**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
**Band:** 123/124 (1944)
**Heft:** 21

**Artikel:** Knickstabilität
**Autor:** Brunner, J.
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-53955

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 02.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

INHALT: Knickstabilität. — Das neue Tiefkühl-Lagerhaus der Brauerei Hürlimann AG., Zürich. — Wohnhaus «Moncucchetto» der Familie A. C. L., Lugano. — Photo- und Katasterpläne mit photogrammetrisch erstellten Höhenkurven. — Mitteilungen: Probleme der Ortsplanung. Massivbaracken. — Wettbewerbe: Erweiterung des Kunsthauses Zürich. Kirchgemeindehaus Langenthal. — Nekrologe: Fritz Zimmermann. Adolf Bräm. — Literatur.
Mitteilungen der Vereine.

Band 123 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich
Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet Nr. 21

# Knickstabilität

Von Ing. Dr. J. BRUNNER, EMPA, Zürich

[Die vorliegende Abhandlung ist gedacht als einleitendes Kapitel einer grösseren Schrift: «Die Knickstabilität der technisch wichtigsten Baustoffe» die von der Eidg. Materialprüfungs- und Versuchsanstalt herausgegeben werden wird.]

Die mangelnde Knicksicherheit von auf Druck beanspruchten Konstruktionsgliedern hat sich im Ingenieurbauwesen oft verhängnisvoll ausgewirkt. Dreiviertel aller Einstürze im Eisen-Brückenbau, im Holz- und Eisenhochbau sind auf ungenügende Knicksicherheit zurückzuführen. Der Knickgefahr ausgesetzten Baugliedern ist daher die grösste Sorgfalt bei der Berechnung und konstruktiven Durchbildung zuzuwenden. Insbesondere muss dem die Knicksicherheit vermindernden Einfluss des exzentrischen Kraftangriffes die gebührende Beachtung zuteil werden.

Die Frage der Knickstabilität hatte die Eidg. Materialprüfungs- und Versuchsanstalt (Zürich) schon unter ihrem ersten Direktor, Prof. L. von Tetmajer ganz besonderes Interesse gewidmet, wie die Veröffentlichungen aus den Jahren 1889/1901 beweisen. Auf Grund der gross angelegten Versuche wurden die bekannten Knickformeln aufgestellt, die in ihrem empirischen Bereich heute noch volle Anerkennung geniessen.

Die Versuche über Knickfestigkeit wurden in den Jahren 1925/1940 wieder aufgenommen und dabei vor allem der Frage des exzentrischen Knickens Aufmerksamkeit geschenkt, wie denn überhaupt in diesen Jahren an den Internat. Brückenbau-Kongressen diese Fragen mehrfach behandelt wurden. Es ergab sich die Möglichkeit, die Knickfestigkeit wie beim zentrischen Lastangriff auch bei exzentrischem Lastangriff aus dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm abzuleiten, was z. B. für Baustoff mit neuen Eigenschaften (hochwertiger Baustahl, Si-Stahl, Gusstahl, Leichtmetalle, Holz verschiedener Qualität, Beton verschiedener Qualität usw.) von Wichtigkeit ist. Es können die Knickspannungs-Linien theoretisch abgeleitet werden. Die Versuchsreihen dienen dann zur praktischen Ueberprüfung der Theorien. Die physikalisch richtige Erfassung des Knickproblems gestattet auch statisch verwickeltere Verhältnisse zu behandeln. So wurden untersucht: Knicken bei nach beiden Hauptaxen exzentrischem Lastangriff, Knicken bei exzentrischem Lastangriff in einer Hauptaxe und Knickrichtung nach der andern Hauptaxe, Knicken bei gleichzeitig wirkender Seitenlast; Einfluss der Querschnittform. Auch an die Frage der gegliederten Stäbe und der Rahmenstäbe wurde herangetreten und die Theorie durch Versuche überprüft[1]).

