

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung

**Band:** 127/128 (1946)

**Heft:** 14

**Artikel:** Ueber das Verhältnis der Betriebsdrehzahl zur kritischen Drehzahl bei grossen vielstufigen Zentrifugalpumpen

**Autor:** Voska, A.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-83912>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 17.11.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Ueber das Verhältnis der Betriebsdrehzahl zur kritischen Drehzahl bei grossen vielstufigen Zentrifugalpumpen

Von Dipl. Ing. A. VOSKA, Escher Wyss A.-G., Zürich

## 1. Problemstellung

Beim Projektieren grosser, vielstufiger Zentrifugalpumpen ergeben sich zuweilen kritische Drehzahlen, die im ersten Entwurf nahe an die Betriebsdrehzahl heranreichen. Der Fall kann besonders bei grossen Förderhöhen auftreten, weil dann die hohen Stufenzahlen zu langen Wellen führen. Sobald man es mit Grossausführungen (z. B. Speicherpumpen) zu tun hat, ist ein sorgfältiges Eingehen auf dieses Betriebsproblem erforderlich, handelt es sich doch dabei um Antriebsleistungen von Zehntausenden von PS (Bild 1). Aber auch die grossen Speisepumpen von Höchstdruck-Kesselanlagen bedürfen in dieser Hinsicht einer gesonderten Behandlung.

Es entsteht so die Frage nach dem zulässigen Verhältnis  $e$  der Betriebsdrehzahl zur kritischen Drehzahl. In der Praxis kennt man hierfür Werte, die sich erfahrungsgemäss bewährt haben. So setzt *Flügel* [1]\* bei Dampfturbinen die Grenze auf 0,83 für unterkritischen und 1,43 bzw. 2,5 für überkritischen Betrieb fest, während *Eck* [2] bei Turbokompressoren als überkritische Grenzen die Werte 1,3 bzw. 2,8 nennt. Die Eigenart der Wellenkonstruktion dürfte hierbei eine grosse Rolle spielen. Man kann ähnliche Grössen auch für Zentrifugalpumpen vermuten und dementsprechend verwenden, weicht doch ihre Bauart im Prinzip nicht zu stark von der der genannten Maschinen ab. Im Folgenden sei nun versucht, diese Frage auf analytischem Wege zu lösen.

Als massgebendes Kriterium gelten die auf die Lager übertragenen Fliehkräfte; sind sie es doch, die je nach ihrer Grösse den guten oder schlechten «Gang» der Maschine bestimmen. Der Begriff «Unbalanz», gleichbedeutend mit einer Exzentrizität des Massenschwerpunktes des umlaufenden Rades, spielt hierbei eine wesentliche Rolle. Bei der meist üblichen Auswuchtmethode am «Dorn» — es sei lediglich vom statischen Verfahren die Rede — wird infolge der Reibung zwischen Dorn und Schiene ein bestimmter Gewichtsbeitrag nicht mehr erfasst. Dieser, in den folgenden Betrachtungen auf den Aussendurchmesser des Laufrades bezogene Rest bestimmt die Grenze und damit die kleinst mögliche Exzentrizität, mit der auf jeden Fall noch gerechnet werden muss und die — abgesehen von hydraulischen Einflüssen — das dynamische Verhalten des Rotors bestimmt. So lautet das Problem, näher gestellt: Gegeben eine Welle mit einer Anzahl Laufräder (Bild 2) und einer bestimmten Exzentrizität; wie nahe darf die Betriebsdrehzahl an die kritische heranreichen, ohne dass die Auslenkungen und dynamischen Lagerbelastungen das zulässige Mass überschreiten? Dem Wesen des Problems entsprechend können keine streng begrenzten Werte erwartet werden.

Zur Bestimmung der kritischen Drehzahl benützt man mit Vorteil die graphische Methode, die die Durchmesserabstufungen einer Welle zu berücksichtigen gestattet. Für die vorliegende Aufgabe, die analytisch behandelt werden muss, wird nur die glatte Welle in Betracht gezogen. Die Abweichung von der tatsächlichen Ausführung spielt hierbei keine wesentliche Rolle, da in beiden Fällen die für ein bestimmtes Verhältnis  $\omega/\omega_k$  gefundenen Werte wohl nur unbedeutend voneinander abweichen dürften und zwar um so weniger, als die in Frage kommenden Wellen in ihrem massgebenden Hauptteil meist einen nahezu konstanten Durchmesser aufweisen.

## II. Die Exzentrizität

An einer aus sonst homogen verteiltem Material gedachten Scheibe vom Gewicht  $G_r$  und dem Durchmesser  $D_2 = 2r$  sei am

\*) Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf die Anmerkungen am Schluss des Aufsatzes.

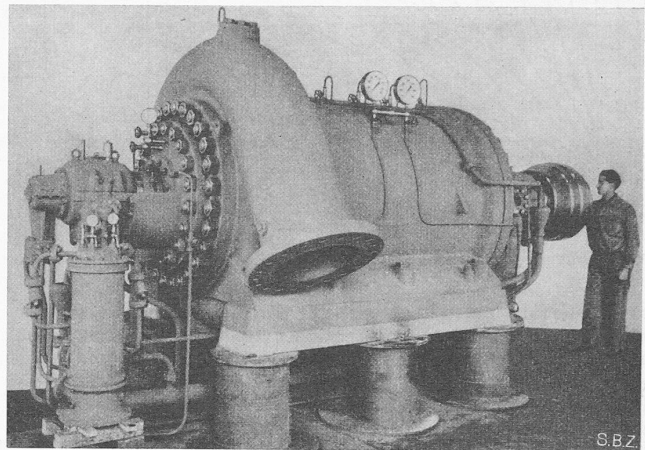


Bild 1. Siebenstufige Escher Wyss-Speicherpumpe für 670 m Förderhöhe und 8200 PS Antriebsleistung

Umfang ein Gewicht  $U$  angebracht (Bild 3).  $U$  entspreche dem Restwert, der — gewissermassen als zulässige Toleranz — beim Auswuchten übrig bleibt. Der Schwerpunkt wird hierbei um den Betrag  $e_0$  verschoben, wobei für  $e_0$  gilt:

$$G_r e_0 = U (r - e_0)$$

sodass die Exzentrizität beträgt:

$$(1) \quad e_0 = \frac{U}{G_r + U} r = \frac{U}{G_r} r$$

Im Nenner darf  $U$  gegenüber  $G_r$  weggelassen werden. Die Welle selbst soll über die ganze Länge als ausgeglichen gelten. Die Formel kann ohne weiteres auf das Laufrad übertragen werden. Bild 4 gibt für verschiedene Werte von  $U$  und  $D_2$  die Exzentrizität  $e_0$ . Z. B. ist für  $D_2 = 800$  mm und  $U = 8$  gr  $e_0 = 0,014$  mm.

