Band 107 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 11

Der Dreimomentensatz der durchlaufenden kreissymmetrischen Platte.

Von Dr. Ing. H. MARCUS, Paris.

Die zur Abdeckung von kreisförmigen Behältern dienenden Platten mit mehrfacher Stützung werden meistens als durchlaufende Balken berechnet. Dieses einfache Näherungsverfahren kann allenfalls für eine Abschätzung der radialen Biegungsspannungen ausreichen, gibt aber überhaupt keinen Aufschluss über die tangentialen Beanspruchungen. Eine genaue und trotzdem nicht umständliche Behandlung der durchlaufenden Platte mit mehreren Stützkreisen ist auf Grund der Elastizitätstheorie mit Hilfe eines dem *Clapeyron'schen Theorem* ähnlichen *Dreimomentensatzes* möglich. Eine kurze Darstellung der Ableitung und Anwendung dieses Satzes ist der Zweck der vorliegenden Arbeit.

*

Die Gleichung der elastischen Fläche einer Platte mit kreissymmetrischer Gestalt und kreissymmetrischer Belastung lautet bekanntlich:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2\zeta}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\zeta}{dr}\right)=\frac{m^2-1}{m^2}\frac{p}{\frac{E\,h^3}{12}}=\frac{p}{N} \quad . \quad (1)$$

Hierin bedeuten:

r den Abstand eines Punktes der Mittelfläche vom Mittelpunkt der Platte,
p seine zur Plattenoberfläche senkrechte Belastung,
ζ seine Durchbiegung,
h die Stärke der Platte,
E die Elastizitätszahl des Baustoffes,
m die Poisson'sche Querdehnungszahl,
$N=\frac{m^2}{m^2-1}\frac{E\,h^3}{12}$ die Plattensteifigkeit.

Ich behandle zunächst den mit p gleichförmig belasteten, am Innenrande $r=r_i$ sowie am Aussenrande $r=r_a$ gestützten Kreisring (Abb. 1) und wähle als partikuläre Lösung der vorstehenden Differentialgleichung den Ansatz

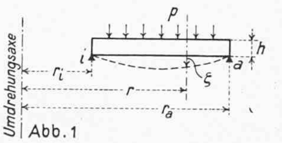

Abb. 1

$$\zeta_1=\frac{p}{64\,N}\,(r^2-r_i^2)\,(r^2-r_a^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Er erfüllt von vornherein die Bedingung $\zeta_1=0$ für $r=r_i$ und $r=r_a$.

Die radialen Spannungsmomente

$$s_r=-N\left(\frac{d^2\zeta_1}{dr^2}+\frac{1}{m}\frac{1}{r}\frac{d\zeta_1}{dr}\right)=$$
$$=\frac{p}{32}\left[\frac{m+1}{m}(r_a^2+r_i^2)-2\,r^2\,\frac{3\,m+1}{m}\right] \quad (3)$$

verschwinden jedoch weder am Rande $r=r_i$ noch am Rande $r=r_a$.

Sollen die Ränder frei von Normalspannungen sein, so müssen an den Rändern Kräfte und Kräftepaare, die diesen Spannungsmomenten entgegenwirken, angebracht werden. Um den Einfluss der Randbelastung zu beschreiben, benutze ich einen Ansatz in der Form

$$\zeta_2=\frac{C_i}{N}\left[K_1\,\varphi\,(r)+K_2\,\psi\,(r)\right] \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Die Funktionen

$$\left.\begin{aligned}\varphi\,(r)&=(r^2-r_i^2)\,\ln\frac{r_a}{r}\,,\\ \psi\,(r)&=(r^2-r_a^2)\ln\frac{r_i}{r}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

stellen Lösungen der homogenen Differentialgleichung

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2\zeta}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\zeta}{dr}\right)=0$$

dar. K_1 und K_2 sind vorerst unbestimmte Beizahlen, während C_i eine Integrationskonstante bedeutet. Es ist leicht zu erkennen, dass $\varphi\,(r_i)=\varphi\,(r_a)=0$ und ebenso $\psi\,(r_i)=\psi\,(r_a)=0$ ist, dass also auch ζ_2 an den Stellen $r=r_i$ und $r=r_a$ verschwindet.

