**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung

**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

**Band:** 111/112 (1938)

**Heft:** 14: Lehr- und Forschungsinstitute der Eidgenössischen Technischen Hochschule: Sonderheft zum 60. Geburtstag des Schulratspräsidenten Arthur Rohn

**Artikel:** Aus dem Institut für Baustatik

**Autor:** [s.n.]

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-49809

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 02.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

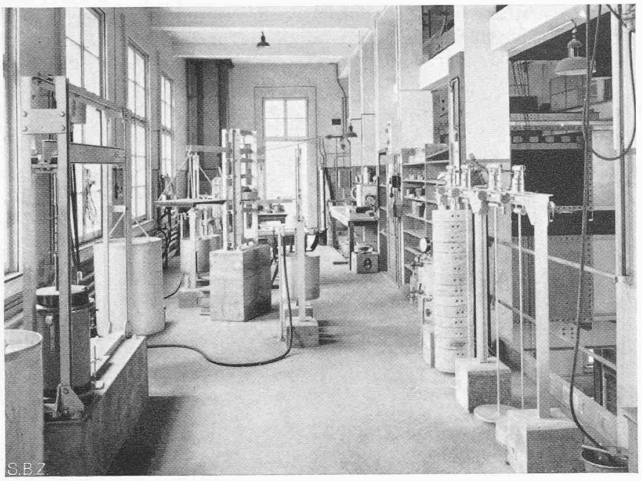


Abb. 1. Blick ins Laboratorium für Erdbauforschung

häufig auftretenden Grundbruchgefahr bei Fundationsarbeiten im Grundwasser und die Untersuchung von Erdschlipfen. Mit der stärkeren Belastung, dem Ausbau und den Verbesserungen des Strassennetzes werden auch an den Unterbau der Strassen höhere Anforderungen gestellt, aus denen der Erdbauforschung neue Aufgaben erwachsen. Die Befahrbarmachung der Alpenstrassen im Winter z. B. beraubt diese Strassen zum grossen Teil der wärmeisolierenden Schneedecke, was zu Frostschäden führt, bei deren Bekämpfung die moderne Bodenphysik gute Dienste leisten kann.

Als spezifische Aufgabe unseres schneereichen Gebirgslandes wurde in den letzten Jahren durch das Institut für Erdbauforschung an der E. T. H. auch das Studium der *Schneemechanik* in Anlehnung an die Methoden der Erdbaumechanik in Angriff genommen. Wenn auf diesem Gebiete bereits ein gewisser Fortschritt erzielt werden konnte, so ist er vor allem der sehr engen Zusammenarbeit verschiedener Spezialgebiete, vertreten durch Kristallographen, Ingenieure, Geologen und Meteorologen zu verdanken.

E. MEYER-PETER, R. HAEFELI, A. VON MOOS

---

## Aus dem Institut für Baustatik

### A. Wirtschaftliche Bemessung von Eisenbetonquerschnitten.

Die Aufgabe der wirtschaftlichen Bemessung auf Biegung beanspruchter Eisenbetonquerschnitte ist in der Literatur des Eisenbetons überaus häufig behandelt worden; erwähnt seien u. a. die Abhandlungen[1]) von *Elwitz* (1905), *Saliger* (1906), *Friedländer* (1910), *Engesser & Proksch* (1911), *Kasarnowski* (1912), *M. Mayer* (1913), *Barck* (1917), *Campus* (1924 und 1925), *Berger* (1927), *Bernhard* (1933), *Gellusseau* (1937). In den Kreisen der Praktiker fanden diese Arbeiten wenig Zustimmung; sie begegneten verschiedenen Einwänden, die *Domke* im Handbuch für Eisenbetonbau treffend dahin zusammenfasste, dass die Aufgabe «eigentlich für sich allein nicht behandelt werden dürfe». In der Schweiz lagen zur Zeit der Gültigkeit der Vorschriften vom Jahre 1909 mit ihren bescheidenen zulässigen Betonspannungen die Verhältnisse meist so, dass die statisch zulässige Randspannung im Beton auch zugleich die wirtschaftlichste war, weshalb sich eine besondere Untersuchung über die wirtschaftlichste Lösung erübrigte. Nachdem nun 1935 *neue schweizerische Normen* mit beträchtlich erhöhten zulässigen Betonspannungen in Kraft getreten sind, deren Ausnützung heute nicht mehr unbedingt zur billigsten Lösung führt, dürfte die nachstehende, kurze Behandlung des Problems für den Rechteckquerschnitt und den Plattenbalken von Interesse sein. Durch Einführung des Begriffes des «wirtschaftlichen Armierungsgehaltes» lässt sich die theoretische Lösung durch äusserst einfache Beziehungen darstellen.

Nachstehend werden die vom Verfasser in seinen «Eisenbetontabellen 1935» definierten, in der Schweiz gebräuchlichen Bezeichnungen benützt; ausserdem führen wir ein:

$k_b$ = Einheitspreis des Betons (für 1 m³),

$k_e$ = Einheitspreis des Eisens (für 1 m³),

$k_s$ = Einheitspreis der Schalung (für 1 m²),

$\varepsilon$ = ein Faktor $> 1$, der zum Ausdruck bringt, dass der wirkliche Eisenbedarf stets grösser ist, als der theoretische.

*Die Problemstellung* lautet: Gesucht wird der Armierungsgehalt $\mu_0$ des Querschnittes, bei dem unter Ausnützung der Zugspannungen in den Eisen[2]) der Träger auf die Längeneinheit den geringsten Kostenaufwand erfordert.