## Das Wesen des Knickens

In den Knickerscheinungen erkennen wir ein Stabilitäts-Problem, das sich nicht auf das Erreichen einer durch das Material gegebenen, bestimmten Spannung zurückführen lässt; *nicht das Auftreten einer gewissen Randfaserspannung*, etwa der Proportionalitätsgrenze, der Fliessgrenze oder der Bruchgrenze führt den Knickzustand herbei, sondern das Eintreten der instabilen Gleichgewichtslage des Stabes für die äussern belastenden Kräfte und die innern elastischen Reaktionskräfte (bei einer virtuellen Ausbiegung). Ein sehr schlanker Stab knickt schon weit vor dem Erreichen der Proportionalitätsgrenze aus, ein sehr gedrängter Stab überwindet die Fliessgrenze. *Die zulässige Belastung bei Knickerscheinungen ist also herzuleiten aus der kritischen Belastung*, die die Instabilität erzeugt. Erst aus der Knicklast kann sekundär, unter Einsetzen eines Sicherheitsfaktors eine zulässige Beanspruchung rechnerisch hergeleitet werden.

Wir bemerken hier, dass der Baustatik eben zwei Kriterien dienen: Einerseits muss das von äussern und innern Kräften gebildete Gleichgewicht stabil sein, anderseits dürfen die zu definierenden Spannungen gewisse vom Baustoff abhängige Grenzen nicht überschreiten. Entsprechend gliedert sich die ganze Festigkeitslehre in eine «Stabilitätstheorie» und eine «Spannungstheorie» (Handbuch Schleicher). Für sehr gedrungene Stäbe geht, wie wir unten bemerken, das Stabilitätsproblem in ein Spannungs-(Druckfestigkeits)-Problem über. Das Stabilitätsproblem bietet aber das umfassende Kriterium, in dem erweiterten Sinne, dass auch das Zerreissen oder Zerdrücken einer Faser Unstabilität hervorrufen kann.

Zur Orientierung wollen wir an dieser Stelle den allgemeineren Begriff der Stabilität, wie ihn die allgemeine Physik lehrt, in Betracht ziehen. Den einfachsten Fall der drei Gleichgewichtslagen zeigt ein körperliches Pendel, je nachdem es oberhalb oder unterhalb des Schwerpunktes oder in diesem selbst aufgehängt ist. Analoge Beispiele ergeben Körperketten, die Schiffstabilität, die Standfestigkeit von Stützmauern usw.

Die Statik kennt zur Charakterisierung der Stabilität das *energetische Mass* (positive und negative Arbeit, die bei einer virtuellen Bewegung in Erscheinung tritt), das *dynamische Mass* (die Grösse einer bestimmten Kraft oder Belastung, die Bewegung erzeugt). Auf einen festen, unelastischen Körper, z. B. eine Stützmauer angewendet, zeigen sich folgende Verhältnisse (Abbildung 1): Das energetische Mass der Standfestigkeit ist hier $M_{krit} = G\,(r - h)$. Im vorliegenden Fall ist für eine Bewegung positive Arbeit zu leisten. Der Standsicherheitsgrad beträgt:

$$n = \frac{M_{krit}}{M_{vorh}}$$

Das dynamische Mass der Standfestigkeit ist $P_{krit} = \frac{G\,b}{h}$.

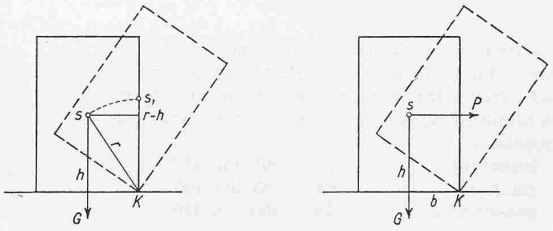


Abb. 1. Energetisches $G\,(r\text{-}h)$ und dynamisches $P$ Mass der Standfestigkeit

$P_{krit}$ verursacht eine Bewegung. Der Standsicherheitsgrad beträgt:

$$n = \frac{P_{krit}}{P_{vorh}}$$

Der Fall der elastischen Stabilität (es hat sich hier das Wort «Stabilität» statt «Standfestigkeit» in die Literatur eingebürgert) tritt in Erscheinung beim Knicken eines Stabes. Ein gelenkig gelagerter, mit $P$ belasteter Stab ist, sofern er eine gewisse Länge nicht überschreitet, im stabilen Gleichgewicht und wird nicht ausknicken. (Wir *variieren* hier gedanklich *die Länge* des Stabes und behalten $P$ bei, um die Spannung $\sigma = \frac{P}{F}$ konstant zu halten und zu zeigen, dass nicht die Spannung für die Stabilität massgebend ist). Ueberschreitet der Stab aber diese Länge $l_k$ bei der Last $P$, so knickt er aus. Das energetische Mass der Stabilität erweist, dass von dieser Länge $l_k$ ab die elastische Energie, die einer Ausbiegung des Stabes entspricht, kleiner ist als die potentiale Energie, herrührend von der mit der Ausbiegung verbundenen Senkung des belastenden Gewichtes. In der Folge benutzen wir aber in dem vorliegenden Bericht *nur das «dynamische Mass» der Stabilität* durch Bestimmung der Kraft $P$, bei der eine Bewegung, ein Ausweichen des Stabes (von konstanter Länge) eintreten, d. h. die stabile Lage in eine instabile übergehen würde. Es wird also die Knickkraft $P_k$ bestimmt. Wir legen hier die grundsätzlichen Verhältnisse etwas schematisiert dar, um erst später auf die Verfeinerungen einzugehen.