Am Rande $r=r_i$ ist ferner

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right)_{r=r_i}&=\varphi_i'=2\ln\frac{r_a}{r_i}\\ \left(\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}\right)_{r=r_i}&=\psi_i'=\left(\frac{r_a}{r_i}\right)^2-1\\ \left(\frac{d^2\varphi}{dr^2}\right)_{r=r_i}&=\varphi_i''=2\ln\frac{r_a}{r_i}-4\\ \left(\frac{d^2\psi}{dr^2}\right)_{r=r_i}&=\psi_i''=-\left(3+\frac{r_a^2}{r_i^2}\right)\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Ebenso ergibt sich für $r=r_a$:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}&=\varphi_a'=\left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2-1\\ \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}&=\psi_a'=2\ln\frac{r_i}{r_a}\\ \frac{d^2\varphi}{dr^2}&=\varphi_a''=-\left(3+\frac{r_i^2}{r_a^2}\right)\\ \frac{d^2\psi}{dr^2}&=\psi_a''=2\ln\frac{r_i}{r_a}-4\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (6a)$$

Die entsprechenden radialen Spannungsmomente sind für $r=r_i$

$$s_i=-N\left(\frac{d^2\zeta_2}{dr^2}+\frac{1}{m}\frac{1}{r}\frac{d\zeta_2}{dr}\right)_{r=r_i}=$$
$$-C_i\left[K_1\left(\varphi_i''+\frac{1}{m}\varphi_i'\right)+K_2\left(\psi_i''+\frac{1}{m}\psi_i'\right)\right],$$

für $r=r_a$

$$s_a=-N\left(\frac{d^2\zeta_2}{dr^2}+\frac{1}{m}\frac{1}{r}\frac{d\zeta_2}{dr}\right)_{r=r_a}=$$
$$-C_i\left[K_1\left(\varphi_a''+\frac{1}{m}\varphi_a'\right)+K_2\left(\psi_a''+\frac{1}{m}\psi_a'\right)\right].$$

Ich verlange nunmehr, dass am Rande $r=r_a$ s_a verschwindet, am Rande $r=r_i$ hingegen $s_i=C_i$ sein soll und setze daher:

$$K_1\left(\varphi_a''+\frac{1}{m}\varphi_a'\right)+K_2\left(\psi_a''+\frac{1}{m}\psi_a'\right)=0$$
$$K_1\left(\varphi_i''+\frac{1}{m}\varphi_i'\right)+K_2\left(\psi_i''+\frac{1}{m}\psi_i'\right)=-1.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich K_1 und K_2 bestimmen. Für den Sonderfall $m=\infty$ erhält man die einfachen Formeln

$$K_1=\frac{\psi_a''}{\varphi_a''\,\psi_i''-\varphi_i''\,\psi_a''}\,,\quad K_2=\frac{-\varphi_a''}{\varphi_a''\,\psi_i''-\varphi_i''\,\psi_a''} \quad . \quad (7)$$

In gleicher Weise bilde ich jetzt den Ansatz

$$\zeta_3=\frac{C_a}{N}\left[\lambda_1\,\varphi\,(r)+\lambda_2\,\psi\,(r)\right], \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

ermittle die zugehörigen Spannungsmomente

$$s_i=-C_a\left[\lambda_1\left(\varphi_i''+\frac{1}{m}\varphi_i'\right)+\lambda_2\left(\psi_i''+\frac{1}{m}\psi_i'\right)\right],$$
$$s_a=-C_a\left[\lambda_1\left(\varphi_a''+\frac{1}{m}\varphi_a'\right)+\lambda_2\left(\psi_a''+\frac{1}{m}\psi_a'\right)\right],$$

stelle die Bedingungen $s_i=0$, $s_a=C_a$ und finde für $m=\infty$ die Werte

$$\lambda_1=-\frac{\psi_i''}{\varphi_a''\,\psi_i''-\varphi_i''\,\psi_a''}\,,\quad \lambda_2=\frac{\varphi_i''}{\varphi_a''\,\psi_i''-\varphi_i''\,\psi_a''}\,. \quad (9)$$

Ich wähle schliesslich für den freiaufliegenden Ring die allgemeine Lösung

$$\zeta_0=\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$