Band 107 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 7

Zur Berechnung der Fliehkraftarbeit beim Problem der Scheibenschwingungen.

Von Dr. I. MALKIN, Ing., Westinghouse Electric & Manufacturing Company, Philadelphia, Pa.

1. *Einleitung.* Bei der Berechnung des Einflusses, den die Fliehkräfte auf die Eigenfrequenzen der Querschwingungen der rotierenden Scheibe ausüben, hat sich in der Literatur eine eigenartige Schwierigkeit ergeben, die hier geklärt werden soll. An sich sind nämlich für die Ermittlung der Fliehkraftarbeit zwei Wege denkbar; bei dem einen bilden die Fliehkräfte selbst den Ausgangspunkt, beim andern dagegen die Spannungen, die jene in der Scheibe hervorrufen. Die beiden Wege sind in der Tat auch beschritten worden. Es hat sich aber gezeigt, und wir werden es auch gleich sehen, dass man dabei zu verschiedenen Ergebnissen gelangt. Eine befriedigende Erklärung dieses Widerspruches wurde bis jetzt wohl nicht gegeben.

Andererseits werden wir nachstehend auch die Genauigkeitsgrenzen beurteilen können, innerhalb derer die beiden Berechnungsarten in der Praxis als gleichwertig angesehen werden dürfen, und darauf die Wahl des für die Anwendung bequemeren Verfahrens gründen.

2. *Die Formeln für die Fliehkraftarbeit.* Bekanntlich ist die Schwingungsfrequenz unabhängig davon, ob die Knotenfigur im Raume oder aber der Scheibe gegenüber ruht. Denken wir uns eine Schwingungsform der zweiten Art etwa durch die Formel

$$w = f(r) \sin k\Theta \cos \lambda t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

gegeben, worin w die Durchbiegung eines Punktes der Mittelebene der Scheibe ist, r den Radius, Θ den von einem materiellen Scheibendurchmesser aus gerechneten Azimutwinkel und t die Zeit bedeuten, während k die Anzahl der Knotendurchmesser, λ die Schwingungsfrequenz und $f(r)$ die Durchbiegungsform der Winkelhalbierenden zwischen zwei benachbarten Knotenradien sind, so lässt sich die Fliehkraftarbeit von den Spannungskomponenten ausgehend wie folgt berechnen. Ein Element $r dr d\Theta$ der deformierten Mittelfläche weist gegen die undeformierte Lage des Radius r und die zugehörige Kreistangente Neigungswinkel auf, deren Cosinus entsprechend gleich sind

$$1 - {}^1\!/_2 \left(\frac{\delta w}{\delta r}\right)^2, \qquad 1 - {}^1\!/_2 \left(\frac{\delta w}{r\,\delta \Theta}\right)^2.$$

Bezeichnet man mit σ_r und σ_t die Radial- bezw. Tangential-Komponente der durch die Fliehkräfte hervorgerufenen Spannung, so ist die Arbeit der Fliehkräfte, vom Zeitfaktor $\cos \lambda t$ abgesehen, gleich

$$V_{f1} = \int_{r_0}^{a}\int_{0}^{2\pi}\left[\left(\frac{\delta w}{\delta r}\right)^2 \sigma_r + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\delta w}{\delta \Theta}\right)^2 \sigma_t\right] z r dr d\Theta = \underset{(\cos^2 \lambda t \,=\, 1)}{}$$

$$\pi \int_{r_0}^{a}\left[\left(\frac{df}{dr}\right)^2 \sigma_r + k^2 \left(\frac{f}{r}\right)^2 \sigma_t\right] z r dr \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wenn man mit $2z$ die Scheibendicke, mit $2a$ und $2r_0$ den äusseren bezw. den inneren Scheibendurchmesser bezeichnet.

Rechnet man aber mit den Fliehkräften selbst statt mit den Spannungen, so kommt man in ganz analoger Weise zum Ergebnis [1])

$$V_{f2} = 2\pi \varrho \omega^2 \int_{r_0}^{a} z r^2 \xi \, dr \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

worin ϱ die Massendichte ist, ω die Winkelgeschwindigkeit bedeutet und

$$\xi = {}^1\!/_2 \int_{r_0}^{r}\left(\frac{df}{dr}\right)^2 dr$$

Dass die Arbeitsbeträge (1) und (2) einander nicht gleich sind, geht aus 4. hervor. Der Grund für die Ungleichheit ist folgender:

3. *Grund für die Ungleichheit der Beträge (1) und (2).* Der natürliche Weg zur Berechnung der Fliehkraftenergie ist derjenige, bei dem von den Spannungskomponenten ausgegangen wird, von den Wirkungen also, die die betreffende äussere Kraft in der Scheibe selbst auslöst, denn es handelt sich ja doch schliesslich um eine Energie, die in der Scheibe ihren Sitz hat. Wenn man diese Energie auf dem Umwege über die äussere Kraft berechnen will, so muss man sich auf ein Gesetz berufen können, das diese Zurückführung vermittelt. Wir wissen, dass die Fliehkräfte einerseits und die Spannungskomponenten σ_r und σ_t anderseits unabhängig von der Schwingungsbewegung miteinander ein Gleichgewichtssystem bilden. Daher leisten die Fliehkräfte einerseits und die Spannungskomponenten anderseits gleiche Arbeit bei jeder *virtuellen* Verrückung des von ihnen gebildeten Gleichgewichtssystems. Dass die Arbeiten (1) und (2) einander nicht gleich sind, liegt eben daran, dass die in Frage stehenden speziellen Verschiebungen nicht zu den virtuellen Verrückungen des Systems gehören. Die Gleichgewichtsbeziehungen zwischen den Fliehkräften und den Spannungskomponenten der rotierenden Scheibe werden ja für die *Scheibenebene* aufgestellt, folglich sind die virtuellen Verrückungen des betrachteten Systems auf diese Ebene beschränkt. Verrückungen quer dazu kommen hier gar nicht in Frage. Auf diesem Wege kommen wir zum Schluss, dass das Prinzip der virtuellen Arbeiten im betrachteten Falle nicht herangezogen werden kann und die Arbeitsbeträge (1) und (2) einander nicht gleich zu sein brauchen.

4. *Vergleich der Arbeitsbeträge (1) und (2) miteinander.* Für das Folgende ist es von praktischem Interesse, die Arbeitsbeträge (1) und (2) miteinander zu vergleichen. Auf Grund der bekannten Gleichgewichtsbeziehung

$$\frac{d}{dr}(r z \sigma_r) - z\sigma_t + \varrho \omega^2 r^2 z = 0$$

ist der Arbeitsbetrag (2) gleich

$$V_{f2} = -2\pi r z \sigma_r \xi \Big|_{r_0}^{a} + 2\pi \int_{r_0}^{a} r z \sigma_r \frac{d\xi}{dr} dr + 2\pi \int_{r_0}^{a} z \sigma_t \xi dr$$

Hierin ist der erste Summand immer klein, falls, wie wir hier annehmen wollen, $\sigma_r = 0$ an der Stelle $r = a$; denn am Innenrande $r = r_0$ sind r und ξ klein, und mit gewisser Einschränkung gilt dies bei der Betriebsgeschwindigkeit auch von σ_r; bei der Vollscheibe ist der betrachtete Betrag an der unteren Grenze genau gleich Null. Aus diesen Gründen wollen wir in der folgenden Näherungsbetrachtung mit

$$V_{f2} = \pi \int_{r_0}^{a} r z \sigma_r \left(\frac{df}{dr}\right)^2 dr + \pi \int_{r_0}^{a} z \sigma_t \left[\int_{r_0}^{r}\left(\frac{af}{dr}\right)^2 dr\right] dr$$

rechnen. Zieht man diesen Betrag vom Betrage (1) ab, so folgt

$$V_{f1} - V_{f2} = \pi \int_{r_0}^{a}\left[k^2 \left(\frac{f}{r}\right)^2 r - \int_{r_0}^{r}\left(\frac{df}{d\varrho}\right)^2 d\varrho\right] z \sigma_t dr \quad . \quad (3)$$

Um diese Differenz bequem abschätzen zu können, beziehen wir uns hier, wie auch in der Folge, auf die in der Dampfturbinenpraxis üblichen Berechnungsverfahren [2]) für die Schwingungsfrequenzen der Scheibe, wonach für $f(r)$ nach dem Vorgehen von Stodola die Funktion r^s angesetzt wird. Hierin ist s ein im Rahmen des bekannten Rayleighschen Minimalprinzips der Schwingungslehre (siehe Abschnitt 5) zu bestimmender konstanter Parameter. Mit diesem Ansatz, der durch die bekannten exakten Lösungen gerechtfertigt wird und sich bei der Berechnung von Schei-

[1]) S. hierzu *A. Stodola:* „Dampf- und Gas-Turbinen", 1922, S. 908.

[2]) Siehe *A. Stodola:* „Dampf- und Gas-Turbinen", 1922, Seite 903, sowie den Nachtrag dazu.