## III. Die elastische Linie und die Fliehkräfte der rotierenden Welle

Die durch die Fliehkräfte erzeugte elastische Linie der mit einer Anzahl Räder besetzten Welle kann analytisch nur nach Annahme einer bestimmten Schwerpunktsgruppierung ermittelt werden. Die besondere Art dieser Gruppierung ist auf die Grösse der Fliehkraft von wesentlichem Einfluss. Die Untersuchung bleibe auf die beiderseits frei aufliegende Welle von der Länge  $2l = L$  beschränkt. Sämtliche Auslenkungen sind von der Ruhelage aus zu messen; für die Rechnung ist es demnach ohne Belang, die Wellenmittellinie im Ruhezustand als gerade zu betrachten. Mit Vorteil geht man von den von *Stodola* [3] aufgestellten Grundlagen für die Berechnung rotierender Wellen aus. Gegeben sei der Fall der gleichmässig über die ganze Wellenlänge verteilten Gesamtmasse  $M$  mit in der gleichen Ebene liegenden Schwerpunkten und ihren Exzentrizitäten  $e_x$ . Die Mittellinie der Welle falle mit der  $x$ -Axe des Koordinatensystems zusammen. Für die Auslenkung  $y$  gilt dann die Differentialgleichung vierter Ordnung:

$$(2) \quad \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{m_1 \omega^2}{JE} (y + e_x)$$

Hierin bedeutet  $m_1$  die der Längeneinheit entsprechende Masse der Räder und der Welle,  $J$  das Trägheitsmoment des Wellenquerschnittes,  $E$  den Elastizitätsmodul des Materials und  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit. Aus der allgemeinen Gleichung (2) lassen

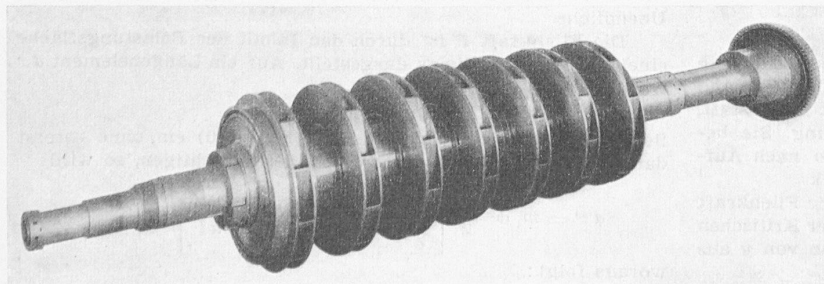
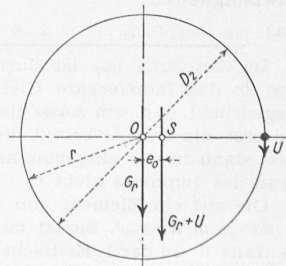


Bild 2 (links)  
Rotor der Speicher-  
pumpe Bild 1

Bild 3 (rechts)  
Exzentrizität  
als Folge der  
Unbalanz



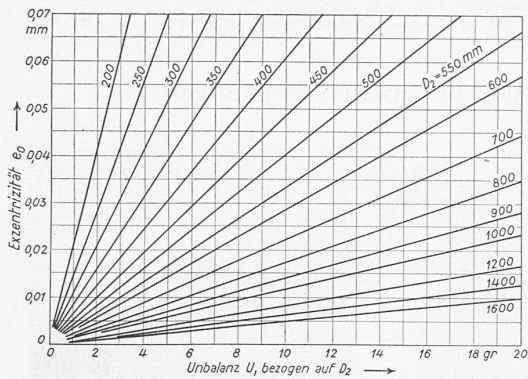


Bild 4. Abhängigkeit der Exzentrizität von Unbalanz und Raddurchmesser

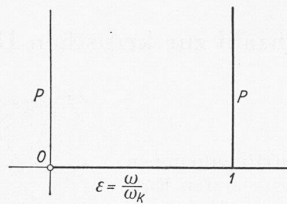


Bild 5. Verlauf der Fliehkraft für  $e_x = 0$  bei Wirkung eines Impulses

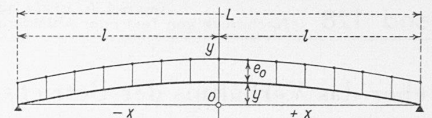


Bild 6. Schwerpunktsgruppierung für  $e_x = e_0 = \text{konst.}$

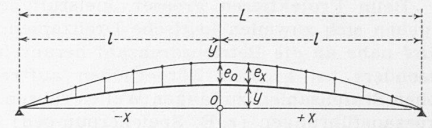


Bild 7. Schwerpunktsgruppierung für  $e_x = e_0 \cos \frac{\pi}{2l} x$

sich Sonderfälle ableiten, sobald für den Verlauf von  $e_x$  ein der rechnerischen Behandlung zugängliches Gesetz angenommen wird. Es sollen die von Stodola behandelten Fälle  $e_x = 0$  und  $e_x = \text{konst.}$  betrachtet werden, wobei sowohl als Ausgang zur Bestimmung der Fliehkraft, als auch im Interesse des Zusammenhanges jeweils eine kurze Wiedergabe der betreffenden Ableitungen notwendig ist. Als dritter Fall möge noch  $e_x = e_0 \cos \frac{\pi}{2l} x$  hinzutreten.

1. Fall: Vollkommen ausgewuchtete Welle,  $e_x = 0$   
Setzt man:

$$(3) \quad \frac{m_1 \omega^2}{J E} = k^4$$

so geht Gleichung (2) über in die homogene Differentialgleichung

$$(4) \quad \frac{d^4 y}{dx^4} - k^4 y = 0$$

Die Lösung ergibt sich bekanntlich durch Bildung der charakteristischen Gleichung. Sie stellt die Summe dar von vier partikulären Integralen mit konstanten Koeffizienten und lautet:

$$(5) \quad y = a e^{kx} + a' e^{-kx} + b \cos kx + b' \sin kx$$

mit  $e$  als Basis des natürlichen Logarithmensystems. Zur Bestimmung der Konstanten  $a, a', b, b'$  dienen die vier der Lagerungsart entsprechenden Grenzbedingungen: Mit Koordinatenursprung in Wellenmitte verschwinden für  $x = \pm l$  die Auslenkungen sowie die Biegemomente; es wird also  $y = 0$  und  $d^2 y/dx^2 = 0$ . Man erhält hieraus vier Gleichungen mit vier Unbekannten  $a = a' = 0$ ; ferner  $b \cos kl = 0$ ;  $b' \sin kl = 0$  oder  $\sin kl = 0$ , wobei  $b$  bzw.  $b'$  beliebig gross, oder wenn  $b$  bzw.  $b' = 0$ . Im ersten Fall sind die Argumentwerte  $kl$  ein ungerades bzw. gerades Vielfaches von  $\pi/2$  und man erhält aus Gleichung (5) mit  $n$  als gerader Zahl die Gleichungen für die elastische Linie bei der kritischen Winkelgeschwindigkeit  $\omega_k$ :

$$(6) \quad y = b \cos(n-1) \frac{\pi}{2l} x \quad \text{für } kl = \frac{\pi}{2} \dots 3 \frac{\pi}{2} \dots (n-1) \frac{\pi}{2}$$

$$y = b' \sin n \frac{\pi}{2l} x \quad \text{für } kl = 2 \frac{\pi}{2} \dots 4 \frac{\pi}{2} \dots n \frac{\pi}{2}$$

Im zweiten Fall, ausserhalb  $\omega_k$ , wird mit  $b = b' = 0$  auch  $y = 0$ , wie zu erwarten war.

Für die erste Kritische ergibt sich mit  $kl = \frac{\pi}{2}$  und  $M = m_1 2l$  aus Gleichung (3) die bekannte Formel [4]:

$$(7) \quad \omega_{k_1} = 3,489 \sqrt{\frac{J E}{M l^3}} = 9,86 \sqrt{\frac{J E}{M L^3}}$$

mit der gleichfalls bekannten Reihe der kritischen Winkelgeschwindigkeiten:

$$(7a) \quad \omega_{k_1} : \omega_{k_2} : \omega_{k_3} \dots = 1 : 4 : 9 : \dots$$

In Gleichung (6) ist durch die beliebig grossen Zahlen  $b$  bzw.  $b'$  das indifferente Gleichgewicht im kritischen Zustand ausgedrückt, d. h. ein Ausschlag von sich aus findet nicht statt, und erst ein Impuls bringt die Welle zur Auslenkung. Sie beharrt dann in der eingenommenen Lage, kehrt also nach Aufhören des Impulses nicht in die Anfangslage zurück.

Die auf ein Element von der Länge  $dx$  wirkende Fliehkraft ist  $dP = m_1 dx y \omega^2$ . Sie ist mit  $y = 0$  ausserhalb der Kritischen ebenfalls 0. In der 1. Kritischen wird, nach Einsetzen von  $y$  aus Gleichung (6):

$$dP = m_1 dx b \cos \frac{\pi}{2l} x \omega_{k_1}^2$$

Auf die gesamte Länge  $2l$  wirkt:

$$P = 2 m_1 b \omega_{k_1}^2 \int_0^l \cos \frac{\pi}{2l} x dx$$

woraus:

$$(8) \quad P = \frac{2}{\pi} M \omega_{k_1}^2 b$$

$P$  ist also eine beliebig grosse Kraft, die sich mit der elastischen Gegenkraft in jeder Lage  $y$  im Gleichgewicht befindet. Der Verlauf der Fliehkraft in Abhängigkeit von  $\varepsilon$  ist demnach, sofern ein Impuls zur Auswirkung gelangt, durch zwei sich unter  $90^\circ$  schneidende Gerade gekennzeichnet, wobei die eine mit  $P = 0$  mit der  $x$ -Axe zusammenfällt (Bild 5). Die Betriebsdrehzahl dürfte in diesem theoretischen Fall bis unmittelbar vor die Kritische gelegt werden, mit  $\varepsilon$  nahezu = 1, trotz vollkommener Auswuchtung aber nicht in die Kritische selbst.

2. Fall: Ueber die ganze Wellenlänge konstante Exzentrizität  $e_x = e_0 = \text{konstant}$

Mit Gleichung (2) und dem Ansatz  $z = y + e_0$  (Bild 6) erhält man in Gleichung (5) bereits die Lösung für  $z$  und es wird:

$$(9) \quad y = a e^{kx} + a' e^{-kx} + b \cos kx + b' \sin kx - e_0$$

Mit den Grenzbedingungen des vorhergehenden Falles werden die vier Konstanten:

$$a = a' = \frac{e_0}{2(e^{kl} + e^{-kl})}; \quad b = \frac{e_0}{2 \cos kl}; \quad b' \sin kl = 0$$

Durch Einsetzen dieser Werte in Gleichung (9) ergibt sich nach Umformung:

$$(10) \quad y = \frac{e_0}{2} \left[ \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{e^{kl} + e^{-kl}} + \frac{\cos kx}{\cos kl} - 2 \right] + b' \sin kx$$

und es folgt, nach Einführung des hyperbolischen Cosinus als Gleichung der elastischen Linie:

$$(11) \quad y = \frac{e_0}{2} \left[ \frac{\cosh kx}{\cosh kl} + \frac{\cos kx}{\cos kl} - 2 \right] + b' \sin kx$$

Das Sinusglied verschwindet ausserhalb der kritischen Drehzahlen. Mit  $kl = \frac{\pi}{2} \dots 3 \frac{\pi}{2}$  wird  $b' = 0$  und  $y = \infty$ , da  $\cos kl = 0$ .

Mit  $kl = 2 \frac{\pi}{2} \dots 4 \frac{\pi}{2}$  ist  $b'$  beliebig gross: die Welle biegt sich aus und nimmt die Form an, die durch den festen endlichen Klammerwert bestimmt ist. Sie kann darüber hinaus im Sinne des indifferenten Gleichgewichtes noch weitere, beliebige Ausbiegungen annehmen. In diesem Fall führen also nur die ungeraden Glieder der Reihe (7a) zu selbsttätiger Auslenkung ins Unendliche.

Die Fliehkraft  $P$  ist durch den Inhalt der Belastungsfläche eines gebogenen Balkens dargestellt. Auf ein Längenelement  $dx$  wirkt:

$$(12) \quad dP = m_1 dx (y + e_0) \omega^2$$

Setzt man den Wert für  $y$  aus Gleichung (10) ein, ohne vorerst das unbestimmte Glied  $b' \sin kx$  zu berücksichtigen, so wird:

$$dP = m_1 \omega^2 \frac{e_0}{2} \left[ \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{e^{kl} + e^{-kl}} + \frac{\cos kx}{\cos kl} \right] dx$$

woraus folgt:

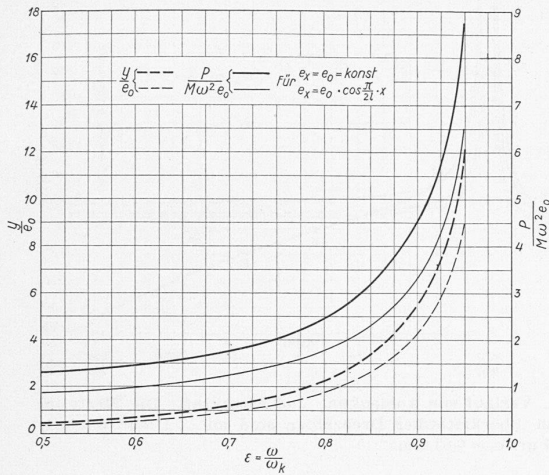


Bild 8: bei unterkritischer Betriebsdrehzahl

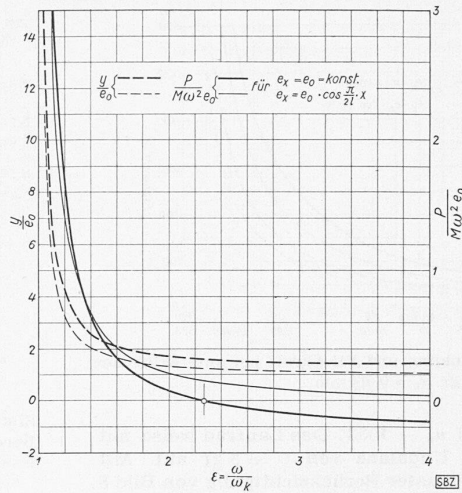


Bild 9: bei überkritischer Betriebsdrehzahl

Die reduzierte Gleichung ist bereits in Gleichung (5) gelöst, sodass geschrieben werden kann:

$$(19) \quad y = a_0 \cos \lambda x + a e^{kx} + a' e^{-kx} + b \cos kx + b' \sin kx$$

Mit den Grenzbedingungen, wie im vorhergehenden Fall gewinnt man aus vier Gleichungen die vier Konstanten. Es wird:

$$\begin{aligned} a &= a' = 0 \\ b \cos kl &= 0 \\ b' \sin kl &= 0 \end{aligned}$$

sodass Gleichung (19) unter Berücksichtigung der Gleichungen (15)/(18) übergeht in die Gleichung der elastischen Linie:

$$(20) \quad y = \frac{e_0}{\left(\frac{\omega k_1}{\omega}\right)^2 - 1} \times$$

$$\cos \frac{\pi}{2l} x + b \cos kx + b' \sin kx$$

Ausserhalb der kritischen Drehzahlen ist  $b = b' = 0$ . Nur in der ersten Kritischen wird mit  $\omega = \omega_{k1}$  die Auslenkung selbsttätig unendlich gross. In den oberen Kritischen tritt mit  $kl = 2 \frac{\pi}{2} \dots 3 \frac{\pi}{2}$  zum festen, endlichen Wert des ersten Gliedes noch eine mögliche Durchbiegung in Form eines unbestimmten Anteils des Cosinus- bzw. Sinus-Gliedes hinzu.

Zur Bestimmung der Fliehkraft gilt wieder der Ansatz:

$$dP = m_1 dx (y + e_x) \omega^2$$

Nach Einsetzen der Werte für  $y$  und  $e_x$  aus Gleichungen (19) und (16), ohne Berücksichtigung der unbestimmten Glieder, erhält man durch Umformung:

$$\begin{aligned} P &= \frac{M \omega^2}{l} (a_0 + e_0) \int_0^l \cos \lambda x dx \\ &= M \frac{\omega^2}{l} (a_0 + e_0) \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

und es wird, im Hinblick auf Gleichung (18):

$$(21) \quad P = 2M \frac{\omega^2}{\pi} \frac{\lambda^4}{\lambda^4 - k^4} e_0$$

ferner schliesslich, unter Beachtung von Gleichung (15):

$$(22) \quad P = M \omega^2 e_0 \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{k1}}\right)^2} \right]$$

$P$  wird von selbst unendlich gross in der ersten Kritischen, nicht aber in den weiter folgenden, für die der unbestimmte Integrationsanteil der Glieder  $b \cos kx$  bzw.  $b' \sin kx$  der Gleichung (19) zu indifferentem Gleichgewicht führt.

Analog dem vorhergehenden Fall kann auch hier statt der Länge  $e_0$  die Unbalanz  $U$  selbst eingesetzt werden. Gleichung (22) geht dann mit den Dimensionen cm und kg über in:

$$(23) \quad P = 3,56 \left(\frac{n}{1000}\right)^2 \frac{G}{G_r} D_2 U \left[ \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{k1}}\right)^2} \right]$$

Aus den Gleichungen (11)/(20) bzw. (13)/(22) folgt, dass neben dem Quotienten  $y/e_0$ , auch  $P/M \omega^2 e_0$  nur von  $\omega/\omega_k$  abhängig ist, wie auch sonst die Dimensionen der Welle beschaffen sein mögen. In den Diagrammen, Bilder 8 und 9, sind für beide Gruppierungen und verschiedene  $\varepsilon$  diese Werte als Ordinate aufgetragen, mit  $y$  als Auslenkung in Wellenmitte. Die Diagramme erlauben die direkte Ermittlung von Auslenkung und Fliehkraft für einen beliebigen Wert von  $\varepsilon$  bei gegebenem  $e_0$  bzw.  $M \omega^2$ .