Stellen wir uns einen vorerst sehr schlanken Stab vor, und geben ihm eine virtuelle Ausbiegung, z. B. durch eine störende Seitenkraft, so erfolgt nach deren Wegnahme wieder eine Rückkehr in die gerade Lage, solange die belastende Kraft $P$ kleiner bleibt als die kritische Last $P_k$ und wenn in keinem Stab-Element die Proportionalitätsgrenze überschritten wurde; eine wenigstens teilweise Rückkehr, wenn eine Ueberschreitung vorkam. Das dem Ausbiegen entgegenwirkende innere Reaktions-Moment aus den Elastizitätskräften — dessen quantitative Bestimmung wir später geben werden — wächst stärker an als

[1]) Vergl.: *M. Roš* und *J. Brunner*. Die Knicksicherheit von an beiden Enden gelenkig gelagerten Stäben aus Konstruktionsstahl.
*M. Roš*. Abhandlung im Bericht der Internat. Tagung für Brücken- und Hochbau, Wien 1928. — Abhandlung im Kongressbericht der Internat. Tagung für Brücken- und Hochbau, Paris 1932.

das äussere belastende Moment $Pf$, wobei $f$ der Ausbiegungs-Pfeil ist. Ueberschreitet $P$ den Wert $P_k$, so wächst bei einer virtuellen Ausbiegung das äussere Moment $P\,f$ stärker an als das innere. Der Stab kommt in labile Gleichgewichtslage; bei gleich starkem Anwachsen hätten wir indifferente Gleichgewichtslage. Labil und indifferent fassen wir zusammen unter der Bezeichnung instabil. Die bekannte Euler'sche Formel:

$$P_k = \frac{\pi^2 EJ}{l_k^2}$$

gibt uns diese kritische Last, vorerst für Knicklängen, bei denen unter der kritischen Last die *Proportionalitätsgrenze des Materials nicht überschritten wird.*

Wir haben bei unsern Ueberlegungen je nach Erfordernis für einen als gegeben angenommenen Stabquerschnitt entweder die Stabkraft $P$ oder die Stablänge $l$ variiert, um den kritischen Wert dieser beiden Grössen zu erhalten. Einem bestimmten $P$ entspricht eine kritische Länge $l_k$ und einem bestimmten $l$ entspricht eine kritische Last $P_k$. Um uns nun von der Grösse des Stabquerschnittes frei zu machen, führen wir statt der Kraft $P$ die Querschnittspannung $\sigma = \frac{P}{F}$ und statt der Stablänge $l$ den Schlankheitsgrad des Stabes, also $\frac{l}{i}$ ein. Die Eulerformel ergibt dann:

$$P = \sigma F = \frac{\pi^2 E i^2 F}{l^2}$$

$$\sigma = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{i}\right)^2}$$

Die Schlankheitsbereiche, in denen unter der kritischen Last die Proportionalitätsgrenze nicht überschritten wird, entsprechen ungefähr folgenden Schlankheitsgraden bei gelenkiger Lagerung der Stabenden:

| | |
|---|---|
| Baustahl . . . . | $l/i >$ 105 bis 110 |
| Bauholz . . . . | $l/i >$ 85 bis 100 |
| Eisenbeton . . . | $l/i >$ 160 bis 190 |

*Unter*schreitet dagegen der Schlankheitsgrad eine gewisse Grenze, so wird für die Tragkraft nicht mehr die Knickstabilität, sondern die «Druckfestigkeit» des Materials massgebend, analog der frühern Bemerkung über die Stabilität einer Stützmauer, sodass z. B. das Abdrücken einer Kante ausschlaggebend werden kann, wobei also nicht ein Stabilitäts-, sondern ein Spannungs-Problem vorläge.

