frac{k b_k}{k^2 - 1} \cos(ku) - \frac{k a_k}{k^2 - 1} \sin(ku) \right)$$

Ist  $ds$  die Länge eines in  $P$  liegenden Linienelementes  $PP^*$  von  $C$  (Abb. 43), so ist  $\frac{1}{2} p ds = \frac{1}{2} p \rho du$  der Flächeninhalt des Elementardreiecks  $OPP^*$  und somit ist der Flächeninhalt  $J$  des Ovals gegeben durch

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho(u) p(u) du$$

was in der Fourierreentwicklung ausgedrückt ergibt

$$J = \frac{a_0^2 \pi}{4} - \frac{\pi}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{k^2 - 1}$$

*A. Hurwitz*<sup>2)</sup>, von dem im wesentlichen diese letzten Formeln stammen, hat daran anknüpfend den Beweis für das sog. isoperimetrische Problem erbracht. In der Tat zeigt der Ausdruck für  $J$ , das unter allen hier betrachteten Ovalen von der selben Bogenlänge, also dem selben  $a_0$  dasjenige den grössten Flächeninhalt besitzt, für das alle übrigen Fourierkoeffizienten verschwinden, d. h. der Kreis vom Durchmesser  $a_0$ .

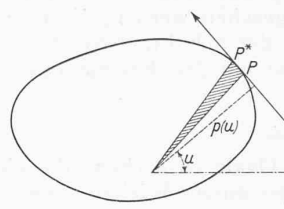


Abb. 43

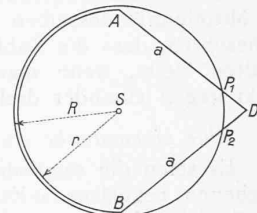


Abb. 44

Aus dem Ausdruck für  $p(u)$  kann eine merkwürdige Folgerung gezogen werden. Man denke sich zwei Ovale  $O_1$  und  $O_2$  mit den Stützfunktionen  $p_1$  und  $p_2$ . Wenn sie gleichen Umfang  $L$  haben, so ist der Fourierkoeffizient  $a_0$  in den Reihenentwicklungen von  $p_1$  und  $p_2$  der selbe. Man vereinige die Ovale nun irgendwie, aber so, dass ihre Krümmungsschwerpunkte  $S_1^*$  und  $S_2^*$  zusammenfallen. Alsdann stimmen auch noch die Fourierkoeffizienten von  $\cos(u)$  und von  $\sin(u)$  in beiden Reihenentwicklungen überein. Die Funktion  $p(u) = p_1(u) - p_2(u)$  hat daher eine Fourierreentwicklung, deren niedrigste Glieder jene von  $\cos(2u)$  und  $\sin(2u)$  sind. Wendet man hierauf einen ebenfalls auf *Hurwitz*<sup>2)</sup> zurückgehenden Satz an, dass eine solche Funktion, wenn sie stetig ist, im Intervall von 0 bis  $2\pi$  mindestens 4 mal gleich null wird, so folgt, dass die beiden so zusammengelegten Ovale wenigstens vier gemeinsame Tangenten haben, und hieraus wieder folgt, dass sie sich in wenigstens vier Punkten schneiden. Es gilt sonach der Satz: *Haben zwei Ovale gleicher Länge die Krümmungsschwerpunkte gemein, so schneiden sie sich in wenigstens vier Punkten.*

Der Inhalt dieses Satzes wird besonders hervorgehoben, wenn man feststellt, dass er nicht mehr wahr ist, wenn man an Stelle des Krümmungsschwerpunktes  $S^*$  den gewöhnlichen Schwerpunkt  $S$  setzt. Dies zeigt folgendes Beispiel: Eine Kurve  $C_1$  (Abb. 44) bestehe aus einem Halbkreis vom Radius  $r$  und Zentrum  $S$  und zwei gleichlangen Strecken  $AD, BD$  von der Länge  $a$ . Man wähle  $a$  so, dass der Schwerpunkt von  $C_1$  nach  $S$  fällt.

$$\left( a = \frac{r}{2} \sqrt{2 + 2\sqrt{17}} \right)$$

<sup>1)</sup> Vergl. Band 98, S. 287 ff.; Band 99, S. 27 ff. Auch als Sonderabdruck erhältlich. Red.

<sup>2)</sup> *A. Hurwitz*: Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier. Ann. de l'Ecole normale T. XIX (1902) page 371 ff.