Mit Hilfe dieser allgemeinen Grundlagen sei nun je ein Beispiel für unterkritischen sowie überkritischen Betrieb behandelt. Die Welle sei durch Konsollager von im Rahmen der vorliegenden Antriebsleistung bei Zentrifugalpumpen noch üblichen Konstruktionen gehalten, Bild 1. Das Fundament sei völlig starr angenommen.

III. Beispiele

1. Siebenstufige Speicherpumpe mit 9000 PS Antriebsleistung

Gesamtgewicht des Rotors . . . . .	$G = 2940$ kg
Gewicht eines Laufrades . . . . .	$G_r = 230$ kg
Abstand der Lagermitten . . . . .	$2l = L = 384$ cm
Wellendurchmesser . . . . .	$d = 24$ cm

Verlauf von  $y/e_0$  und  $P/M \omega^2 e_0$

$$P = 2 \frac{M}{2l} \omega^2 \frac{e_0}{2} \int_0^l \left( \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{e^{kl} + e^{-kl}} + \frac{\cos kx}{\cos kl} \right) dx$$

Die Integration liefert:

$$(13) \quad P = \frac{M \omega^2}{2kl} e_0 \left[ \frac{e^{kl} - e^{-kl}}{e^{kl} + e^{-kl}} + \frac{\sin kl}{\cos kl} \right]$$

oder, nach Einführung des hyperbolischen Tangens:

$$(13a) \quad P = M \omega^2 e_0 \left[ \frac{\text{Tg } kl + \text{tg } kl}{2kl} \right]$$

Mit  $kl = \frac{\pi}{2} \dots 3 \frac{\pi}{2}$  wird  $P$  in den ungeraden Gliedern der Reihe (7a) unendlich gross, d. h. nur in der ersten, dritten, . . . Kritischen. Der nicht ausgerechnete, willkürliche Integrationsanteil des Gliedes  $b' \sin kx$  bestimmt bei  $kl = 2 \frac{\pi}{2} \dots 4 \frac{\pi}{2}$  das indifferente Gleichgewicht in der zweiten, vierten, . . . Kritischen.

$e_0$  kann nach Gleichung (1), durch die Unbalanz  $U$  und das gesamte Rotorgewicht  $G$  ersetzt werden. Setzt man statt  $\omega$  die Drehzahl  $n$  und rechnet man in cm und kg, so kann Gleichung (13a) auch umgeformt werden in:

$$(14) \quad P = 5,58 \left(\frac{n}{1000}\right)^2 \frac{G}{G_r} D_2 U \left[ \frac{\text{Tg } kl + \text{tg } kl}{2kl} \right]$$

Mit dieser Kraft werden die beiden Lager zusätzlich dynamisch belastet. Die Abhängigkeit von  $kl$  ist zugleich eine solche von  $\varepsilon = \omega/\omega_k$ , denn für  $kl$  lässt sich auf Grund von Gleichung

(3) und  $kl = \frac{\pi}{2}$  in der ersten Kritischen nach Gleichung (6) auch schreiben:

$$(15) \quad kl = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\omega_{k1}}}$$

3. Fall: Die Exzentrizität nimmt nach dem Cosinusetz gegen die Lager hin ab

$$(16) \quad e_x = e_0 \cos \frac{\pi}{2l} x$$

In der Lagermitte verschwindet  $e_x$  (Bild 7). Unter Berücksichtigung des Ansatzes Gleichung (16) geht die allgemeine Gleichung (2) mit  $\pi/2l = \lambda$  in die inhomogene Differentialgleichung:

$$(17) \quad \frac{d^4 y}{dx^4} - k^4 y = k^4 e_0 \cos \lambda x$$

über. Die Lösung besteht in der Summe eines partikulären Integrals und der Lösung der reduzierten Differentialgleichung. Das partikuläre Integral gewinnt man durch den Ansatz:

$$y_0 = a_0 \cos \lambda x$$

Nach viermaligem Differenzieren in Gleichung (17) eingesetzt, folgt:

$$(18) \quad a_0 = \frac{k^4 e_0}{\lambda^4 - k^4}$$

und das partikuläre Integral selbst:

$$y_0 = \frac{k^4 e_0}{\lambda^4 - k^4} \cos \lambda x$$

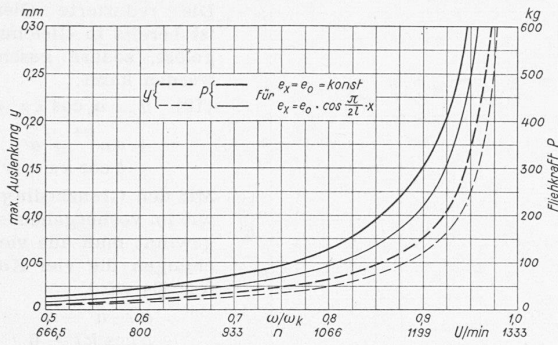


Bild 10. Verlauf von Auslenkung und Fliehkraft bei unterkritischen Betriebsdrehzahlen.  $U = 8$  gr,  $e_0 = 0,014$  mm