Eine Knickgefahr tritt bei unsern gebräuchlichsten Baustoffen beim Unterschreiten etwa folgender Schlankheitsgrade nicht mehr auf:

| | |
|---|---|
| Baustahl . . . . . | $l/i <$ 10 bis 15 |
| Bauholz . . . . . | $l/i <$ 20 bis 25 |
| Eisenbeton . . . . . | $l/i <$ 35 bis 50 |

In den dazwischen liegenden Schlankheitsgraden, bei Ueberschreitung der Proportionalitätsgrenze, muss an Stelle des Elastizitätsmoduls $E$ ein entsprechender Modul $T_k$ treten, den wir weiter unten ermitteln.

Die Eulerformel mit dem Elastizitätsmodul $E$ und die erweiterte Eulerformel mit dem Knickmodul $T_k$ geben für den zentrisch belasteten, geraden Stab und für die im Bauwesen gewöhnlich vorkommenden Schlankheitsgrade die praktisch zutreffenden Lasten. Für extrem schlanke Stäbe, wie sie in der Baupraxis aber selten vorkommen (lange Stangen, dünne Bretter usw.) wird bemerkbar, dass die Knicklast nicht ganz vom Ausbiegungspfeil $f$ unabhängig ist: der sogenannte «*Grashof-Effekt*» tritt in Erscheinung. Die Eulerformel wurde unter gewissen vereinfachenden Annahmen abgeleitet. Die vollständigere «Grashof-Formel» hat gegenüber der einfacheren «Eulerformel» weniger praktische Folgerungen zum Zwecke, als eine begriffliche Abklärung.

Der Grashof'sche Ausdruck, wie er durch genaue Integration der Differentialgleichung für das Gleichgewicht eines virtuell ausgebogenen Stabes gefunden wird, lautet:

$$P_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}\left[1 + \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{f}{l}\right)^2 + \cdots\right]$$

Das erste Glied der Reihe ist der Euler'sche Ausdruck. Wir sehen, dass die Tragkraft etwas abhängig ist vom Ausbiegungs-Pfeil und dass unser Instabilwerden eigentlich ein

