Band 114 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich
Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet Nr. 12

Die Berechnung schmaler, dreiseitig gelagerter Platten

Von Dr. Ing. HANS BLEICH, Birmingham

Während der Ingenieur zur Berechnung vierseitig gelagerter Platten in jedem Handbuch Zahlentafeln vorfindet, die ihn der Mühe entheben erst langwierige Rechnungen durchzuführen, sind entsprechende Tafeln für die Berechnung dreiseitig gelagerter Platten nicht veröffentlicht worden, obwohl solche Platten häufig genug vorkommen.

Es ist nun durchaus möglich, die dreiseitig gelagerte Platte für eine ganze Reihe von Lagerungs- und Belastungsarten zu behandeln. Die Ergebnisse sind jedoch unendliche Reihen, die besonders unhandlich werden, wenn die angreifenden Lasten nicht gleichmässig verteilt, sondern auf einem Teil der Platte konzentriert sind. Um auch diesen zweiten Fall mit vernünftigem Rechenaufwand behandeln zu können, schränken wir die Aufgabe dahin ein, dass nur schmale Platten untersucht werden sollen, das heisst, nach Abb. 1 soll a grösser sein als b. Für diesen Fall wird im Folgenden ein Näherungsverfahren angegeben, das für die momentenfrei gelagerte Platte nach Abb. 1 sehr gute Ergebnisse liefert.

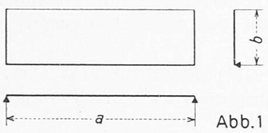

Abb. 1

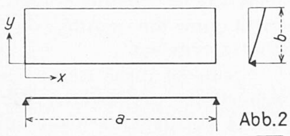

Abb. 2

SBZ

Bezeichnet man die Durchbiegung der Platte mit w, die äussere Belastung mit p, so lautet die Differentialgleichung [1]) für die Durchbiegung w in dem rechtwinkligen Koordinatensystem x, y

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

In dieser Gleichung ist N die Plattensteifigkeit, $N = \dfrac{E\,d^3}{12\,(1-\nu^2)}$

wobei d die Plattenstärke, ν die Poisson'sche Konstante ist. Wir haben vorwiegend Anwendungen auf Aufgaben des Eisenbetonbaues im Auge; für solche Aufgaben kann ohne wesentlichen Fehler $\nu = 0$ gesetzt werden, was zur Vereinfachung der folgenden Rechnungen geschieht. Die Plattensteifigkeit ist also $N = \dfrac{E\,d^3}{12}$.

Die Wahl des Koordinatensystems ist aus Abb. 2 ersichtlich. Die Platte ist längs der drei Seiten $x = 0$, $x = a$ und $y = 0$ fest, aber momentenfrei gelagert, die vierte Seite $y = b$ ist ein freier Rand.

An den gelagerten Seiten müssen Durchbiegung und Moment verschwinden.

$$\text{für } x = 0,\ a: \qquad w = 0,\ m_x = 0,$$
$$\text{für } y = 0\ \ : \qquad w = 0,\ m_y = 0.$$

Drückt man m_x und m_y in bekannter Weise [2]) durch w aus und beachtet, dass $\nu = 0$ ist, so lauten diese Randbedingungen

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für } x = 0,\ a: & w = 0, & \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \\ \text{für } y = 0\ \ : & w = 0, & \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Auf die Randbedingungen längs des freien Randes gehen wir vorläufig noch nicht ein.

Wenn wir die Biegefläche einer Platte nach Abb. 2 unter einer beliebigen Belastung betrachten, so ist es anschaulich und naheliegend, dass Schnitte durch die Platte parallel zur y-Axe nur eine Verdrehung und fast keine Verbiegung zeigen werden, solange nur die Breite b klein gegen die Länge a ist. Dies legt den Gedanken nahe, die Differentialgleichung (1) durch Ansätze der Form $w = y\,F(x)$ zu lösen.

Damit nun dieser Ansatz die Randbedingungen Gl. (2) erfüllt, wählen wir $F(x) = \sin\dfrac{k\,\pi\,x}{a}$, wobei k eine ganze Zahl sein soll. Man überprüft leicht, dass dieser Ansatz

$$w = y\,\sin\frac{k\,\pi\,x}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

allen Randbedingungen (2) genügt.