Nach Gleichung (7) wird  $n_k = 1333$ . Das Laufrad weist mit  $D_2 = 800$  mm eine restliche Unbalanz von  $U = 8$  gr auf. Mit  $e_0 = 0,014$  mm aus Bild 4 und unter Berücksichtigung von Bild 8 ergeben sich für beide Gruppierungen die auf Bild 10 dargestellten Auslenkungen und Fliehkräfte. Bei den Auslenkungen fallen die kleinen Beträge auf. Sie erreichen maximal mit  $\epsilon = 0,66$  erst die Exzentrizität und liegen bei 0,95, also schon ganz in unmittelbarer Nähe der Kritischen, mit 0,17 immer noch unter dem für eine Maschine vorliegender Grösse üblichen Dichtungsspaltspiel. Hier können somit die Auslenkungen weniger von Einfluss sein auf die Grenze von  $\epsilon$ . Bei  $\epsilon = 0,75$  beträgt  $P$  andererseits 95 bzw. 67 kg oder 3,2 % bzw. 2,3 % des Gesamtgewichtes. Die Lager haben diese Kräfte je zur Hälfte als zusätzliche dynamische Belastung aufzunehmen. Als ruhende Last hätte dieser Betrag keine weitere Bedeutung. Tatsächlich wechselt  $P$  aber mit jeder Umdrehung die Richtung zweimal um  $180^\circ$ , begünstigt also die Ausbildung von den Gang störenden Schwingungen. Man wird nun sagen dürfen, dass selbst bei einer Welle von 24 cm Durchmesser und 384 cm Länge eine periodisch wirkende Kraft von 95 kg, oder 47,5 kg je Lager noch als reichlich anzusehen ist; handelt es sich doch gewissermassen um ein ausserordentlich rasches Auf- und Abhämmern, sofern man die Wirkung auf die Vertikalaxe beschränkt denkt. Es wird also ein noch höherer Grad der Auswuchtung anzustreben sein. Mit  $U = 5,5$  gr z. B. — was noch möglich sein muss — verringern sich die Kräfte um 31 %. Da weiter nur durch Zufall die Schwerpunkte alle zugleich in einer Ebene liegen, sondern in der Regel im Raum irgendwie verteilt sein werden, so müssen die tatsächlichen Kräfte noch kleiner sein. Die resultierende Kraft  $P$  ist dann aus einer Anzahl Komponenten der vollen, auf die Längeneinheit wirkenden Fliehkraft zusammengesetzt. Hieraus ergibt sich nun aber die Möglichkeit eines Betriebes nicht nur bei  $\epsilon = 0,75$ , sondern auch in der Gegend von 0,8. Die obere Grenze dürfte dann allerdings ungefähr erreicht sein. Von hier an wachsen die Kräfte für gleiche  $\epsilon$ -Intervalle immer steiler an, und ein Betrieb, besonders mit schwankender Drehzahl, wäre immer mehr gefährdet. Ein Verlegen der Betriebsdrehzahl von  $\epsilon = 0,75$  auf 0,9 z. B. liesse  $P$  auf etwa das Dreifache anwachsen.

2. Zehnstufige Höchstdruck-Kesselspeisepumpe für 1500 PS Antriebsleistung

Gesamtgewicht des Rotors . . . . .	$G = 216$ kg
Gewicht eines Laufrades . . . . .	$G_r = 11$ kg
Abstand der Lagermitten . . . . .	$2l = L = 214$ cm
Wellendurchmesser . . . . .	$d = 9$ cm

Hier sind zwei Grenzwerte zu bestimmen, da neben der ersten auch auf die zweite Kritische Rücksicht zu nehmen ist. Man erhält  $n_{k1} = 1670$ . Schätzt man die Unbalanz bei einem Raddurchmesser von 260 mm zu 1,7 gr, so ergibt sich  $e_0 = 0,02$  mm. Damit müssten die Auslenkungen in Wellenmitte für das gleiche  $\epsilon$ , trotz bedeutend kleinerem Raddurchmesser, im Verhältnis 0,02/0,014 grösser werden, als im vorhergehenden Beispiel. Das Dichtungsspaltspiel von etwa 0,2 mm unternimmt bei  $\epsilon = 0,95$  bzw. 1,05 erreicht sein, also auch hier erst in unmittelbarer Nähe der Kritischen (Bild 11).

Auffallend ist der Verlauf der  $P$ -Kurve für  $e_x = konst$ . Dem abflachenden Verlauf der Cosinusgruppierung steht hier eine die  $x$ -Axe im Punkt A schneidende Kurve gegenüber:  $P$  wird Null, sobald in Gleichung (13a) der Klammerausdruck mit  $\tan kl = -\tan kl$  verschwindet und zwar bei  $\omega/\omega_k = 2,27$  mit  $kl = 2,36$ . Der Grund liegt im Ueberschneiden der Drehaxe durch die Linie der Fliehkraftstrahlen, wobei der positive und negative Teil der Belastungsfläche sich gegenseitig aufheben (Bild 12c). Bei diesem Wert stellt sich also theoretisch ganz allgemein für jede Welle, ohne Rücksicht auf ihre Dimension, ein dynamischer

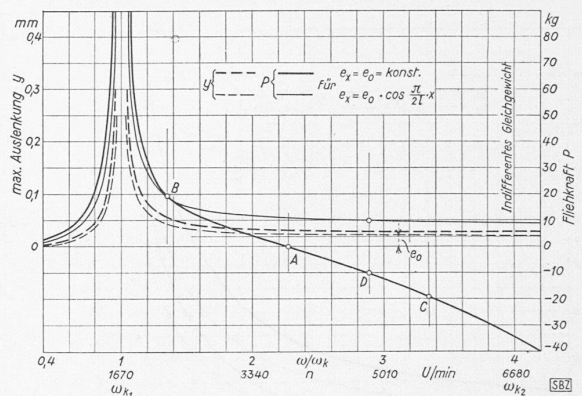


Bild 11. Verlauf von Auslenkung und Fliehkraft. Die Werte im Bereich überkritischer Drehzahlen sind mit  $-1$  multipliziert.  $U = 1,7$  gr,  $e_0 = 0,02$  mm

Gleichgewichtszustand ein, ohne dass hierbei die einzelnen Schwerpunkte in die Drehaxe zu fallen brauchen. Dieser Zustand, bei dem sich ein besonders ruhiger Gang erwarten liesse, könnte in seiner Auswirkung mit der «Selbstzentrierung» der Welle verglichen werden, wie sie sich für die Cosinusgruppierung bei unendlich grosser Drehzahl aus Gleichung (20) ergibt. Von diesem Punkt steigt  $P$  nach erfolgtem Richtungswechsel wieder an, um in der zweiten Kritischen bei indifferentem Gleichgewicht noch endlich zu bleiben. Auf Bilder 12a bis 12d sind die einzelnen Auslenkungs- und Belastungsphasen für verschiedene Werte von  $\epsilon$  dargestellt.

Geht man nun von einer der ungefähren unterkritischen Grenze 0,8 entsprechenden Kraft aus, also etwa 19 kg, so gelangt man im wesentlichen zum Wert  $\epsilon = 1,35$ , dem Schnittpunkt B der  $P$ -Kurven beider Gruppierungen (Bild 11). Die dynamische Belastung der Lager beträgt dann 8,8 % der statischen Last. Der periodische Charakter entscheidet auch hier: diese Kraft ist — bei einer Welle von 9 cm Durchmesser — immer noch beträchtlich und die Unbalanz mit 1,7 gr zu hoch angesetzt worden. Eine Reduktion um 41 % gelingt bei Annahme von  $U = 1$  gr, was mit besonderer Sorgfalt noch zu erreichen ist. Damit dürfte aber der Betrieb bei  $\epsilon = 1,35$  als untere Grenze möglich sein, und zwar umso mehr, als auch hier die Schwerpunkte praktisch nicht in der gleichen Ebene liegen werden.

Als obere Grenze wird man in erster Annäherung den Wert von  $\epsilon$  bezeichnen können, für den  $P$  dem absoluten Wert nach mit dem von  $\epsilon = 1,35$  übereinstimmt. Man gelangt damit zu Punkt C des Diagramms (Bild 11) und zu  $\epsilon = 3,35$ . Es liesse sich darnach ein Betrieb bei 83,6 % der zweiten Kritischen denken, d. h. bei einer Marge von 16,4 %. Genau betrachtet ist nun aber diese Schlussfolgerung nicht richtig, ist doch im Grunde genommen  $P$  allein nur die Ausgangsgrösse zur Bestimmung der für den Erschütterungsgrad massgebenden elastischen Auslenkung des Lagersystems. Es könnte daher letzten Endes nur eine Rechnung schwingungstechnischer Natur die exakte Lösung des Problems bringen, sofern sich die Elastizitätskonstante des Systems genau ermitteln, und nicht nur etwa abschätzen liesse [5]. Sicherheitshalber wird man nun in diesem Gebiet der hohen Drehzahlen die obgenannte Marge vergrössern. Geht man auf 25 bis 30 %, so wird  $\epsilon = 2,8$  bis 3,0. Einen Anhalt könnte etwa Punkt D ergeben mit  $\epsilon = 2,87$ , bei dem für beide Gruppierungen die Fliehkräfte dem absoluten Werte nach gleich sind. Dieser Punkt könnte demnach mit 28 % Marge gegenüber der zweiten Kritischen als ungefähre obere Grenze im überkritischen Bereich bezeichnet werden.

Wie verhalten sich nun diese theoretischen Annahmen zur Wirklichkeit? Das moderne Lager mit seiner kurzen Baulänge gestattet die Anlehnung an den Fall der frei aufliegenden Welle. Gruppierung 1 könnte nur als Ergebnis reinen Zufalls betrachtet werden. Bei Gruppierung 2 wird tatsächlich jedes Rad mit ungefähr der gleichen Exzentrizität die Auswuchtvorrichtung verlassen und damit die Annahme  $e_x = konst$ . rechtfertigen. Die gleichmässige Lastverteilung über die ganze Welle ist allerdings nicht ganz vorhanden, sie wird jedoch mit grösser werdender Stufenzahl der Wirklichkeit immer näher kommen. Bei «gemischtem» Betrieb bringt das Vorhandensein von zwei Kuppelungshälften beiderseits der Pumpe den Fall der Wirklichkeit noch näher. Gruppierung 3 nimmt Rücksicht auf eine ungleichmässig vorgenommene Auswuchtung der einzelnen Räder, deren Anordnung auf der Welle sodann nach einem bestimmten Gesetz gedacht ist.

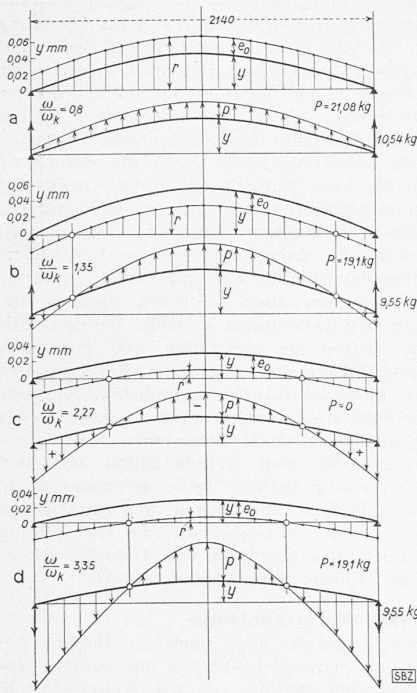


Bild 12. Auslenkungs- und Belastungsphasen für verschiedene Werte von  $\omega/\omega_k$  bei  $e_x = e_0 = \text{konst.}$   $U = 1,7 \text{ gr; } e_0 = 0,02 \text{ mm}$

Kritischen, um mit dem gleichen Betrag über ihr schon wieder zu verschwinden. In der Kritischen selbst macht sich der Einfluss der Wasserreibung allerdings in so hohem Masse geltend, dass die maximale Auslenkung beim frei spielend gedachten Rotor auf 6,9 mm beschränkt bleibt (Bild 13). Für das vorliegende Problem scheidet somit eine Beeinflussung, weil nur in unmittelbarer Nähe der Kritischen vorhanden, aus. Dagegen wäre es möglich, dass die durch die unvermeidliche Schiefstellung der Räder hervorgerufene Verdrängerwirkung einen gewissen dämpfenden Einfluss ausüben könnte. Dies würde aber nur eine Vergrößerung des Sicherheitsgrades der berechneten Kräfte bedeuten.

Die vorliegende Studie dürfte damit gezeigt haben, dass eine Möglichkeit besteht, dem Problem auf Grund einer analytischen Untersuchung näher zu treten, dass jedoch in ihrer praktischen Anwendung der Lösung letzten Endes nur mit einer Schätzung beizukommen ist. Die Praxis ist aber ohnehin bestrebt, den Grenzen tunlichst fern zu bleiben. Wenn in bestimmten Fällen die Verhältnisse doch zu einer Annäherung zwingen, so dürften diese Ueberlegungen immerhin geeignet sein, sich wenigstens ein Bild über die Grössenordnung der zu erwartenden Kräfte zu machen. Dass man dann einer kräftigen Lagerung volle Aufmerksamkeit schenken muss, die auch im Stande ist, die unvermeidlichen Fliehkräfte ohne merkliche Erschütterung aufzunehmen, wird nach dem Gesagten selbstverständlich sein.