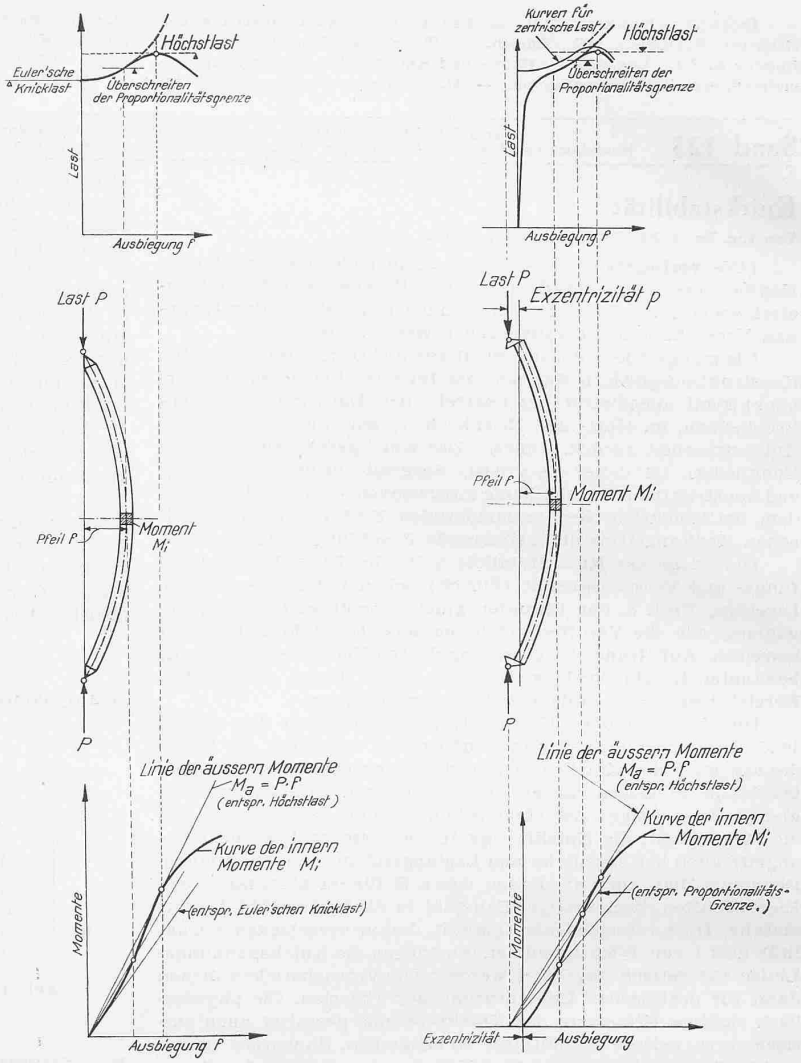


Abb. 2. Prinzipielle Verhältnisse der Knickstabilität Abb. 3

«Verzweigungspunkt» der Gleichgewichtslage ist. Die *gerade Form* des Stabes wird eine labile Form und es stellt sich ein kleiner Ausbiegungspfeil ein. (Rein theoretisch, bei idealer Homogenität und Geradheit des Stabes, könnte diese labile Lage auch für höhere Lasten bestehen bleiben; zu vergleichen etwa mit der labilen Lage eines auf die Spitze gestellten Bleistiftes.) Nun aber haben alle unsere Baustoffe eine Proportionalitätsgrenze, d. h. das Hooke'sche Gesetz der Proportionalität zwischen Spannung und Dehnung gilt nicht unbeschränkt, nach Ueberschreiten derselben strebt die Tragfähigkeit rasch einem Maximum zu und fällt dann ab (Abb. 2).

Für Schlankheitsgrade der Baupraxis kommt die Erhöhung der Tragkraft durch den «Grashof-Effekt» gar nicht in Frage. Es kann sich bis zum Erreichen der Höchstlast kein in Rechnung fallender Ausbiegungspfeil entwickeln und die Euler'sche Knickkraft ist die praktische Tragkraft. Um einen zahlenmässigen Begriff zu erhalten, sei folgendes angeführt: Für einen Eisenstab vom Schlankheitsgrade $l/i = 500$ beträgt bei einer Ausbiegung bis zum Erreichen der Proportionalitätsgrenze die Erhöhung der Tragkraft 0,8 ‰ (Versuche mit Flacheisenstäben an der EMPA).

Wenden wir uns dem *exzentrischen Knicken* zu (Abb. 3). Ein exzentrisch gedrückter Stab biegt sich mit steigender Last gleich von Anfang an aus. Er besitzt einzig die gebogene Form als Gleichgewichtslage. Für ein Material, das unbeschränkt dem Hooke'schen Gesetze gehorchen würde, könnte man die Last steigern, bis in einer Randfaser die Bruchspannung erreicht wäre. Erst die Abweichung von der Hooke'schen Gesetzmässigkeit, die Unproportionalität zwischen Spannung und Dehnung, *bietet die Voraussetzung für die Existenz eines Stabilitätsproblems beim exzentrischen Knicken.*

Das Kriterium für das Eintreten der Unstabilität ist die Erscheinung, dass bei einer Pfeilvergrösserung der gebogenen

Axe das äussere Moment stärker wächst als das innere, das äussere Moment also dem innern überlegen wird. Wir werden uns diese Stabilitätsverhältnisse in der Folge am besten graphisch vor Augen führen, wo es sich z. B. zeigt, dass die Tangente (den Verlauf der äussern Momente darstellend) gelegt an die Kurve der innern Momente, die kritische Exzentrizität ausscheidet (Abb. 3). Wird die Exzentrizität gleich Null, so haben wir zentrisches Knicken. Das *zentrische Knicken ist ein Spezialfall des exzentrischen Knickens.*

Anhand der graphischen Darstellung (Abb. 2 und 3) überblicken wir die Stabilitätsverhältnisse in *qualitativer Beziehung*, während die *zahlenmässigen Beziehungen* später gegeben werden. Für die zwei skizzierten Stäbe sind unten und oben je zwei Koordinatensysteme gezeichnet. Beide haben als Abszissenaxe die Pfeilausbiegungen in Stabmitte. Die obern Systeme zeigen als Ordinaten die Traglasten, die untern die dabei auftretenden äussern und innern Momente. Alles ist in *stark verzerrtem Massstabe* gezeichnet.

