Band 102

Nr. 19

Berechnung mehrstöckiger kontinuierlicher Rahmen durch die Methode der algebraischen Momentenverteilung.

Von Ing. M. F. FORNEROD, Zürich.

1. Einleitung. Diese Arbeit erklärt eine Methode, die sich bei der Berechnung von statisch vielfach unbestimmten Systemen als nützlich und äusserst zeitsparend erwiesen hat. Die Methode stammt von Prof. *Hardy Cross* von der Universität Illinois, U. S. A.

Die Hauptidee war, eine Methode zur Untersuchung komplizierter sowie einfacher statisch unbestimmter Systeme zu finden, die das Aufschreiben von analytischen Beziehungen und Lösen von Gleichungen unnötig macht. Einfache arithmetische Operationen führen zum Ziel. Ein Hauptvorteil der Methode ist ferner, dass sie eine Methode der sukzessiven Annäherung ist, d. h. man kann den Prozess der Momentenverteilung frühzeitig abbrechen, wenn man durch grobe Annäherung Einsicht in die Grössenordnung der Momente erhalten hat, und kann alsdann allfällige Aenderungen am Projekt vornehmen, ohne viel Zeit für eine genaue Lösung vergeudet zu haben. Ebenso kann umgekehrt der Prozess bis zur beliebig erwünschten Genauigkeit fortgesetzt werden. Die Konvergenz der Resultate ist meistens sehr stark (vgl. Abschnitt 9).

2. Voraussetzungen.

Wird ein ein- oder mehrstöckiger kontinuierlicher Rahmen belastet, so bewegen sich seine Knotenpunkte; diese Bewegungen bestehen aus einer Rotation und einer Translation. Ist das Tragwerk nicht zum vornherein gegen seitliche Verschiebung festgehalten, so ist diese seitliche Bewegung nur bei horizontaler oder stark unsymmetrischer Belastung, sowie bei stark unsymmetrischen Rahmen von einer Grössenordnung, die berücksichtigt zu werden verdient. In den weitaus meisten Fällen kann von der Berücksichtigung der Translation abgesehen werden. Wir wollen im folgenden in erster Linie die Momente infolge der Rotation der Knotenpunkte ermitteln, d. h. voraussetzen, dass sich die Knotenpunkte während der Momentenverteilung nicht translatorisch bewegen. Die Momente infolge translatorischer Bewegung, sei es infolge äusserer, horizontaler Kräfte, sei es infolge einer gedachten Festhaltekraft, lassen sich mit der Momentenverteilungs-Methode leicht berechnen, doch soll dies einem besonderen Abschnitte vorbehalten bleiben. Der Einfluss der Normal- und Querkräfte auf die Bewegung der Knotenpunkte kann im folgenden füglich vernachlässigt werden, er kann aber, wenn nötig, nach Abschnitt 13 berücksichtigt werden.

3. Definitionen.

1) Die „Einspannmomente M" eines Stabes sind die Momente an den Enden des Stabes, wenn diese Enden fest eingespannt wären.

2) Die „Steifigkeit" s ist das Moment am Ende eines Stabes (auf starren Stützen), das nötig ist, um an diesem Ende eine Dehnung 1 hervorzurufen, wenn das andere Ende fest eingespannt ist.

3) Wenn ein Ende eines Stabes (auf starren Stützen) gedreht wird, während das andere Ende fest eingespannt ist, nennen wir das Verhältnis des Momentes am eingespannten Ende zum Drehmoment den „Fortpflanzungs-Faktor" λ.