*1. Der Rechteckquerschnitt.*

Wir beschränken die Rechnung auf den Querschnitt mit Zugbewehrung und grosser Breite $b$, derart, dass die Seitenschalungen ohne Belang sind (Plattenquerschnitt). Die Kosten für das Balkenstück von der Länge = 1 betragen

$$k = k_b\, b\, h\, 1 + \varepsilon k_e F_e + k_s b\, 1$$
$$= k_b\, b\, h\,(1 + \lambda \mu) + k_s b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wobei $\lambda = \dfrac{\varepsilon k_e}{k_b}$ als Verhältniswert der Einheitspreise für Eisen und Beton und der Armierungsgehalt $\mu = \dfrac{F_e}{b\,h}$ eingesetzt sind.

Um das Minimum von Gl. (1) zu berechnen, wählen wir als unabhängige Veränderliche den Wert $\mu$, haben daher $h$ durch $\mu$ auszudrücken. Das Moment $M$ liefert nach bekannter Formel die Zugspannung im Eisen

$$\sigma_e = \frac{M}{F_c\, y} = \frac{1}{\mu\,\eta}\,\frac{M}{b\,h^2},$$

worin $y = \eta h$ den Hebelarm der inneren Kräfte bezeichnet. Daraus folgt

$$h = \sqrt{\frac{M}{\sigma_e\, b}}\;\frac{1}{\sqrt{\mu\,\eta}},$$

und Gl. (1) geht über in

$$k = k_b \sqrt{\frac{M\,b}{\sigma_e}}\;\frac{1 + \lambda\mu}{\sqrt{\mu\,\eta}} + k_s b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Bei konstanten Werten $M$, $b$, $\sigma_e$ ist $k$ ein Minimum für

$$\frac{d\,k}{d\,\mu} = k_b \sqrt{\frac{M\,b}{\sigma_e}}\;\frac{\lambda\sqrt{\mu\,\eta} - \dfrac{1 + \lambda\mu}{2\sqrt{\mu\,\eta}}\left(\eta + \mu\,\dfrac{d\,\eta}{d\,\mu}\right)}{\mu\,\eta} = 0,$$

woraus

$$\lambda = \frac{1}{\mu}\;\frac{\eta + \mu\,\dfrac{d\,\eta}{d\,\mu}}{\eta - \mu\,\dfrac{d\,\eta}{d\,\mu}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Aus dieser Beziehung ergibt sich der wirtschaftliche Armierungsgehalt in Funktion der Verhältniszahl $\lambda$ der Einheitspreise. In der ältern Literatur wurde zur Vereinfachung oft $\eta$ konstant gesetzt und damit aus Gl. (4) sehr einfach $\mu = 1/\lambda$ erhalten. Bekanntlich nimmt jedoch $\eta$ mit zunehmendem Armierungsgehalt ab, somit ist $\dfrac{d\,\eta}{d\,\mu}$ negativ und $\mu < 1/\lambda$. Der bekannte Ausdruck für die Lage der neutralen Axe

$$\xi = \frac{x}{h} = n\,\mu\left(\sqrt{1 + \frac{2}{\eta\,\mu}} - 1\right)$$

liefert den genauen Wert von $\eta$ zu

$$\eta = 1 - \frac{\xi}{3} = 1 - \frac{n\,\mu}{3}\left(\sqrt{1 + \frac{2}{n\,\mu}} - 1\right)$$

und daraus

$$\frac{d\,\eta}{d\,\mu} = -\frac{n}{3}\left(\sqrt{1 + \frac{2}{n\,\mu}} - 1\right) + \frac{1}{3\,\mu\sqrt{1 + \frac{2}{n\,\mu}}}.$$

Gl. (4) geht damit über in

$$\lambda = \frac{1}{\mu}\;\frac{(3 + 2\,n\,\mu)\left(\sqrt{1 + \frac{2}{n\,\mu}} - 1\right)}{3\sqrt{1 + \frac{2}{n\,\mu}} - 1} = \frac{1}{\mu\,\psi} \quad . \quad . \quad (5)$$

Die Berechnung von $\mu$ aus dieser Beziehung gestaltet sich sehr einfach, wenn man beachtet, dass der Quotient $\psi$ für die praktisch in Frage stehenden Werte von $\mu$ nahezu konstant ist. Die Ausrechnung mit $n = 10$ ergibt nämlich für

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\mu =$ | 0,005 | 0,010 | 0,015 | 0,020 |
| $\psi =$ | 1,09 | 1,11 | 1,13 | 1,14 |

Für die praktische Anwendung kann daher mit genügender Genauigkeit einfach $\psi = 1{,}1$ gesetzt werden. Damit folgt aus Gl. (5) der Armierungsgehalt $\mu = \mu_0$, der dem Minimum der Kosten entspricht, zu

$$\mu_0 = \frac{1}{1{,}1\,\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Es gelingt leicht, auch eine einfache Formel für die zugehörige Druckspannung $\sigma_b$ im Beton aufzustellen; man erhält

$$\sigma_b = \frac{\sigma_e}{5\left(\sqrt{1 + 0{,}22\,\lambda} - 1\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

---

[1]) Die Liste ist nicht vollständig. Die ausführlichste, im deutschen Sprachgebiet fast unbekannt gebliebene Darstellung gab *F. Campus* in der belgischen «Revue Universelle des Mines», 1924 et 1925.