Für *zentrische Belastung:* Die erste Figur zeigt, dass der Stab keine Ausbiegung aufweist bis zum Erreichen der Euler-schen Knicklast. Für eine weitere Steigerung der Last wird die gerade Stabform unstabil, der Stab weicht aus bis zu einem Pfeil, der durch die Grashof'sche Gleichung gegeben ist. Wäre das Stabmaterial unbegrenzt proportional-elastisch, so würden Last und Pfeil nach der punktierten Kurve im Zusammenhang stehen. Wird nun die Proportionalitätsgrenze überschritten, so wächst die Tragkraft in schwächerem Masse, erreicht einen Höchstwert und fällt für weitere Ausbiegungen ab.

Im unteren Koordinatensystem zeigt die Kurve das einem bestimmten Pfeil entsprechende innere Moment. Die Neigung der Tangente an diese Kurve im Nullpunkt gibt uns das Mass der Euler'schen Knickkraft. Für diese Kraft wachsen bei einer unendlich kleinen Ausbiegung des Stabes inneres und äusseres Moment in gleichem Masse: der Stab ist für eine unendlich kleine Ausbiegung im indifferenten Gleichgewicht. Für eine erhöhte Last, $P' > P$, dreht sich die $M_a$-Linie gemäss $M_a = P'f$ in unserer graphischen Darstellung etwas auf; das äussere Moment wächst zunächst stärker an als das innere; erst beim Schnittpunkt der Geraden mit der $M_i$-Kurve stabilisiert sich der Stab wieder. Wird die Proportionalitätsgrenze überschritten, so steigt von hier an die $M_i$-Kurve in schwächerem Masse an; die neue Tangente an die Kurve, zeigt die steilst mögliche Lage der $M_a$-Linie, bei der noch Gleichgewicht vorhanden sein kann. Für eine steilere Lage der $M_a$-Linie (entsprechend einer noch grösseren Last) findet sich kein entsprechendes inneres Moment mehr: der Stab knickt aus.

Für *exzentrische Belastung:* Schon mit Beginn der Belastung muss sich der Stab ausbiegen, damit ein $M_i = M_a$ erhalten wird: Schnittpunkt der Geraden mit der Kurve. Der Schnittpunkt gibt ein stabiles Gleichgewicht für eine Pfeilvergrösserung. Eine Lastvergrösserung bedingt ein Aufdrehen der $M_a$-Linie: die Tangente gibt die labile Gleichgewichtslage. In unserer Abb. 3 drückt sich in der Doppelkrümmung der Momenten-Kurve (gegen die Abszissenaxe zuerst konvex) in stark verzerrtem Masstab der Grashof-Effekt aus. Für unsere praktisch vorkommenden Schlankheitsgrade ist diese Doppelkrümmung durchaus durch eine gegen die Abszissenaxe konkave Linie ersetzbar.

## Kurzer Abriss der geschichtlichen Entwicklung

Die mathemat. Erfassung des zentr. Knickproblems gelang zuerst *Euler* (1744) [2]), indem er das erste, wichtigste Glied der genaueren Gleichung von *Grashof* (1866) aufstellte. Die Formel blieb jedoch so lange ohne durchschlagende Bedeutung für die Praxis, als sie nur den Bereich der proportionalen Formänderungen erfasste. Der Ingenieur, gewohnt, nur mit der Hooke-schen und Navier'schen Hypothese zu rechnen, vermochte lange Zeit die Formel im plastischen Bereiche, der für das Knicken der wichtigste ist, nicht anzuwenden, bis *Engesser* (1889) die Einführung eines vom Druck-Stauchungs-Diagramm abhängigen Knickmoduls $T$ anregte. *Jasinski* (1895) präzisierte diesen Vorschlag, indem er auf das quasi-elastische Verhalten auf der Entlastungsseite hinwies, doch erst durch die Arbeiten von *v. Kármán* (1910) wurde die Forschungskette, die sich auf die Frage des zentrischen Knickens bezieht (das exzentrische Knicken behandelte Kármán nur nebenbei) zu einem gewissen Abschluss gebracht.

Inzwischen aber hatte die Praxis ein immer dringender werdendes Bedürfnis nach sicheren Berechnungsgrundlagen gezeigt.

[2]) Vgl. *F. Stüssi:* 200 Jahre Euler'sche Knickformel, S. 1* lfd. Bd. Red.