4. Knotenpunkt-Rotation.

Gewöhnlich werden die an einem Knotenpunkt zusammenkommenden Stäbe herausgeschnitten; nachher wird im Knotenpunkt die Kontinuität durch Einführung verschiedener Kräfte wieder hergestellt. Wir wollen nun umgekehrt die Stäbe nicht vom Knotenpunkt trennen, aber am Knotenpunkt ein „Festhaltemoment" einführen, das seine Rotation verhindert. Anstatt nun wie bei den üblichen analytischen Methoden die eingeführten Kräfte als Unbekannte in einem System von simultanen Gleichungen aufzuschreiben, wollen wir die eingeführten Festhaltemomente durch Verteilen und Fortpflanzen miteinander ins Gleichgewicht bringen. Jedem Schritt in diesem Vorgehen entspricht eine bestimmte physikalische Veränderung am untersuchten Rahmensystem, die man sich leicht vorstellen kann, während bei der Lösung von Gleichungen das Tragwerk selbst ganz vergessen wird und viele unwichtige Einflüsse unter dem Namen eines τ oder δ mitgeschleppt werden.

Wir wollen uns nun sämtliche Knotenpunkte am Tragwerk gegen Rotation festgehalten denken (z. B. durch Anziehen einer Schraube). An einem solchen festgehaltenen Knotenpunkt besteht nun in jedem belasteten Stab das vorher definierte „Einspannmoment". Die algebraische Summe dieser Einspannmomente ist nicht gleich Null, sondern gleich einem Moment, das wir benötigen, um den Knotenpunkt festzuhalten. Wir nennen es „unverteiltes Moment". Wenn wir nun einen Knotenpunkt loslassen (die Schraube lösen), während die andern festgehalten bleiben, so dreht sich dieser in die Gleichgewichtslage, in der die Summe aller Momente am Knotenpunkt gleich Null ist. Die Momente in den anstossenden Stabenden ändern sich. Die Summe dieser durch das „Loslassen" verursachten Aenderungen, „Verteilmomente" genannt, muss gleich dem unverteilten Moment sein. Das „unverteilte Moment" wurde also durch das „Loslassen" in einer gewissen Proportion auf die einzelnen Stäbe *verteilt*. Da alle Stabenden gleich grosse Drehungen erfahren, ist leicht einzusehen, dass sich nach obiger Definition der „Steifigkeit" *das unverteilte Moment auf die einzelnen Stäbe proportional ihrer Steifigkeit verteilt.*

Die Drehung des losgelassenen Knotenpunktes verursacht auch Momente in den andern noch fest eingespannten Enden der anstossenden Stäbe. Diese sind gleich den Verteilmomenten multipliziert mit dem oben definierten Fortpflanzungsfaktor am gedrehten Ende des Stabes.

5. Momentenverteilung. Die Methode ist folgende:

a) Alle Knotenpunkte werden gegen Rotation festgehalten gedacht und die Momente an den Enden der Stäbe für diesen Zustand werden berechnet (Einspannmomente) und angeschrieben;

b) In einem Knotenpunkt beginnend wird das unverteilte Moment (= algebraische Summe der Einspannmomente) proportional der Steifigkeit s der Stäbe verteilt;

c) Man multipliziert das auf einen Stab entfallende Verteilmoment mit dem Fortpflanzungsfaktor dieses Stabendes und schreibt das Resultat am andern Ende des Stabes an;

d) Die Operationen unter b) und c) werden nacheinander an allen Knotenpunkten vorgenommen, wobei man vorteilhaft zuerst die Knotenpunkte mit dem grössten unverteilten Moment berücksichtigt.

e) Dieses Vorgehen b) bis d) wird fortgesetzt und wiederholt, bis die fortzupflanzenden Momente klein genug sind, um vernachlässigt werden zu dürfen;

f) Alle Momente — Einspannmomente, Verteilmomente, fortgepflanzte Momente — werden an jedem Stabende addiert, um das wahre Moment zu erhalten.

Auf diese Art werden sukzessive alle Knotenpunkte von ihrem Zwangsmoment befreit, bis das ganze Tragwerk in den Ruhezustand des Gleichgewichtes übergeführt ist: alle Knotenpunkte sind „equilibriert".