Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 121/122 (1943)

Heft: 21

Inhaltsverzeichnis

Band 122 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich
Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet Nr. 21

ZWANZIG JAHRE BAUINGENIEUR-PRAXIS

Unsere Leser werden sich fragen, was dieser orakelhafte Titel zu bedeuten habe, umsomehr, als ja mancher über schon viel längere Praxis verfügt, ohne ein Wesen daraus zu machen. Wir möchten auch keineswegs der immer mehr umsichgreifenden Jubiläumsucht Vorschub leisten, die sich an jede mehr oder weniger runde Jahreszahl klammert. Der Umstand, der uns zu dem vorliegenden, ausnahmsweisen Sonderheft Veranlassung gibt, ist folgender. Heute begeht ein E. T. H.-Bauingenieur-Kurs, dessen ehemalige Angehörige noch aussergewöhnlichen Zusammenhang pflegen, die kameradschaftliche Feier ihrer vor 20 Jahren erfolgten Diplomierung. Ihr Lebensweg hat sie zwar auf die verschiedenartigsten Zweige des Ingenieurberufs geführt, von der Lehre reiner Wissenschaft bis zur Volkswirtschaft und Verwaltungstätigkeit; einer sitzt an der E. T. H. auf dem berühmten Lehrstuhl Ernst Meissners, ein anderer ist sogar Vorstand der Bauingenieurabteilung geworden, noch ein Dritter «seufzt beim Unterricht, und der schreibt Rezensionen» (im Vereinsorgan der G. E. P.), wie wir in der alten Burschenherrlichkeit singen. Unser Sonderheft will durch Kurzberichte vor Augen führen, wie weit von dem einer landen kann, was er sich als frisch Diplomierter als beruflichen Lebensweg vorgestellt haben mag; wie wichtig also die wissenschaftlichen Grundlagen sind, die ihm als Rüstzeug ermöglichen, all den Aufgaben gerecht zu werden, die das Leben unerwarteterweise an ihn stellen kann. So betrachtet glauben wir, dass dieses Sonderheft auch über den Kreis der Nächstbeteiligten hinaus ein allgemeines Interesse beanspruchen darf und darin seine Rechtfertigung findet. C. J.

Les vibrations transversales des cordes pesantes verticales

Par HENRY FAVRE, Dr. ès sc. techn., professeur à l'E. P. F., Zurich

Les vibrations transversales d'une corde homogène soumise à une traction constante ont été l'objet de nombreuses études théoriques. D'Alembert, Euler, D. Bernoulli et Lagrange ont consacré à ce sujet des mémoires qui figurent parmi les plus belles pages scientifiques du XVIIIe siècle.

Euler[1]) et, longtemps après lui, Lord Rayleigh[2]) ont étudié le problème plus général des vibrations transversales d'une corde de traction constante mais de masse par unité de longueur variable. Nous nous proposons d'examiner ici le problème inverse, celui où la masse par unité de longueur est constante mais *la traction variable le long de la corde.*

Ce cas est fréquent dans les applications. Considérons en effet une corde verticale de longueur h, tendue entre deux points fixes A, B (fig. 1). Supposons-la tout d'abord à l'état de repos. La traction en un profil X sera

$$S = S_0 + \mu g x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

où S_0 désigne la traction au milieu 0, μ la masse par unité de longueur (supposée constante), g l'accélération de la pesanteur et x la distance OX. La traction de cette corde est variable. C'est une fonction linéaire de x. Aux extrémités A et B elle a pour valeur

$$S_A = S_0 - \frac{1}{2}\mu g h \qquad S_B = S_0 + \frac{1}{2}\mu g h \quad . \quad . \quad (2)$$

Par exemple, pour $h = 100$ m, $\mu g = 1$ kg/m (câble d'acier d'environ 16 mm de diamètre) et $S_0 = 500$ kg, on aura $S_A = 500 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 100 = 450$ kg et $S_B = 500 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 100 = 550$ kg. La traction en B est 22 % plus grande qu'en A. Si cette corde vibre transversalement, son mouvement sera régi par d'autres lois que dans le cas des cordes homogènes de traction constante: d'où l'utilité du problème posé.

