

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 121/122 (1943)
Heft: 9

Artikel: Berechnung schief liegender kreisförmiger Gewölbe gegen Wasserdruck
Autor: Frey-Baer, Otto
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-53156>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 22.12.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INHALT: Berechnung schief liegender kreisförmiger Gewölbe gegen Wasserdruck. — Erweiterung und Umbau der Fabrik für elektr. Apparate Ad. Feller A.-G. in Horgen. — Neubau der Fabrik für Werkzeuge und Präzisions-Apparate Jakob Faes, Richterswil. — Erweiterung der Metallwarenfabrik Alfred Stöckli Söhne, Netstal. — Eidgenössisches Luftamt. — Mitteilungen: Bombenwirkung gegen Eisenbeton und Ermittlung von Schutzdecken. Dampf-elektrische Rangierlokomotiven der SBB. Doppel-

spur Brunnen-Flüelen der SBB. Ueber Gummi im Strassenbau. Der Wasserverbrauch pro Kopf und Tag. Die Sandö-Strassenbrücke in Schweden. Alte Schaffhauser Industrie und Technik. Persönliches. Eine neue Kaserne in Sitten. — Wettbewerbe: Erweiterungsbau des Zürcher Kunsthause. — Nekrologe: Max Schwarz. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine. — Vortragskalender.

Berechnung schief liegender kreisförmiger Gewölbe gegen Wasserdruck

Von Dipl. Ing. OTTO FREY-BAER, Baden

Die Erfahrungen der letzten Jahre haben gezeigt, dass beim Bau von massiven Gewicht-Staumauern Unannehmlichkeiten auftreten, die vom Schwinden und von der Abbindewärme der grossen Betonmassen herrühren. Bedeutend günstiger in dieser Beziehung liegen die Verhältnisse beim Bau von aufgelösten Sperren, bei denen die Abbindewärme unschädlich und rasch ohne besondere Vorkehrungen abgeführt werden kann und bei denen zudem die stets unsichere Auftriebannahme bedeutungslos wird. Unter den in neuerer Zeit ausgeführten aufgelösten Talsperren mittlerer Höhe befindet sich eine Anzahl vom Typ der Gewölberihen-Sperren, die den Vorzug aufweisen, dass sie trotz grosser Längenausdehnung keine Dehnungsfugen benötigen. Um jedoch eine günstige Neigung der Resultierenden in der Grundfuge zu erhalten, ist es nötig, die Gewölbe schief anzuordnen und damit die Wasserauflast zur Vergrösserung der Vertikalkomponente heranzuziehen.

Die schiefe Lage der Gewölbe hat zur Folge, dass im Gewölbe-Normalschnitt am Kämpfer der Wasserdruck grösser ist als im Scheitel. Und zwar ist die Differenz der beiden Belastungen in jedem Gewölbenormalschnitt die gleiche, sodass es naheliegt, die über einen normalen Gewölbestreifen wirkende Wasserlast in einen konstanten Wasserdruck von der Grösse des Scheiteldruckes und einen variablen¹⁾ Wasserdruck, herrührend von der Schiefelage der Gewölbe, aufzuteilen und die entsprechenden Momente getrennt zu berechnen (siehe Abb. 1 und 2).

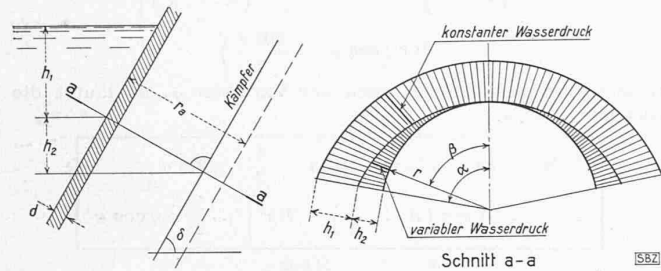


Abb. 1

Abb. 2

Die Berechnung der Momente erfolgt unter der Voraussetzung, dass die Stärke des Bogens im betrachteten Normalschnitt konstant und die Einspannung an den Kämpfern vollständig ist. Die letzte Bedingung trifft bei den Gewölberihen-Sperren zu, im Gegensatz zu den reinen Bogenmauern, deren Kämpfer im elastischen Fels eingespannt sind und daher sowohl Verdrehungen als Verschiebungen ausführen können. Der Bogenschub H greife wie üblich im Schwerpunkt der elastischen Gewichte $\frac{ds}{EJ}$ an, also im vorliegenden Falle im Schwerpunkt der Gewölbeaxe (Abb. 3).

¹⁾ «Variabel» natürlich nur in dem Sinne verstanden, dass seine Grösse vom Bogenscheitel nach dem Kämpfer hin zunimmt, ähnlich wie man von «variablem Trägheitsmoment» spricht.

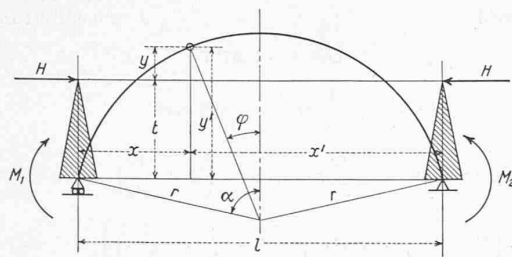


Abb. 3

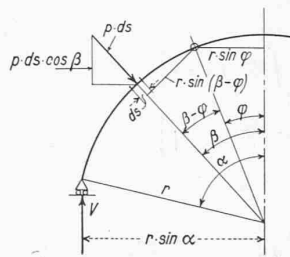


Abb. 4

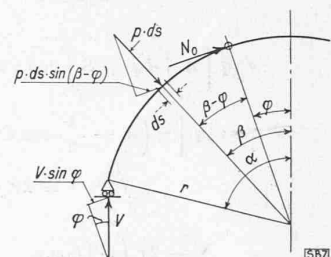


Abb. 5

Aus den Elastizitätsbedingungen ergeben sich folgende Ausdrücke für die statisch unbekannt Grössen:

$$H = \frac{\frac{1}{J} \int_0^l M_0 y ds - \frac{1}{F} \int_0^l N_0 \cos \varphi ds}{\frac{1}{J} \int_0^l y^2 ds + \frac{1}{F} \int_0^l \cos^2 \varphi ds}$$

$$M_1 = M_2 = M' = - \frac{\int_0^{l/2} M_0 ds}{\int_0^l x x' ds + \int_0^l x^2 ds}$$

Ferner ist

$$M = M_0 + M' - H y$$

$$N = N_0 + H \cos \varphi$$

Dabei bedeuten M_0 und N_0 die Momente und Normalkräfte am Grundsystem, das gemäss Abb. 3 als einfacher Balken gewählt wurde. Nachfolgend soll besonders der Verlauf der Momente und Normalkräfte (unter Vernachlässigung der Querkräfte) für den variablen Wasserdruck untersucht werden. Die übrigen Belastungsfälle sind bereits in der Schweiz. Bauzeitung, Bd. 51, S. 233* (2. Mai 1903) von Prof. E. Mörsch behandelt, sodass der Vollständigkeit halber nur die Resultate gegeben werden.

a) Variabler Wasserdruck

Die Funktion des variablen Wasserdruckes p , auf die Gewölbeaxe bezogen, lautet:

$$p = q (1 - \cos \beta) \quad (\text{Abb. 1 und 2})$$

Darin ist $q = \frac{r_a^2}{r} \cos \delta$, r_a der äussere Radius und r der Radius der Gewölbeaxe. Damit können M_0 und N_0 für einen beliebigen Schnitt des Bogens, der durch den Winkel φ bestimmt ist, erhalten werden (Abb. 4 und 5).

$$M_0 = V r (\sin \alpha - \sin \varphi) - \int_{\varphi}^{\alpha} p ds r \sin (\beta - \varphi)$$

$$V = \int_0^{\alpha} p ds \cos \beta$$

$$ds = r d\beta$$

$$V = r q \int_0^{\alpha} (1 - \cos \beta) \cos \beta d\beta =$$

$$= r q \left(\sin \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\int_{\varphi}^{\alpha} p ds r \sin (\beta - \varphi) = r^2 \int_{\varphi}^{\alpha} p \sin (\beta - \varphi) d\beta =$$

$$= r^2 \int_{\varphi}^{\alpha} p (\sin \beta \cos \varphi - \cos \beta \sin \varphi) d\beta =$$

$$= r^2 \int_{\varphi}^{\alpha} [q (1 - \cos \beta) \cos \varphi \sin \beta - q (1 - \cos \beta) \sin \varphi \cos \beta] d\beta =$$

$$= r^2 q \left[\cos \varphi \int_0^\alpha \sin \beta d\beta - \cos \varphi \int_0^\alpha \sin \beta \cos \beta d\beta - \sin \varphi \int_0^\alpha \cos \beta d\beta + \sin \varphi \int_0^\alpha \cos^2 \beta d\beta \right]$$

Die Auflösung dieser Integrale bietet keine Schwierigkeit. Für M_0 findet man folgenden Ausdruck:

$$M_0 = r^2 q \left(A + B \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi \varphi \right)$$

$$A = \sin^2 \alpha \left(1 - \frac{1}{2} \cos \alpha \right) - \frac{1}{2} \sin \alpha \alpha - 1$$

$$B = \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha$$

$$N_0 = V \sin \varphi + \int_0^\alpha p ds \sin (\beta - \varphi) =$$

$$= V \sin \varphi + r \int_0^\alpha p \sin (\beta - \varphi) d\beta$$

Das Integral wurde bereits für M_0 gelöst:

$$N_0 = r q \left(1 - B \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \varphi \right)$$

Damit ist man in der Lage, die Zähler- und Nennerintegrale von H und M' zu lösen. Mit den Bezeichnungen der Abb. 3 sind:

$$y' = r (\cos \varphi - \cos \alpha)$$

$$t = \frac{\int_0^{l/2} y' ds}{\int_0^{l/2} ds} = \frac{\int_0^{l/2} r (\cos \varphi - \cos \alpha) ds}{\int_0^{l/2} ds}$$

$$= r \frac{\sin \alpha}{\alpha} - r \cos \alpha$$

$$y = y' - t = r \left(\cos \varphi - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)$$

$$\int_0^\alpha y d\varphi = 0 \text{ (Definition von } t \text{)}$$

$$\int_0^l M_0 y ds = 2 \int_0^{l/2} M_0 y ds = 2 r \int_0^\alpha M_0 y d\varphi =$$

$$= 2 r \int_0^\alpha r^2 q \left(A + B \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi \varphi \right) y d\varphi =$$

$$= 2 r^3 q \left[A \int_0^\alpha y d\varphi + B \int_0^\alpha \cos \varphi y d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^\alpha \sin \varphi \varphi y d\varphi \right] =$$

$$= 2 r^3 q \left[B \int_0^\alpha \cos \varphi r \left(\cos \varphi - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) d\varphi + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \int_0^\alpha \sin \varphi \varphi r \left(\cos \varphi - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) d\varphi \right] =$$

$$= 2 r^4 q \left[\frac{1}{2} \sin \alpha \cos \alpha \left(B + \frac{5}{4} \right) + \frac{\alpha}{2} \left(B - \frac{1}{4} \right) - \sin^2 \alpha \left(\frac{B}{\alpha} - \frac{\alpha}{4} + \frac{1}{2\alpha} \right) \right]$$

$$\int_0^l N_0 \cos \varphi ds = 2 r \int_0^\alpha N_0 \cos \varphi d\varphi =$$

$$= 2 r^2 q \left[\int_0^\alpha \cos \varphi d\varphi - B \int_0^\alpha \cos^2 \varphi d\varphi - \frac{1}{2} \int_0^\alpha \sin \varphi \cos \varphi \varphi d\varphi \right] =$$

$$= 2 r^2 q \left[\sin \alpha \left(1 - \frac{1}{4} \sin \alpha \alpha \right) - \frac{1}{2} \sin \alpha \cos \alpha \left(B + \frac{1}{4} \right) - \frac{\alpha}{2} \left(B - \frac{1}{4} \right) \right]$$

$$\int_0^{l/2} M_0 ds = r \int_0^\alpha M_0 d\varphi =$$

$$= r^3 q \left[A \int_0^\alpha d\varphi + B \int_0^\alpha \cos \varphi d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^\alpha \sin \varphi \varphi d\varphi \right] =$$

$$= r^3 q \left[\alpha \left(A - \frac{1}{2} \cos \alpha \right) + \sin \alpha \left(B + \frac{1}{2} \right) \right]$$

$$\int_0^l y^2 ds = 2 r \int_0^\alpha y^2 d\varphi =$$

$$= 2 r \int_0^\alpha r^2 \left(\cos \varphi - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 d\varphi =$$

$$= r^3 \left(\sin \alpha \cos \alpha + \alpha - 2 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha} \right)$$

$$\int_0^l \cos^2 \varphi ds = 2 r \int_0^\alpha \cos^2 \varphi d\varphi = r (\sin \alpha \cos \alpha + \alpha)$$

$$\int_0^l x x' ds = r \int_0^\alpha r (\sin \alpha - \sin \varphi) r (\sin \alpha + \sin \varphi) d\varphi =$$

$$= r^3 (\sin \alpha \cos \alpha - \alpha + 2 \sin^2 \alpha \alpha)$$

$$\int_0^l x^2 ds = r \int_0^\alpha r^2 (\sin \alpha - \sin \varphi)^2 d\varphi =$$

$$= r^3 (2 \sin^2 \alpha \alpha + \alpha - \sin \alpha \cos \alpha)$$

$$\int_0^l x x' ds + \int_0^l x^2 ds = 4 r^3 \sin^2 \alpha \alpha$$

Der Ausdruck für H lässt sich nicht vereinfachen und es müssen die vier Integrale einzeln berechnet werden. Dagegen lautet der Ausdruck für M' :

$$M' = - \frac{\int_0^{l/2} M_0 ds}{\int_0^l x x' ds + \int_0^l x^2 ds} = - \frac{\int_0^{l/2} M_0 ds}{4 r^3 \sin^2 \alpha \alpha}$$

$$l = 2 r \sin \alpha; \quad l^2 = 4 r^2 \sin^2 \alpha$$

$$M' = - \frac{\int_0^{l/2} M_0 ds}{r \alpha} =$$

$$= - \frac{r^3 q \left[\alpha \left(A - \frac{1}{2} \cos \alpha \right) + \sin \alpha \left(B + \frac{1}{2} \right) \right]}{r \alpha}$$

$$M' = - r^2 q \left[A - \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\alpha} \left(B + \frac{1}{2} \right) \right]$$

Es ist jedoch nicht erforderlich, M' vorerst zu bestimmen, da dieses Moment in der Gleichung für das Moment M eingegliedert werden kann.

$$M = M_0 + M' - H y = r^2 q \left(A + B \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi \varphi \right) -$$

$$- r^2 q \left[A - \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\alpha} \left(B + \frac{1}{2} \right) \right] -$$

$$- H r \left(\cos \varphi - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)$$

Ordnet man diese Glieder nach der Variablen φ , so lautet die Gleichung für M :

$$M = \cos \varphi (r^2 q B - H r) + \frac{1}{2} r^2 q \sin \varphi \varphi -$$

$$- \frac{\sin \alpha}{\alpha} \left[r^2 q \left(B + \frac{1}{2} \right) - H r \right] + \frac{1}{2} r^2 q \cos \alpha$$

$$N = N_0 + H \cos \varphi =$$

$$= r q \left(1 - B \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \varphi \right) + H \cos \varphi$$

$$N = \cos \varphi (H - r q B) - \frac{1}{2} r q \sin \varphi \varphi + r q$$

Mit diesen Gleichungen für M und N ist man in der Lage, für jeden beliebigen Schnitt, der durch den Winkel φ bestimmt ist, das Moment und die Normalkraft rasch und ohne jede zeichnerische Arbeit zu berechnen. Als Zahlenbeispiel diene eine kürzlich von der Motor-Columbus A.-G. projektierte Reihengewölbesperre, von der der Gewölbenormalschnitt e-e (ohne Berücksichtigung der Kuppel) zu untersuchen sei (Abb. 6). Die für die Momentenberechnung benötigten Abmessungen sind:

$r = 5,775 \text{ m}$	$\sin \alpha = 0,98481$
$r_a = 6,000 \text{ m}$	$\cos \alpha = 0,17365$
$\delta = 55^\circ$	$\sin \alpha \cos \alpha = 0,17101$
$\cos \delta = 0,5736$	$d = 45 \text{ cm}$
$\alpha = 80^\circ$	$F = 0,45 \text{ m}^2$
$\alpha = 1,39626$	$J = 0,007594 \text{ m}^4$

$$q = \frac{r_a^2}{r} \cos \delta = 3,5757$$

$$B = \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha = 0,65858$$

$$\int_0^l M_0 y ds = 2 r^4 q \left[\frac{1}{2} \sin \alpha \cos \alpha \left(B + \frac{5}{4} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha}{2} \left(B - \frac{1}{4} \right) - \sin^2 \alpha \left(\frac{B}{\alpha} - \frac{\alpha}{4} + \frac{1}{2\alpha} \right) \right] =$$

$$= - 141,506$$

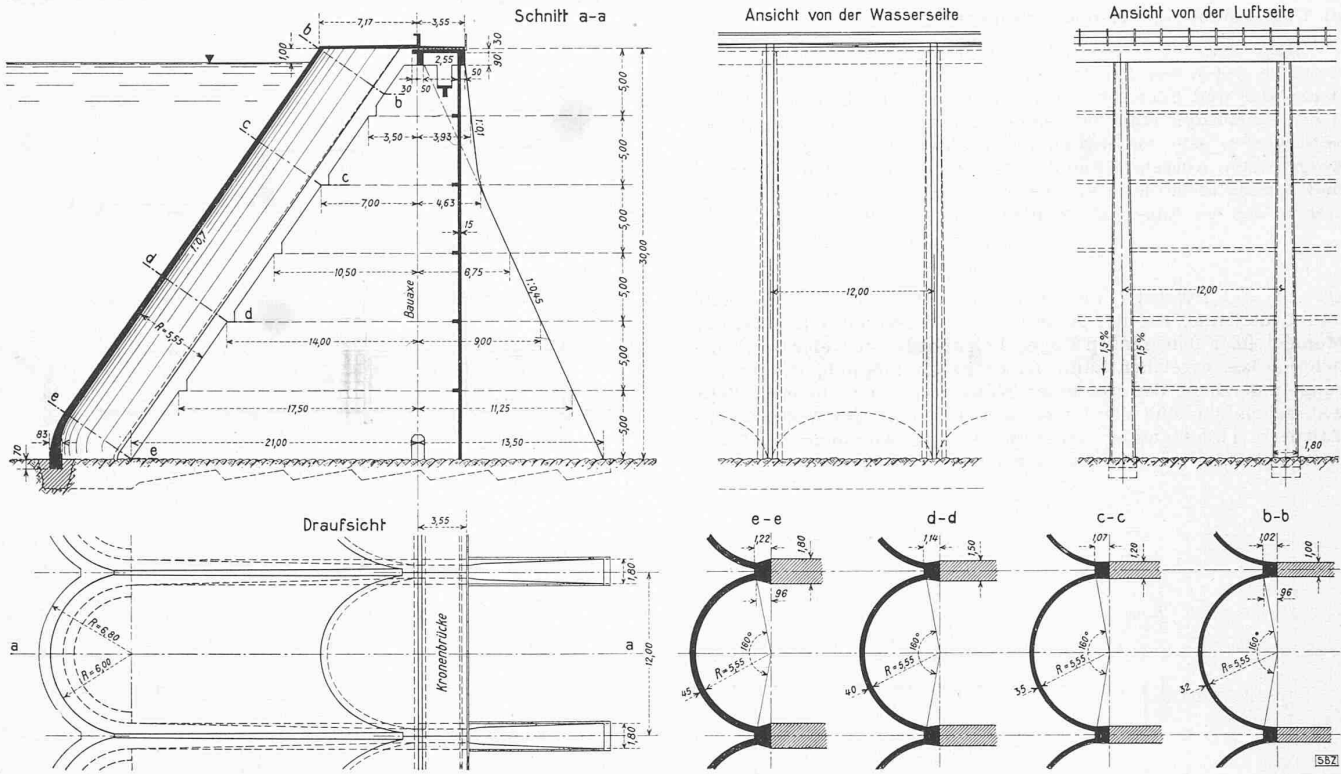


Abb. 6. Gewölbereihen-Mauer, Schnitte und Ansichten 1 : 500

$$\int_0^l N_0 \cos \varphi ds = 2r^2 q \left[\sin \alpha \left(1 - \frac{1}{4} \sin \alpha \alpha \right) - \frac{1}{2} \sin \alpha \cos \alpha \left(B + \frac{1}{4} \right) - \frac{\alpha}{2} \left(B - \frac{1}{4} \right) \right] = 67,577$$

$$\int_0^l y^2 ds = r^3 \left(\sin \alpha \cos \alpha + \alpha - 2 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha} \right) = 34,294$$

$$\int_0^l \cos^2 \varphi ds = r \left(\sin \alpha \cos \alpha + \alpha \right) = 9,051$$

$$H = \frac{\frac{1}{J} \int_0^l M_0 y ds - \frac{1}{F} \int_0^l N_0 \cos \varphi ds}{\frac{1}{J} \int_0^l y^2 ds + \frac{1}{F} \int_0^l \cos^2 \varphi ds} = -4,141 \text{ t}$$

$$M = \cos \varphi \left(r^2 q B - H r \right) + \frac{1}{2} r^2 q \sin \varphi \varphi - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \left[r^2 q \left(B + \frac{1}{2} \right) - H r \right] + \frac{1}{2} r^2 q \cos \alpha$$

$$M = 102,451 \cos \varphi + 59,626 \sin \varphi \varphi - 103,962$$

$$N = \cos \varphi \left(H - r q B \right) - \frac{1}{2} r q \sin \varphi \varphi + r q$$

$$N = -17,740 \cos \varphi - 10,325 \sin \varphi \varphi + 20,650$$

φ	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$	φ	$\sin \varphi \varphi$	M	N
0	1	0	0	0	-1,511	+2,909
20	0,9397	0,3420	0,34907	0,11938	-0,570	+2,746
40	0,7660	0,6428	0,69813	0,44876	+1,273	+2,427
60	0,5000	0,8660	1,04720	0,90687	+1,337	+2,416
80	0,1736	0,9848	1,39626	1,37504	-4,189	+3,373

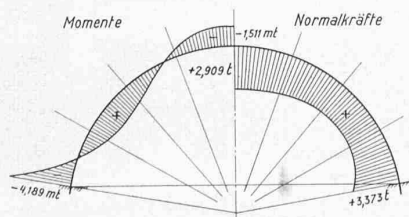


Abb. 7 Variabler Wasserdruck

In Abb. 7 ist der Verlauf der Momente und der Normalkräfte an der Bogenaxe angetragen.

b) Konstanter Wasserdruck

$$H = - \frac{2 p r \sin \alpha}{\frac{F}{J} r^2 \left(\sin \alpha \cos \alpha + \alpha - 2 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha} \right) + \sin \alpha \cos \alpha + \alpha}$$

$$M = H r \frac{\sin \alpha}{\alpha} - H r \cos \varphi$$

$$N = p r + H \cos \varphi$$

$$p = \frac{r_a}{r} p_a$$

wobei p_a den Scheitelwasserdruck an der Aussenfläche des Gewölbes bezeichnet.

c) Eigengewicht

$$\int_0^l M_0 y ds = r^4 g \left(4 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha} - \frac{7}{2} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \alpha \alpha \right)$$

$$\int_0^l N_0 \cos \varphi ds = \frac{1}{2} r^2 g \left(\sin \alpha \cos \alpha - \alpha + 2 \sin^2 \alpha \alpha \right)$$

$$\int_0^l y^2 ds \quad \text{und} \quad \int_0^l \cos^2 \varphi ds \quad \text{siehe unter a)}$$

$$H = \frac{\frac{1}{J} \int_0^l M_0 y ds - \frac{1}{F} \int_0^l N_0 \cos \varphi ds}{\frac{1}{J} \int_0^l y^2 ds + \frac{1}{F} \int_0^l \cos^2 \varphi ds}$$

$$M = r \frac{\sin \alpha}{\alpha} (2 r g + H) - r^2 g \cos \alpha - \cos \varphi (r^2 g + H r) - r^2 g \sin \varphi \varphi$$

$$N = r g \sin \varphi \varphi + H \cos \varphi$$

$$g = d \cos \delta \gamma_b \quad d = \text{Gewölbbestärke}$$

d) Gleichmässige Temperaturänderung (Schwinden)

$$H = \frac{2 E \omega t^0 r \sin \alpha}{\frac{1}{J} \int_0^l y^2 ds + \frac{1}{F} \int_0^l \cos^2 \varphi ds}$$

$$M = H r \frac{\sin \alpha}{\alpha} - H r \cos \varphi$$

$$N = H \cos \varphi$$

$$E = 2100000 \text{ t/m}^2 \quad \omega = 0,00001$$