**Zusammenfassung.** Es wurde versucht, auf Grund theoretischer Ueberlegungen und unter Annahme einer bleibenden Unbalanz den zulässigen Grenzwert  $\varepsilon = \omega/\omega_k$  angenähert rechnerisch zu ermitteln. Die Grenzen  $\varepsilon = 0,8$  für unterkritischen und  $\varepsilon = 1,35$  bis  $2,87$  für überkritischen Betrieb sind keine Festwerte. Sie sind als Richtwerte zu betrachten, denen sich die Betriebspunkte — je nach der Besonderheit der Wellenkonstruktion — mehr oder weniger nähern können. Die für zwei Beispiele an Zentrifugalpumpen berechneten Werte dürften im wesentlichen denen entsprechen, die von Flügel und Eck für Dampfturbinen und Turbokompressoren angegeben wurden.

**Anmerkungen**

- [1] Flügel: Die Dampfturbinen, S. 48. 1931. J. A. Barth, Leipzig.
- [2] Eck-Kearton: Turbogebläse und Turbokompressoren, S. 143. 1929. J. Springer, Berlin.
- [3] Stodola: Die Dampfturbinen. 5. Aufl. S. 372.
- [4] Diese theoretische Formel liefert bekanntlich einen etwas zu hohen Wert.
- [5] Das Konsollager kann in roher Annäherung als massenloses, einseitig eingespanntes Balkensystem aufgefasst werden. Auf das freie Ende wirke die konstante halbe Rotorlast  $G/2$ , sowie die vertikale Komponente der Fliehkraft  $1/2 P \cos \omega t$ . Die Horizontalkomponente sei nicht in Betracht gezogen. Die Differentialgleichung der entstehenden erzwungenen Schwin-

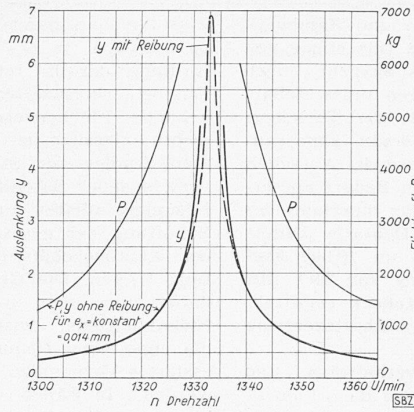


Bild 13. Einfluss der Radreibung im Wasser

Weil die Räder im Wasser laufen, wird man sich fragen müssen, ob die Wasserreibung eine Korrektur nötig mache. Nach einer angenäherten Rechnung [6] beginnt für das Beispiel 1 mit  $e_0 = 0,014 \text{ mm}$  der Einfluss erst bei etwa  $0,6 \%$  unter der

lenkung  $x'$  auch die Welle folgen wird, die demnach richtigerweise in das schwingende System mit einbezogen werden müsste. (Vgl. Timoschenko, Schwingungsprobleme der Technik, S. 12; Stodola: Die Dampfturbinen, 5. Aufl., S. 941).

- [6] Durch die Reibung entsteht eine die Auslenkung verkleinernde Kraft. Für eine einzige auf Wellenmitte aufgekeilte Scheibe gilt die Formel:

$$y = \frac{e_0}{\sqrt{\left[\left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2 - 1\right]^2 + \mu^2}}$$

Der die Reibung berücksichtigende Wert ist  $\mu = \frac{m'}{m}$  mit  $m$

als Gesamtmasse und  $m' = 2\pi\eta\left(\frac{D_2}{2}\right)^3$ . Für das Beispiel 1 der siebenstufigen Pumpe darf man obige Gleichung in Form einer Annäherung benützen, sofern die halbe Gesamtmasse in Wellenmitte konzentriert gedacht wird, wodurch nach Anwendung der Föppel'schen Formel praktisch dasselbe  $\omega_k$  herauskommt, wie nach Gleichung (7). Mit den Werten 7 und 0,83 als zusätzliche Faktoren für Scheibenzahl bzw. durchschnittliche Auslenkung, sowie 0,13 als mittlerem Reibungsfaktor  $\eta$  bei  $t = 15^\circ$  wird, wenn man in kg und m rechnet,  $m' = 0,304$  und  $\mu = 0,00203$ . (S. Stodola: Die Dampfturbinen. V. Aufl., S. 361; SBZ Bd. 68, S. 197\*, 209\*, 1916).

**3. Kongress der Schweizerischen Städtebauer am 1. und 2. Juni 1946 in Bern**

Zusammenfassender Bericht von Dipl. Arch. A. GNAEGI, Bern (Schluss von Seite 169)

Der Vortragszyklus vom Sonntag wurde eingeleitet durch Gemeinderat H. Hubacher, Baudirektor I der Stadt Bern. Er huldigte dem genialen Erbauer der Stadt Bern, Kuno von Bubenberg, der nach strategischen Erwägungen ein städtebauliches Kunstwerk schuf, das heute wie zu Goethes Zeiten als eines der schönsten gelten darf. Aufgabe der heutigen Städtebauer sei es, das Chaos der neuzeitlichen Bebauung in der Zukunft zu verhüten; der Kongress möge dazu dienen, den Sinn für Städtebau zu vertiefen und in die Öffentlichkeit zu tragen.

Arch. A. Hoehel, Genf, sprach über

**L'industrie et l'artisanat au point de vue communal et régional**

Seit dem steinzeitlichen Uebergang des Menschen von der nomadisierenden Jägerei zum sesshaften Ackerbau ist das Aufkommen der Industrie als das wichtigste Ereignis in der Geschichte der Städte zu bewerten. Es bewirkte in hundert Jahren ein Anwachsen der europäischen Bevölkerung von 200 auf 600 Millionen. Der moderne Städtebau wurzelt in der Reaktion gegen die unheilvollen Folgen dieser sprunghaften Entwicklung. Das vielgestaltige Industrieproblem verlangt eine methodische Strukturforchung. In der Schweiz ist rund die Hälfte der Bevölkerung erwerbstätig und von den Erwerbstätigen waren 1930 44,6% in Industrie und Handwerk beschäftigt. Die Bedeutung von Industrie und Handwerk variiert nach der schweizerischen Statistik in den grösseren Städten nicht wesentlich, für kleinere Orte fehlen leider die Angaben, so dass Typenvergleiche zwischen Industrie-, Landwirtschafts- und Fremdenverkehrsarten nicht angestellt werden können. Für die zu einer Untersuchung notwendige genaue Erfassung der Industrie eignen