[2]) Dass die Eisenspannung unter Schweizer Verhältnissen stets auszunützen ist, lässt sich leicht begründen. Der Kürze wegen wird hier auf diesen Nachweis verzichtet.

Weicht der Konstrukteur aus irgend welchen Gründen von dem durch Gl. (6) geforderten Armierungsgehalt $\mu_0$ ab, so erhöhen sich die Kosten. Man erkennt in einfachster Weise die Folgen dieser Abweichung, wenn man die *Kennziffer* $w$ für die Wirtschaftlichkeit der Bemessung ermittelt, das ist der Quotient aus den Kosten $k$ beim verwendeten Armierungsgehalt $\mu$ und den Kosten $k_0$ beim wirtschaftlichsten Armierungsgehalt $\mu_0$ nach Gl. (6); aus Gl. (3) ergibt sich unter Weglassung des Einflusses der Schalung

$$w = \frac{k}{k_0} = \frac{1 + \lambda \mu}{1 + \lambda \mu_0} \sqrt{\frac{\mu_0 \eta_0}{\mu \eta}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

In der Schweiz steht die Eisenbetonbauweise zur Zeit im Uebergang vom normalen Stahl zum hochwertigen Stahl. Da dieser stets in Verbindung mit hochwertigem Beton verwendet wird, hat sich die Verhältniszahl $\lambda$ der Einheitspreise unter dem Einflusse der neuen Normen nicht stark geändert und beträgt zur Zeit, besondere Fälle vorbehalten, etwa $\lambda = 100$ bis 120. Man erhält bei einem Betonpreis von 40 Fr./m³, einem Stahlpreis von 0,44 Fr./kg und mit $\varepsilon = 1{,}3$ den Wert

$$\lambda = \frac{\varepsilon k_e}{k_b} = \frac{1{,}3 \cdot 7850 \cdot 0{,}44}{40} = 112{,}5 .$$

Berechnet man nach Gl. (8) mit $\lambda = 100$ die Kennziffer $w$ für $\mu_0 = {}^1/_{110}$ und verschiedene Werte von $\mu$, so findet man folgende Zahlen:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\mu}{\mu_0} =$ | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 1,2 | 1,4 | 1,6 |
| $w =$ | 1,07 | 1,03 | 1,01 | 1 | 1,00 | 1,02 | 1,03 |

Man erkennt, dass sich die Kennziffer nur langsam ändert, wenn man sich vom wirtschaftlichen Armierungsgehalt entfernt. Das gilt insbesondere für Armierungsgehalte höher als $\mu_0$. Rechnet man entsprechend den schweizerischen Normen mit $\sigma_e = 1600$ kg/cm² und $\sigma_b = 100$ kg/cm², also mit $\mu = 1{,}2$ %, so bedingt dies für $\lambda = 100$ eine Kennziffer von $w \backsim 1{,}02$; die Ausnützung der zulässigen Spannungen ist demnach beim Rechteckquerschnitt wirtschaftlich wohl zu verantworten. Dagegen können wesentlich zu niedrige Armierungsgehalte, unter 0,5 %, unter Umständen zu starken Verteuerungen führen.

Es sei noch bemerkt, dass in manchen Fällen das Moment $M$ nicht als konstant betrachtet werden sollte, sondern als abhängig von der Nutzhöhe $h$ (Einfluss des Eigengewichtes). Schreibt man $M = M_0 + M' h$, so kann die Theorie auf diesen Fall erweitert werden. Man erkennt indessen ohne Rechnung, dass durch den Einfluss von $M'$ der wirtschaftliche Armierungsgehalt $\mu_0$ erhöht wird und hier die Regel, die Spannungen auszunützen, erst recht Geltung hat. Auf die Darstellung dieser erweiterten Theorie muss hier verzichtet werden.

*2. Der Rippenquerschnitt.*

Zur Bestimmung des wirtschaftlichen Armierungsgehaltes genügt es, die Kosten für die Rippe anzuschreiben, da die Plattenstärke fast stets von der Nutzhöhe unabhängig ist. Zu den bisher benützten Grössen kommt die Rippenbreite $b_0$, die wegen der nötigen Platzbreite für die Zugeisen vom Eisenquerschnitt und damit von der Nutzhöhe abhängt. Die Literatur enthält zahlreiche Vorschläge, um diesem Umstand Rechnung zu tragen. Nach Ansicht des Verfassers ist es jedoch am besten, bei der Berechnung der wirtschaftlichen Nutzhöhe die Rippenbreite als Konstante einzusetzen, um damit der Tendenz nach hohen und schmalen Rippen entgegen zu wirken. Als Armierungsgehalt bezeichnen wir wie beim Rechteckquerschnitt den Ausdruck $\mu = F_e / b h$, der hier nicht mit dem wirklichen Verhältnis zwischen Eisen und Beton übereinstimmt.