Die Gruppe der *Navier-Schwarz-(1854)-Rankine'schen* Knick-Formeln von der Form

$$P = \frac{k}{1 + c\left(\frac{l}{i}\right)^2}$$

erwies sich sowohl praktisch als theoretisch als unzulänglich. Unter ähnlichen Mängeln litt auch die Gruppe der Knickformeln nach *Johnson-Ostenfeld* (1890), die im Nicht-Euler'schen Bereich eine Parabel von der Form $P = k\left[1 - c\left(\frac{l}{i}\right)^2\right]$ einschaltete.

Unter diesen Verhältnissen musste zu gross angelegten Versuchen geschritten werden. An erster Stelle müssen hier erwähnt werden die Versuche, die Prof. *von Tetmajer* an der Eidg. Materialprüfungsanstalt in den achtziger- und neunziger Jahren durchführte und die dann zu der heute noch wohlbekannten, für die Praxis recht brauchbaren «Tetmajer'schen Geraden» führten. Weitere ausländische Versuche sind ihm gefolgt und auch Zürich hat die Tetmajer'schen Arbeiten und die Tetmajer'sche Tradition wieder aufgenommen und dabei vor allem der Frage des exzentrischen Knickens, das ja in der Praxis fast immer vorhanden ist, Beachtung geschenkt. Das Problem des exzentrischen Knikkens wurde ebenfalls schon von Tetmajer Ende der achtziger Jahre behandelt. Er gelangte dabei zu empirischen Formeln, die sich auch den heutigen Versuchsergebnissen gut anschmiegen.

*Köchlin* stellte dann 1899 seine Exzentrizitätskurven auf, teilweise theoretisch entwickelt, teilweise auf Grundlage der Tetmajer'schen Versuche, und später (1910) behandelte auch von Kármán die Frage des exzentrischen Knickens, gab aber, wie erwähnt, nur Knicklastwerte für sehr kleine Exzentrizitäten.

*Anmerkung Grashof* gibt die erwähnte schärfere Ableitung in seiner «Festigkeitslehre», 1866. Bei der Euler'schen Ableitung wudre die Form der Biegungslinie aus der Beziehung $\frac{dy^2}{d^2x} = \frac{1}{\varrho}$ als Sinuslinie gefunden. Der genauere Ausdruck für den Krümmungsradius aber lautet:

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Ferner wurde für die Sehne die konstante Bogenlänge eingesetzt, in der Differentialgleichung also $ds = dx$, genau aber ist

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \qquad \text{(Abb. 4)}$$

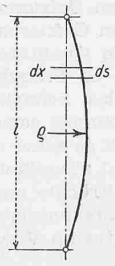

Abb. 4

Unter Berücksichtigung dieser beiden Verschärfungen ergibt sich die Knicklast zu:

$$P = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}\left[1 + \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{f}{l}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$= P_E\left[1 + 1{,}23\left(\frac{f}{l}\right)^2 + \cdots\right]$$

$P_E$ = Eulersche Knicklast

Die getrennte Betrachtung der beiden Einflüsse ergibt, dass der Krümmungsradius-Einfluss allein eine etwas kleinere Knicklast bedingen würde als die Euler'sche Last, weil die Krümmung in Stabmitte etwas kleiner ist als nach Euler. Stärker aber ist der Einfluss der Sehnenverkürzung, der die Knicklast vergrössert. Eine elementare Ableitung des Einflusses der Sehnenverkürzung ergibt sich wie folgt:

Zwischen Bogen $l$ und Sehne $d$ besteht die angenäherte Beziehung

$$d^2 = l^2 - \frac{16}{3} f^2$$

Die Sehnenlänge in die Euler'sche Formel eingesetzt ergibt:

$$P = \frac{\pi^2 EJ}{l^2 - \frac{16}{3} f^2} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \frac{1}{1 - \frac{16}{3}\left(\frac{f}{l}\right)^2}$$

den zweiten Faktor nach dem binomischen Satz entwickelt:

$$P = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}\left[1 + 5{,}3\left(\frac{f}{l}\right)^2 + \cdots\right]$$

Die Werte sind unter Berücksichtigung des Krümmungs-Radius:

$$P = \backsim P_E\left[1 - 4\left(\frac{f}{l}\right)^2\right]$$

unter Berücksichtigung der Sehnenverkürzung:

$$P = \backsim P_E\left[1 + 5{,}3\left(\frac{f}{l}\right)^2\right]$$

Resultierend also: $P = \backsim P_E\left[1 + 1{,}3\left(\frac{f}{l}\right)^2\right]$