Wir untersuchen nun, für welche Belastung $p\,(x,\,y)$ der Ansatz (3) die strenge Lösung der Differentialgleichung (1) darstellen würde. Zu diesem Zweck ist Gl. (3) in die linke Seite von Gl. (1) einzusetzen.

$$\frac{p}{N} = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{k^4\pi^4}{a^4}\,y\,\sin\frac{k\,\pi\,x}{a},$$

oder

$$p\,(x,\,y) = \frac{N\,k^4\pi^4}{a^4}\,y\,\sin\frac{k\,\pi\,x}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Die Belastung ist in der y-Richtung linear, d. h. dreieckförmig verteilt, während die Verteilung in der x-Richtung sinusförmig ist.

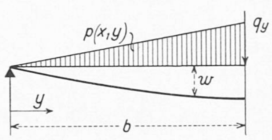

Abb. 3

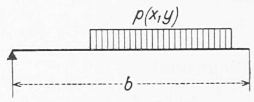

Abb. 4

SBZ

Diese Belastungsangabe ist aber noch nicht vollständig; die Randbedingungen am vierten Rand $y = b$ wurden bisher gänzlich ausser Acht gelassen und wir müssen noch untersuchen, ob an diesem Rande, der ja nicht gelagert ist, nicht äussere Kräfte oder Momente angreifen.

Das Moment m_y in einem Randpunkt ist

$$m_y = -N\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -N\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[y\,\sin\frac{k\,\pi\,x}{a}\right] = 0\,, \qquad (5\text{a})$$

es greift also dort kein äusseres Moment an. Für die Querkraft q_y am Rande gilt [3]), wenn $\nu = 0$ gesetzt wird,

$$q_y = -N\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 2\,\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y}\right] = -\,\frac{2\,N\,k^2\,\pi^2}{a^2}\,\sin\frac{k\,\pi\,x}{a} \qquad (5\text{b})$$

Am Rande wirkt also eine Querkraft, die wir uns durch eine am Rande angreifende Linienlast erzeugt denken können. Diese Linienlast ist sinusförmig verteilt.

Damit also die Platte sich gemäss Gl. (3) durchbiegt, muss die äussere Belastung in der x-Richtung sinusförmig verteilt sein, während sie in der y-Richtung aus einer dreieckförmig verteilten Last und einer Linienlast am Rande besteht, wie in Abb. 3 dargestellt.

Ein derartiger Lastfall wird natürlich praktisch kaum vorkommen. Die Belastungen bestehen in der Regel aus einer auf rechteckigem Grundriss gleichmässig verteilten Last, oder aus mehreren solchen Lasten. Nun kann man die Lastfunktion $p\,(x,\,y)$ die zu solchen Lastrechtecken gehört nach der x-Richtung in eine Fourier'sche Reihe entwickeln, sodass die Lastverteilung nach dieser Richtung für jedes Glied der Entwicklung sinusförmig wird. Die Verteilung der Last nach der y-Richtung wird jedoch stets ein anderes Bild ergeben, als die Verteilung nach Abb. 3, die zu unserem Ansatz gehört; z. B. nach Abb. 4.

Hier setzt nun die Näherungsüberlegung ein. Wir wissen, dass bei schmalen Platten die Querschnitte durch die Platte parallel zur kurzen Seite sich nur wenig verkrümmen können und nahezu gerade bleiben. Es kann daher nur einen geringen Unterschied auf die Gesamtwirkungen ausmachen, wenn wir die tatsächliche Lastverteilung in der Richtung der kurzen Seite (nach Abb. 4) durch jene Lastverteilung ersetzen, die zu unserm Ansatz (1) gehört (nach Abb. 3). Die absolute Grösse der Ersatzlast ist dabei so zu wählen, dass die ursprüngliche Lastverteilung und die Ersatzlast das gleiche Moment um die gelagerte Kante $y = 0$ erzeugen. Diese Angabe erscheint im ersten Augenblick willkürlich; sie wird aber verständlich, wenn

[1]) *Nadai:* «Elastische Platten», Verlag Julius Springer, Berlin 1925, S. 21.
[2]) *Nadai,* l. c. S. 26.
[3]) *Nadai,* l. c. S. 36.