Entsprechend Gl. (1) betragen hier die Kosten für die Rippe von der Länge $= 1$

$$\begin{aligned} k &= k_b b_0 h 1 + \varepsilon k_e F_e + k_s [b_0 + 2(h - d)] \\ &= (k_b b_0 + 2 k_s) h (1 + \lambda \mu) + k_s (b_0 - 2 d) \quad . \quad . \quad (9) \end{aligned}$$

worin zur Abkürzung $\lambda = \dfrac{\varepsilon k_e b}{k_b b_0 + 2 k_s}$

gesetzt ist. Gl. (9) entspricht ganz Gl. (1) und die Berechnung der Minimalbedingung erfolgt in gleicher Weise wie beim Rechteckquerschnitt. Man gelangt bei konstanten Werten von $M$, $b$, $b_0$, $\sigma_e$ zur Gl. (4). Von hier weg ist der weitere Rechnungsgang davon abhängig, ob die neutrale Axe durch die Platte oder durch die Rippe geht, da $\eta$ und sein Differentialquotient in beiden Fällen verschieden sind. Geht die *neutrale Axe durch die Platte*, so gelten für den Hebelarm $\eta$ und seine Ableitung die Formeln des Rechteckquerschnittes. Die Rechnung führt somit zu Gl. (5), in der aber jetzt $\lambda$ aus Gl. (9) zu entnehmen ist. Näherungsweise gilt auch hier

$$\mu_0 = \frac{1}{1{,}1 \lambda}, \text{ wo } \lambda = \frac{\varepsilon k_e b}{k_b b_0 + 2 k_s}$$

Geht die *neutrale Axe durch die Rippe*, so lautet mit der üblichen Vereinfachung, dass die Druckspannungen unterhalb der Platte vernachlässigt werden können, der Ausdruck für den relativen Hebelarm $\eta$

$$\eta = 1 - \frac{\delta}{2} + \frac{\delta^2}{6} + \frac{\delta^3}{6 n \mu}, \text{ wo } \delta = \frac{d}{h} .$$

Aus $\mu = \dfrac{F_e}{b h} = \dfrac{F_e \delta}{b d}$ und $F_e = \dfrac{M \delta}{\sigma_e \eta d}$ folgt

$$\delta^2 = \frac{\sigma_e b d^2}{M} \mu \eta, \quad \frac{d \delta}{d \mu} = \frac{\delta}{2 \mu \eta} \left( \eta + \mu \frac{d \eta}{d \mu} \right).$$

Man kann damit den Differentialquotienten $d\eta / d\mu$ bilden, in Gl. (4) einsetzen und wie beim Rechteckquerschnitt einen Ausdruck für den Quotienten $\psi$ aufstellen. Indessen erkennt man sofort, dass hier $\psi$ zwischen 1,0 und 1,1 liegen muss. Für den Grenzfall $\delta = \xi$ gelten nämlich noch die Formeln (6) und (7) des Rechteckquerschnittes. Ist anderseits $\delta$ sehr klein, so können in dem Ausdruck für $\mu$ die höhern Potenzen von $\delta$ vernachlässigt werden. Dann ist genügend genau $\eta = 1 - \dfrac{\delta}{2}$, somit

$$\frac{d \eta}{d \mu} = - \frac{1}{2} \frac{d \delta}{d \mu} = - \frac{1 - \eta}{2 \mu \eta} \left( \eta + \mu \frac{d \eta}{d \mu} \right) = - \frac{\eta (1 - \eta)}{\mu (1 + \eta)} .$$

Formel (4) liefert damit

$$\lambda = \frac{1}{\mu} \frac{\eta + \mu \frac{d \eta}{d \mu}}{\eta - \mu \frac{d \eta}{d \mu}} = \backsim \frac{1}{\mu} \left( 1 - \frac{\delta}{2} \right) .$$

Je grösser $\eta$ ist, desto mehr nähert sich der Beiwert von $\mu$ dem Wert 1.

Der *wirtschaftliche Armierungsgehalt* $\mu_0$ liegt darnach beim *Rippenquerschnitt* in den engen Grenzen

$$\mu_0 = \frac{1}{1{,}1 \lambda} \text{ bis } \frac{1}{\lambda}, \qquad \lambda = \frac{\varepsilon k_e b}{k_b b_0 + 2 k_s} \quad . \quad . \quad (10)$$

Die zugehörige Druckspannung $\sigma_b$ berechnet sich nach Formel (7), wenn die neutrale Axe durch die Platte geht. Geht sie durch die Rippe, so lässt sich leicht die Formel ableiten

$$\sigma_b = \frac{\sigma_e}{20} \frac{\delta^2 + \frac{20}{\lambda}}{\delta \left( 1 - \frac{\delta}{2} \right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Für kleine Werte von $\delta$ wird

$$\sigma_b = \backsim \frac{\sigma_e}{\lambda \delta} .$$

Die Verhältniszahl $\lambda$ liegt beim Rippenquerschnitt stets wesentlich höher als beim Rechteckquerschnitt. Setzt man für den Rechteckquerschnitt $\lambda_0 = \dfrac{\varepsilon k_e}{k_b}$, so wird für den Rippenquerschnitt

$$\lambda = \frac{\varepsilon k_e b}{k_b b_0 + 2 k_s} = \frac{\lambda_0}{\frac{b_0}{b} + \frac{2 k_s}{k_b b}} .$$

Mit $b/b_0 = 5$, $b = 1{,}20$ m, $k_b = 40$ Fr./m³, $k_s = 6$ Fr./m² ergibt sich bereits $\lambda = 2{,}2 \lambda_0$. In den Fällen der Praxis hat man bei den Plattenbalken meist mit Werten $\lambda = 200 \div 300$ zu rechnen. Damit ergeben sich wirtschaftliche Armierungsgehalte von 0,3 ÷ 0,5 % und die Druckspannungen im Beton betragen 30 ÷ 45 kg/cm². Nützt man dagegen beim Plattenbalken die hohen zulässigen Betonspannungen nach den schweizerischen Normen von 1935 aus, so erhält man Querschnitte mit zwei- bis dreimal zu hohen Armierungsgehalten. Man gelangt dann oft zu Kennziffern $w = 1{,}1 \div 1{,}2$, konstruiert also unwirtschaftlich, abgesehen davon, dass der Sicherheitsgrad kleiner ist. M. RITTER

