

Objekttyp: **TableOfContent**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **111/112 (1938)**

Heft 8

PDF erstellt am: **13.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*  
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

<http://www.e-periodica.ch>

INHALT: Genauere Differenzgleichungen zur Berechnung gebogener Platten. — Zur Frage der Lüftung langer Autotunnel. — Öffentlich-keits- und Basler Stadtplan. — Erwärmung kalten Wassers in Leitungen, die durch Räume höherer Temperatur führen. — Lokomotivtransport Winterthur-Bombay. — Mitteilungen: Ueber Physik der Raumheizung, Stahlsaitenbeton. Verstellpropeller «Rotol». Die Haltbarkeit von Verzinkungen gegen Korrosionsangriff. Achtzylindrige Kolbenpumpe ohne Kurbelwelle.

Rillennrohre für den Kesselbau. Der Einfluss der Fensterbauart auf den Luftdurchgang. Vom Prozess Hollands gegen Belgien wegen Wassernahme aus der Maas. Meliorationsprojekt für die rechtsseitige Linthebene. Kantonsbibliothek-Gebäude Aarau. Normalien und Normen für die Schiff-fahrtsstrasse Basel-Bodensee. — Nekrologe: K. Grütter. — Wettbewerbe: Evangelisches Kirchgemeindehaus St. Gallen. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine.

### Genauere Differenzgleichungen zur Berechnung gebogener Platten

Von Dipl. Ing. E. AMSTUTZ, Mitarbeiter von Prof. Dr. F. Stüssi, Zürich

Die strenge Berechnung biegsamer Platten stösst in der Praxis immer noch auf Schwierigkeiten. Reihenentwicklungen sind meist sehr umständlich zu handhaben, aber auch die Lösung mittels Differenzgleichungen wird durch die numerische Ausrechnung fast ebenso umfangreich.

Den Bedürfnissen der Praxis entspricht wohl am besten die Methode von Dr. H. Marcus.<sup>1)</sup> Darnach lässt sich die Differentialgleichung für die Plattendurchbiegung durch Systeme von Differenzgleichungen ersetzen, indem man die Platte durch ein Netz unterteilt und für jeden Netzpunkt eine Differenzgleichung anschreibt. Die Genauigkeit des Verfahrens steigert sich mit engerer Netzteilung, zugleich nimmt aber auch die Zahl der Gleichungen und Unbekannten rasch zu. Um zum Beispiel eine quadratische Platte mit befriedigender Genauigkeit zu untersuchen, ist die Quadratseite in mindestens acht Felder zu teilen. Es sind also bei allgemeiner Belastung 49 Gleichungen mit 49 Unbekannten aufzulösen, die sich allerdings im Falle zweiseitiger Symmetrie auf 10 reduzieren lassen. Damit diese Theorie die in der Praxis noch oft verwendete aber gänzlich unzulängliche Streifenmethode verdrängen kann, ist es erforderlich, das Verfahren von H. Marcus soweit zu verbessern, dass selbst mit sehr weiter Netzteilung praktisch noch genaue Resultate erzielt werden. Dies ist das Ziel vorliegender Untersuchung.

Bezeichnen  $x, y$  die rechtwinkligen Koordinaten eines Plattenpunktes,  $\zeta$  die Durchbiegung der Platte unter der Belastung  $p$  und  $N = \frac{m^2}{m^2-1} \cdot \frac{E d^3}{12}$  die Plattensteifigkeit, so lautet die Bestimmungsgleichung für die Durchbiegung der Platte:

$$\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} = \frac{p}{N}$$

oder mit  $Z = N \zeta$

$$\frac{\partial^4 Z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 Z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 Z}{\partial y^4} = p$$

Sie lässt sich durch Einführen einer Hilfsgrösse  $M$  in zwei Gleichungen aufspalten:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -p \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -M$$

Um diese Differentialgleichungen in Differenzgleichungen überzuführen, ersetzt Marcus im Bereiche des untersuchten Punktes die  $M$ -, bzw.  $z$ -Fläche durch ein Paraboloid. Ich will hingegen eine entsprechende Voraussetzung nicht für  $M$  und  $z$  selber, sondern für ihre zweiten Ableitungen nach den Koordinaten machen, wodurch die Genauigkeit des Verfahrens offensichtlich stark erhöht wird. Zu diesem Zweck verwende ich die bekannten Beziehungen<sup>2)</sup> zwischen einer Grösse und ihrer zweiten Ableitung, die sich aus den Eigenschaften des Seilpolygones ergeben, wenn diese Grösse als Durchhang eines Seiles gedeutet wird, das unter dem Horizontalzug 1 steht und mit der zweiten

Ableitung der Grösse belastet ist (vergl. Abb. 1).