Dans la première partie de cette étude, nous établissons l'équation différentielle régissant les vibrations transversales des cordes tendues quelconques, hétérogènes et de traction variable. Dans la seconde, nous déterminons une solution approchée de cette équation, dans le cas où μ est constant et S une fonction linéaire de x (corde verticale homogène pesante). La troisième partie est consacrée à l'interprétation physique de la solution trouvée; la quatrième à l'examen de quelques vibrations simples. Dans la cinquième, nous étudions le cas des ondes stationnaires.

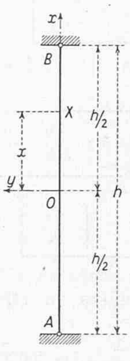

Fig. 1

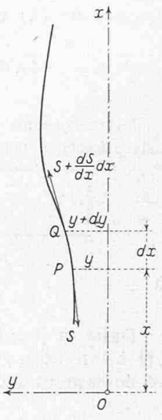

Fig. 2

1. Equation différentielle d'une corde hétérogène soumise à une traction variable.

Soit une corde hétérogène animée de vibrations transversales autour d'une position d'équilibre rectiligne. Choisissons un système cartésien rectangulaire x, y dans le plan du mouvement, l'axe des x coïncidant avec la corde à l'état de repos (fig. 2). Désignons par x, y les coordonnées d'un point quelconque P, par $x + dx$, $y + dy$ celles d'un point infiniment voisin Q.

Nous ferons au sujet du mouvement les mêmes hypothèses que pour les cordes homogènes de traction constante: 1°) la vibration transversale est infiniment petite: P se déplace très peu sur une parallèle à y. 2°) l'angle que fait la tangente en P avec l'axe x est infiniment petit quel que soit le temps t.

On déduit immédiatement de ces hypothèses que $\overline{PQ} = dx$ (aux infiniment petits du troisième ordre près): la longueur d'un élément quelconque de corde reste constante pendant le mouvement. D'autre part la composante de l'accélération de PQ suivant x est nulle. La traction est donc indépendante du temps mais peut dépendre de x. Soit S sa valeur en P. En Q elle sera $S + \frac{dS}{dx}dx$. S ainsi que la masse par unité de longueur μ sont des fonctions données de x. Remarquons que les angles de la tangente avec l'axe x, en P et Q, sont respectivement $\frac{\partial y}{\partial x}$ et $\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)dx$.

La somme des projections, sur l'axe y, des forces agissant sur l'élément PQ est, aux infiniment petits d'ordres supérieurs près:

$$\left(S + \frac{dS}{dx}dx\right)\left[\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)dx\right] - S\frac{\partial y}{\partial x} = $$
$$= \left(S\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{dS}{dx}\frac{\partial y}{\partial x}\right)dx$$

d'où l'équation du mouvement:

$$\underbrace{\mu\, dx}_{\text{masse}}\,\underbrace{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}_{\text{accélération}} = \underbrace{\left(S\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{dS}{dx}\frac{\partial y}{\partial x}\right)dx}_{\text{force}}$$

ou bien

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{S}\frac{dS}{dx}\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{1}{\left(\frac{S}{\mu}\right)}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0} \quad . \quad . \quad (3)$$

C'est une équation aux dérivées partielles du second ordre, où y désigne la fonction inconnue des deux variables indépendantes x, t. Elle est linéaire, mais à coefficients variables, puisque $\frac{1}{S}\frac{dS}{dx}$ et S/μ sont des fonctions de x. En faisant $S =$ const. et $\mu =$ const. on retrouve l'équation classique des cordes vibrantes

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

---

1) «Recherches sur le mouvement des cordes inégalement grosses» par *M. Euler.* Mélanges de philosophie et de mathématique de la Société Royale de Turin, 1766.

2) «Theory of Sound» 1877 (1ère édition). Trad. allem. par le Dr. *Neesen:* «Die Theorie des Schalles», Braunschweig, 1879.