*

**B. Der Kreisträger mit ⊥-Querschnitt**

1. Das Problem der Kreisträgers mit I-Querschnitt bei Belastungen senkrecht zur Trägerebene gehört deshalb zu den schwierigeren Aufgaben der Stahlbaustatik, weil die infolge der Trägerkrümmung auftretenden Verdrehungsmomente $T$ teilweise durch Torsionsspannungen (Torsionsmomente $t$) und teilweise durch Flanschquerkräfte $\mathfrak{Q}$ bezw. Flanschbiegungsmomente $\mathfrak{M}$ aufgenommen werden, wobei in jedem Querschnitt einerseits die Gleichgewichtsbedingung

$$T = t + \mathfrak{Q} h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

anderseits die Elastizitätsbedingung: Uebereinstimmung der Verdrehungen infolge $t$ mit den Verformungen infolge der in beiden Flanschen entgegengesetzt gleich grossen Momente $\mathfrak{M}$ erfüllt sein müssen. Diese Aufgabe wurde erstmals von G. Unold[1]) gelöst. Seine Untersuchung führt jedoch auf eine schwer zu handhabende Diffe-

[1]) G. Unold: Der Kreisträger. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 255, Berlin 1922.

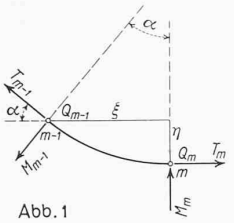


Abb. 1

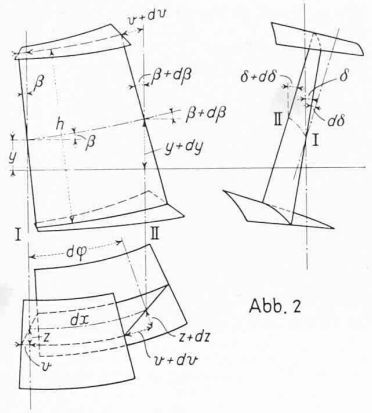


Abb. 2

rentialgleichung 8. Ordnung, sodass ihre Anwendung auf einige einfache symmetrische Belastungsfälle beschränkt bleiben musste. Nun kommen aber bei einem wichtigen Anwendungsgebiet dieser Trägerform, bei Transportanlagen, bewegliche Belastungen vor. Es scheint deshalb erwünscht, ein auch bei unsymmetrischer Anordnung von Tragwerk und Belastung leicht anwendbares Berechnungsverfahren zu besitzen. Die Aufstellung eines solchen Verfahrens gelingt, wie nachstehend gezeigt werden soll, wenn man nicht alle Gleichgewichts- und Formänderungsbedingungen in einer einzigen Differentialgleichung vereinigt, sondern die Berechnung in folgenden drei Stufen durchführt:

a) Berechnung der Biegungsmomente $M$, der Drehmomente $T$ und der Querkräfte $Q$ in einem statisch bestimmten Grundsystem (Entfernung überzähliger Auflagergrössen) auf Grund der Gleichgewichtsbedingungen des statisch bestimmten Tragwerks.

b) Aufteilung der Drehmomente $T$ in die Torsionsanteile $t$ und die Flanschbiegungsanteile $\mathfrak{Q}\,h$, bezw. die Flanschbiegungsmomente $\mathfrak{M}$.

c) Bestimmung der elastischen Formänderungen mit Hülfe der virtuellen Arbeitsgleichung, und daraus der überzähligen Auflagergrössen mit Hülfe der Elastizitätsbedingungen, worauf sich die Beanspruchungen und Formänderungen des Tragwerks aus dem Superpositionsgesetz ergeben.

Damit wird die Berechnung dieser besonderen Tragwerksart der üblichen Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke angeglichen und somit vereinheitlicht.

2. Im statisch bestimmten Grundsystem ergeben sich die Schnittkräfte $M$, $T$ und $Q$ aus den bekannten Gleichgewichtsbedingungen der Statik. An einem Trägerstück $(m-1)-m$ ergeben sich nach Abb. 1 insbesondere die Zusammenhänge

$$M_m = M_{m-1}\cos\alpha - T_{m-1}\sin\alpha + Q_{m-1}\xi \quad . \quad . \quad (2)$$

$$T_m = T_{m-1}\cos\alpha + M_{m-1}\sin\alpha + Q_{m-1}\eta \quad . \quad . \quad (3)$$

Beim Uebergang auf ein kleines Element $ds$ folgen daraus mit $ds = r\,d\varphi$

$$\frac{dM}{d\varphi} = M' = Q\,r - T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\frac{dT}{d\varphi} = T' = M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Nach Differentiation von Gl. 4 lassen sich die Gleichungen 4 und 5 zu der bekannten Beziehung

$$M'' + M = -\,p\,r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

zusammenfassen, die hier jedoch nicht weiter benötigt wird.

3. Aus Abb. 2 ergeben sich nach G. Unold folgende Formänderungsgleichungen:

Verkürzung Oberflansch:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\,dx}{dx} = \frac{dv}{dx} - z\frac{d\varphi}{dx} = \frac{v' - z}{r} = \frac{M\,h}{2\,B_1} \quad . \quad . \quad (7)$$

Verdrehung:

$$d\delta = \frac{v\,d\varphi + dz}{\frac{h}{2}},$$

$$\vartheta = \frac{d\delta}{dx} = \frac{\delta'}{r} = \frac{v + z'}{\frac{h}{2}\,r} = \frac{t}{C} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Dabei sind die Abkürzungen $B_1 = E\,J_{x'}$, $C = G\,J_d$ eingeführt. Ferner gilt die bekannte Beziehung

$$\mathfrak{M} = -\frac{B_{Fl.}}{r^2}\,(z'' + z), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

wobei $B_{Fl.} = E\,J_{Fl.} = {}^1/_2\,E\,J_y = {}^1/_2\,B_2$ bedeutet.

Differenzieren wir Gl. 8, so folgt aus den Gl. 7 und 8 durch Elimination von $v'$

$$\frac{h\,r}{2}\left(\frac{M}{B_1} - \frac{t'}{C}\right) = -\,(z + z''),$$

woraus in Verbindung mit Gl. 9 sich die gesuchte Elastizitätsbedingung

$$\frac{t'}{C} = -\,\frac{4\,r}{h}\,\frac{\mathfrak{M}}{B_2} + \frac{M}{B_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

ergibt. Bei praktischen Anwendungen ist stets $\frac{h\,B_2}{4\,r\,B_1} = \frac{h\,J_y}{4\,r\,J_x}$ sehr klein gegen 1; da ferner $M$ und $\mathfrak{M}$ von der gleichen Grössenordnung sind, kann Gleichung 10 bei genügender Genauigkeit mit der Abkürzung $\varrho^2 = \frac{4\,C\,r^2}{B_2\,h^2}$ vereinfacht werden zu

$$t' = -\,\frac{h}{r}\,\varrho^2\,\mathfrak{M} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Die Gleichgewichtsbedingung Gl. 1 liefert uns nun, unter Beachtung, dass $\mathfrak{Q} = \mathfrak{M}' : r$, die Grundgleichung zur Bestimmung der Torsionsanteile $t$

$$T = t + \mathfrak{Q}\,h = t - \frac{1}{\varrho^2}\,t'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Es bietet übrigens keine Schwierigkeiten, statt Gl. 11 die genauere Gl. 10 zu berücksichtigen; wir erhalten dann

$$T - M'\frac{C}{B_1\,\varrho^2} = t - \frac{1}{\varrho^2}\,t'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12\,a)$$

Es ist auch hier ersichtlich, dass die Vereinfachung der Gl. 12 gegen 12a bei praktischen Anwendungen wohl stets zulässig sein wird.

Zur Auflösung kann Gl. 12 in ein dreigliedriges Gleichungssystem[2])

$$-\,t_{m-1}(\varepsilon - 1) + t_m(2\,\varepsilon + 4) - t_{m+1}(\varepsilon - 1) = \\ = T_{m-1} + 4\,T_m + T_{m+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

umgesetzt werden, wobei $\varepsilon = 6 : \Delta\varphi^2\,\varrho^2$. Bei den Randbedingungen sind folgende Fälle zu unterscheiden[3]):

a) Die Flanschenden sind frei drehbar: $\mathfrak{M}_A = o$ bezw. $t'_A = o$,

$$t_A\,(\varepsilon + 2) - t_1\,(\varepsilon - 1) = 2\,T_A + T_1.$$

b) Die Flanschenden sind elastisch eingespannt: $t'_A = -\,r\,t_A$

$$t_A\,[\varepsilon\,(1 + r\,\Delta\varphi) + 2] - t_1\,(\varepsilon - 1) = 2\,T_A + T_1$$

c) Die Flanschenden sind starr eingespannt: $t_A = o$.

Die Auflösung des Gleichungssystems 13 liefert die Torsionsanteile $t$, womit aus Gl. 12 auch die Werte $t''$ gegeben sind. Die Flanschbiegungsmomente $\mathfrak{M}$ sind aus den Werten $t'$

$$t'_m = \frac{t_m - t_{m-1}}{\Delta\varphi} - \frac{\Delta\varphi}{6}\,(2\,t''_m + t''_{m-1})$$

nach Gl. 11 (evt. 10) zu bestimmen. Bei beidseitig frei drehbaren Flanschenden (Randbedingung a) ist es oft bequemer, durch Differentiation aus Gl. 12 und unter Beachtung von Gl. 5 auf das die Flanschbiegungsmomente direkt liefernde Gleichungssystem

$$-\,\mathfrak{M}_{m-1}(\varepsilon - 1) + \mathfrak{M}_m(2\,\varepsilon + 4) - \mathfrak{M}_{m+1}(\varepsilon - 1) = \\ = \frac{r}{\varrho^2\,h}\,(M_{m-1} + 4\,M_m + M_{m+1}) \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

überzugehen.

4. Die überzähligen Auflagergrössen ergeben sich aus den Elastizitätsbedingungen

$$X_1\,a_{11} + X_2\,a_{12} + \ldots\ldots a_{10} = 0, \text{ usw.} \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

wobei die Verschiebungsgrössen $a_{ik}$ gegeben sind durch

$$a_{ik} = \int_0^l \frac{M_i\,M_k}{B_1}\,ds + \int_0^l \frac{t_i\,t_k}{C}\,ds + \int_0^l 2\,\frac{\mathfrak{M}_i\,\mathfrak{M}_k}{B_{Fl.}}\,ds \quad (16)$$

Beachten wir, dass der Unterschied zwischen $T$ und $t$ durch die Flanschbiegungsmomente $\mathfrak{M}$ aufgenommen wird, so kann die Arbeit der Flanschbiegungsmomente durch Verdrehungsarbeit ausgedrückt werden und es folgt

$$a_{ik} = \int_0^l \frac{M_i\,M_k}{B_1}\,ds + \int_0^l \frac{T_i\,t_k}{C}\,ds = \\ = \int_0^l \frac{M_i\,M_k}{B_1}\,ds + \int_0^l \frac{t_i\,T_k}{C}\,ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16\,a)$$

Der Beitrag der Momente $M$ an die Verschiebungen ist meist recht klein gegenüber dem Beitrag der Verdrehungsmomente.

[2]) F. Stüssi: Baustatische Methoden «SBZ» Bd. 107, S. 277* (1936).

[3]) F. Stüssi: Die Stabilität des auf Biegung beanspruchten Trägers. Abhandlungen der I. V. B. H., Band 3, 1935.

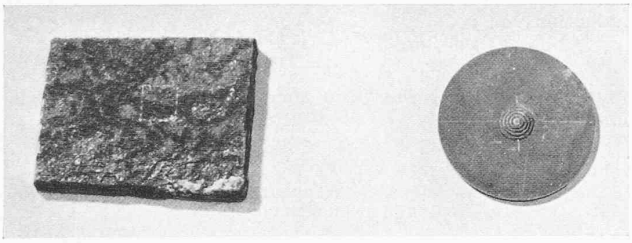

Abb. 1a. 5 × 5 mm eingeritzt. — Natur-Grösse. — Abb. 1b. Kreispyramide

Daraus folgt, dass die Formänderungen gekrümmter Träger sehr viel grösser werden als bei geraden Trägern. Dieser Umstand ist bei der Bemessung (Durchbiegungsvorschrift) besonders zu beachten.

Die Schnittgrössen und Formänderungen des wirklichen Tragwerks ergeben sich nach Auflösung der Elastizitätsgleichungen durch Superposition.

5. In Abb. 3 ist ein durchgerechnetes Beispiel skizziert[4]): Bei lotrechter Belastung ist eine lotrechte Auflagerkraft, z. B. $D$, als überzählige Grösse einzuführen. Die Längsspannungen werden in zwei Flanschrändern maximal; sie ergeben sich durch Addition der aus den $M$ und $\mathfrak{M}$ sich ergebenden Teilspannungen.

Um die Uebereinstimmung der Rechnung mit den tatsächlichen Verhältnissen zu überprüfen und um festzustellen, ob nicht die verhältnismässig grossen Formänderungen den Spannungszustand wesentlich beeinflussen (Spannungen zweiter Ordnung), wurden im Institut für Baustatik, Abteilung Stahlbau, einige Messungen am Träger der Abb. 3 ausgeführt.[5]) In Abb. 4 ist der Vergleich zwischen Messung und Rechnung für zwei Grössen, nämlich den Drehwinkel $\delta$ und die grösste Randspannung $\sigma_{max}$ im Schnitt $s$-$s$, aufgetragen. Mit Rücksicht auf die Schwierigkeiten, die die genaue Verwirklichung der gelenkigen Auflagerung bietet (beim Drehwinkel sind aus Abb. 4 Klemmeinflüsse unter grösseren Belastungen sichtbar), ist die Uebereinstimmung zwischen Messung und Rechnung als gut zu bezeichnen.

FRITZ STÜSSI

[4]) Numerische Berechnung Dipl. Ing. E. Amstutz.
[5]) Versuchsdurchführung Dipl. Ing. E. Mentel.

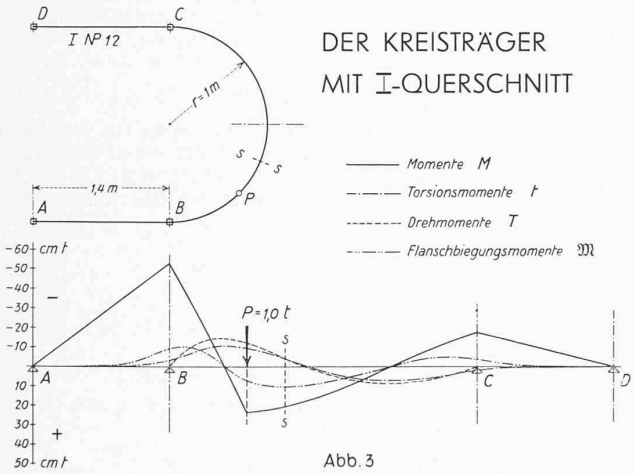


Abb. 3

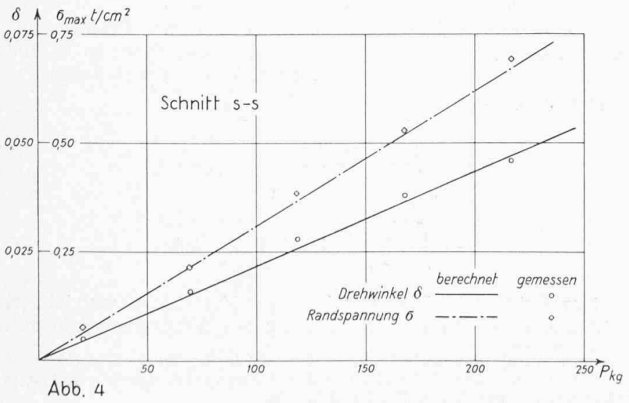


Abb. 4

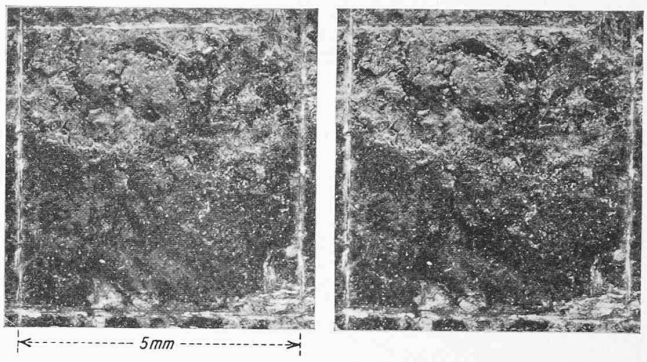


Abb. 2. Aufnahmepaar, 8-fache Vergrösserung des 5 mm-Quadrats

## Aus dem Photogrammetrischen Institut

### Die Mikrophotogrammetrie

In der kürzlich erschienenen Festschrift der E. T. H. zur Jahrhundertfeier des S. I. A. sind die Probleme der Luftphotogrammetrie dargestellt worden, die die Vermessungsfachleute gegenwärtig ganz besonders interessieren. Es mag daher angezeigt sein, an dieser Stelle über ein neues Anwendungsgebiet der Stereophotogrammetrie zu berichten, das von allgemeinerem Interesse sein dürfte. Wir haben uns die Aufgabe gestellt, mit Hilfe der Stereophotogrammetrie von einer beliebigen Oberfläche mit u. U. mikroskopisch kleinen Unebenheiten, eine genaue topographische Darstellung zu geben. Die Fachliteratur gibt über dieses Problem keine Auskunft. Einzig in der Zeitschrift «Feinmechanik und Präzision» 1931 ist ein Versuch erwähnt, «die Oberfläche nach Stereoaufnahmen im Autokartographen nachzuzeichnen, wobei aber bisher nicht zu überwindende Schwierigkeiten auftraten.» — Im Gegensatz dazu haben unsere Versuche am Photogrammetrischen Institut der E. T. H. einen vollen Erfolg gezeitigt.

Bekanntlich lassen sich bei einer photographischen Aufnahme die Beziehungen zwischen Objekt- und Bilddistanz ($D$, bezw. $d$) nach der Linsengleichung $\frac{1}{D} + \frac{1}{d} = \frac{1}{F}$, bezw. $D = \frac{F \cdot d}{d - F}$ bestimmen, wenn die Brennweite $F$ des Aufnahmeobjektivs gegeben ist. Bei linearer Vergrösserung 10 : 1 ist $d = 10\ D$, sodass z. B. für eine Objektivbrennweite $F = 42$ mm die Objektdistanz $D = 46{,}2$ mm und die Bilddistanz $d = 462$ mm wird. — Für die stereophotogrammetrische Auswertung sind zwei Aufnahmen (von verschiedenen Standorten aus) notwendig, die im Auswertegerät zum Stereomodell vereinigt werden. Für unsere Vorversuche diente eine optische Bank; die Verschiebung des Standortes wurde durch entsprechende Verschiebung des Objektes normal zur Aufnahmerichtung erreicht. Als Objekt diente das in Abb. 1a in natürlicher Grösse dargestellte korrodierte Eisenstück. Durch die seitliche Verschiebung des Objektes um 5 mm (= 50 mm im Negativ bei 10-facher linearer Vergrösserung) erzielte man die Aufnahmeverhältnisse des sog. Normalfalles der Stereophotogrammetrie, wobei in der Abstandsgleichung $y = \frac{b \cdot f}{a}$ für $f$ die Bilddistanz $d$ eingeführt werden muss, $b$ die Basis (5 mm) und $a$ die lineare Parallaxe bedeutet. Ein derartiges Aufnahmepaar (rd. 25 mm² des in Abb. 1a dargestellten Eisens in 8-facher linearer Vergrösserung) zeigt Abb. 2. Bei stereoskopischer Betrachtung sind die Unebenheiten der Oberfläche ausserordentlich gut erkennbar.

Zur Auswertung solcher Aufnahmepaare ist nun eine affine Umformung der Aufnahmeverhältnisse notwendig, wobei als Affinitätsaxe die Kammeraxe gewählt werden muss. Um die vorliegenden Aufnahmen als Senkrechtaufnahmen auszuwerten, musste die Basis den Auswertedistanzen am Wild-Autographen entsprechend gewählt werden, bei gleichzeitiger Reduktion der Bildweite $f$ auf jene des Autographen ($f_1$), wobei auch die (gegebene) Bezifferung der $y$-Zählrommel für die Höhen zu berücksichtigen war. — Für die Aufnahme gilt, wie bereits erwähnt, die Abstandsgleichung $D = y = \frac{b \cdot f}{a}$. Für die Auswertung ist zu setzen $y_1 = \frac{b_1 \cdot f_1}{a}$, wobei $f_1$ die Bildweite der Auswertekammern und $b_1$ die einzustellende Basis bedeutet. Wir wählen nun das Affinitätsverhältnis $\frac{y_1}{y} = n$ als ganzen Zahlwert derart, dass 100 mm $< y_1 = n \cdot y <$ 400 mm wird, entsprechend dem