Die Seillinie  $z$  wird durch das Seilpolygon ersetzt, sofern die Knotenlast  $K$ , d. i. der Auflagerdruck der benachbarten Felder, als Belastung gewählt wird. Es ist daher

$$K_m = \frac{z_{m-1} - 2z_m + z_{m+1}}{\lambda}$$

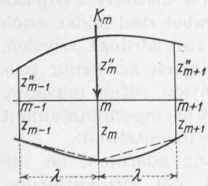


Abb. 1

Ich nehme an, dass die Belastungsfunktion  $z''$  stetig sei und kann sie daher im Bereiche  $m-1$  bis  $m+1$  durch eine Parabel ersetzen (im Falle unstetiger Belastung wie Einzel- oder Streckenlasten wäre zweckmässiger linearer Verlauf anzunehmen). Es gilt somit andererseits auch

$$K_m = \frac{\lambda}{12} (z''_{m-1} + 10z''_m + z''_{m+1})$$

und wir gewinnen die Beziehung

$$\frac{12}{\lambda^2} (z_{m-1} - 2z_m + z_{m+1}) = z''_{m-1} + 10z''_m + z''_{m+1} \quad (1)$$

<sup>1)</sup> Dr. H. Marcus: Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten.

<sup>2)</sup> Dr. F. Stüssi: Baustatische Methoden, «SBZ» Band 107, Seite 277 (20. Juni 1936).

Diese Beziehung lässt sich für die 9 Punkte des Plattenabschnittes der Abb. 2 (unten) sechsmal anschreiben:

$$\frac{12}{\lambda_x^2} (z_i - 2z_k + z_l) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (z_i + 10z_k + z_l)$$

$$\frac{12}{\lambda_y^2} (z_n - 2z_k + z_m) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} (z_n + 10z_k + z_m)$$

$$\frac{12}{\lambda_x^2} (z_q - 2z_n + z_r) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (z_q + 10z_n + z_r)$$

$$\frac{12}{\lambda_y^2} (z_o - 2z_m + z_p) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} (z_o + 10z_m + z_p)$$

$$\frac{12}{\lambda_x^2} (z_q - 2z_i + z_o) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (z_q + 10z_i + z_o)$$

$$\frac{12}{\lambda_y^2} (z_r - 2z_l + z_p) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} (z_r + 10z_l + z_p)$$

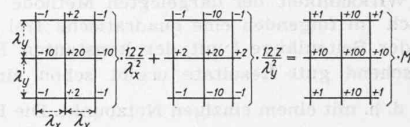
Addiere ich die beiden zehnfach genommenen ersten Gleichungen mit den übrigen, so treten die zweiten Ableitungen nur noch in der Verbindung  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  auf, wofür ich den Wert  $-M$  einsetze und erhalte:

$$\frac{12}{\lambda_x^2} (20z_k + 2z_m + 2z_n - 10z_i - 10z_l - z_o - z_p - z_q - z_r)$$

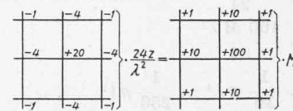
$$+ \frac{12}{\lambda_y^2} (20z_k + 2z_i + 2z_l - 10z_m - 10z_n - z_o - z_p - z_q - z_r)$$

$$= 100M_k + 10(M_i + M_l + M_m + M_n) + M_o + M_p + M_q + M_r \quad (2)$$

was sich symbolisch auch so schreiben lässt



Für  $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$  gilt speziell:



Entsprechende Gleichungen gelten zwischen  $M$  und  $p$ , wenn man  $z$  durch  $M$  und  $M$  durch  $p$  ersetzt.

Der frei aufliegende Rand einer Platte ist charakterisiert durch  $M = 0$  und  $z = 0$ , und es gelingt daher in einer ersten Berechnungsstufe die Werte  $M$  zu ermitteln und daraus in der zweiten Stufe die elastische Fläche  $z$ , bzw.  $z$  festzulegen. Es bleibt noch die Aufgabe zu lösen, aus der elastischen Fläche die Beanspruchungen, insbesondere die Biegemomente der Platte zu ermitteln. Dazu greife ich auf die Gleichung (1) zurück, die ich für jeden Punkt einer Netzlinie anschreiben kann. Diese nur dreigliedrigen Gleichungssysteme sind mit geringem Aufwand nach  $z''$  auflösbar, sodass anhand der bekannten Beziehung

$$m_x = -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

die biegenden Momente berechnet werden können.

Von Interesse ist oft noch der Verlauf der Auflagerkräfte. Diese setzen sich zusammen aus der Rand-Scherkraft

$$v = \frac{\partial M}{\partial x}$$

und den zusätzlichen Auflagerkräften

$$v' = \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} = -\frac{m-1}{m} \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$$

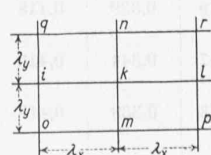


Abb. 2

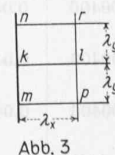


Abb. 3

die die Rand-Drillmomente ersetzen sollen (vergl. Abb. 3). Beachten wir, dass auf dem Rande nicht nur  $z$  und  $M$ , sondern auch ihre sämtlichen Ableitungen nach  $y$  zu Null werden, so folgen aus der Plattengleichung die weiteren Beziehungen: