

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Band:** 67 (1949)  
**Heft:** 20

**Artikel:** Ueber die Knickgefahr schraubenförmig gewundener Druckfedern  
**Autor:** Leyer, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-84060>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 13.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

für den Beginn des Steigens eine gemittelte Schnelligkeit von 2,00 m/s und für den Durchgang des Wellenscheitels eine solche von 1,31 m/s festgestellt, also Werte, die mit denen der Tabelle 3 genügend übereinstimmen.

Eine der notwendigsten, einfachsten und billigsten Sicherheitsmassnahmen gegen die Folgen des Bruches einer Tal-sperre besteht darin, dass man Hochwasserstösse aus der

Sperre ablässt und deren Abfluss genau registriert. Man bekommt auf diese Weise nicht nur einen Einblick in die Schnelligkeit, mit der sich der Vorgang im Ernstfall abspielen wird, sondern erkennt auch die möglichen Gefahrenstellen, kann beizeiten einen Sicherheitsplan aufstellen und vorbeu-gende Massnahmen treffen.

(Schluss folgt)

## Ueber die Knickgefahr schraubenförmig gewundener Druckfedern

DK 621—272.2

Von Dipl. Ing. A. LEYER, Burgdorf

[Vorbemerkung der Redaktion. Obschon das Problem des Ausknickens von Schraubenfedern unter Druck schon ver-schiedentlich<sup>1)</sup> behandelt worden ist, dürfte mit der Ver-öffentlichung der vorliegenden Arbeit manchem unserer Leser gedient sein.]

Druckfedern haben die unangenehme Eigenschaft, von einer gewissen Länge an unter Belastung auszuknicken. Sie sind dann unbrauchbar, weshalb die Frage interessiert, wann dies geschieht. Eine Schraubenfeder kann als elastischer Druckstab mit gerader Axe aufgefasst werden, der sich nach der Eulerschen Knickformel

$$P_K = \frac{\pi^2}{l_0^2} J E$$

berechnen lässt. Hierin muss als Trägheitsmoment dasjenige eines Stabes eingesetzt werden, der bei gleicher Biegungsbeanspruchung die selbe Krümmung erfährt wie die Feder-axe, während für die freie Knicklänge  $l_0$  jene Länge der Feder zu wählen ist, die sie im Moment des Knickens, gemessen zwischen zwei Wendepunkten der elastischen Linie, aufweist.

Bild 1 zeigt eine derartige Feder im ausgeknickten Zu-stand. Ihre Krümmung an irgendeiner Stelle kann aus der Deformation einer einzelnen Windung an dieser Stelle leicht berechnet werden. Bild 2 zeigt eine solche Windung, wobei der einfacheren Rechnung halber angenommen sei, dass sich die Endquerschnitte gerade in der Biegungsebene befinden. Als Mass für die Krümmung der Federaxe dient die gegen-seitige Verdrehung  $\Delta\varphi$  der beiden Endquerschnitte dieser Windung, denn es ist  $1/\rho = \Delta\varphi/t$ , wo  $t$  den mittleren Win-dungsabstand bedeutet, der sich aus Drahtstärke  $d$  und Spiel  $s$  zwischen den Windungen zusammensetzt. Der Winkel  $\Delta\varphi$  lässt sich nach dem Satz von Castigliano

$$\Delta\varphi = \frac{\partial A}{\partial M}$$

berechnen, worin  $A$  die vom Biegemoment  $M$  geleistete De-formationsarbeit bedeutet. Sie wird durch Integration aus der Elementararbeit ermittelt, die vom Moment  $M$  an einem Windungsteilchen nach Bild 3 verrichtet wird. Das in den

<sup>1)</sup> A. Stodola: Z. VDI Band 43 (1899), S. 577; Hurlbrink, E.: Be-rechnung zylindrischer Druckfedern auf Sicherheit gegen seitliches Ausknicken. Z. VDI 54 (1910), S. 133 und 181; Grammel, R.: Die Knickung von Schraubenfedern. Z. ang. Math. Mech. 4 (1924), S. 384 bis 389; Biezeno, C. R. und J. J. Koch: Knickung von Schraubenfedern. Z. ang. Math. Mech. 5 (1925), S. 379/380.

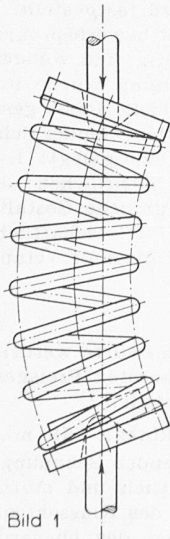


Bild 1

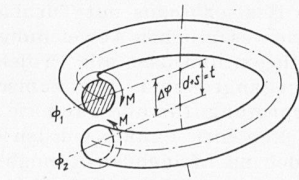


Bild 2

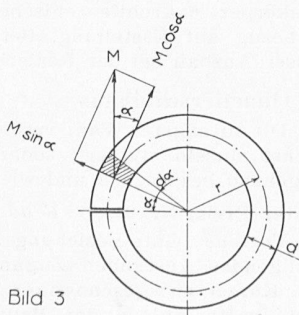


Bild 3

oberen Endquerschnitt der Windung eingeleitete Moment  $M$  ist dort als Vektor am einen Ende des Federteilchens eingezeichnet, wohin es durch das angrenzende Drahtstück heran-gebracht wird. Hier wirkt dieses Moment zum Teil verbie-gend, zum Teil verdrehend auf das Teilchen, nämlich mit seinen Komponenten  $M \sin \alpha$  und  $M \cos \alpha$ . Jede dieser Kom-ponenten verursacht im Drahtelement eine Deformations-arbeit, die erste von der Grösse

$$d A_b = \frac{M^2 \sin^2 \alpha r d \alpha}{2 J_a E}$$

und die zweite von der Grösse

$$d A_t = \frac{M^2 \cos^2 \alpha r d \alpha}{2 J_p G}$$

Wenn dabei anstatt mit einer schraubenförmigen Win-dung mit einem in der Zeichnungsebene liegenden Ring ge-rechnet wurde, so ist das eine Vereinfachung, die die Ge-nauigkeit des Ergebnisses wenig beeinflusst, die Rechnung aber bedeutend erleichtert.

Aus diesen beiden Ausdrücken findet man die in der ganzen Feder investierte Deformationsarbeit durch Integra-tion über die ganze Windungslänge und Addition der bei-den Integrale zu:

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{M^2 \sin^2 \alpha r d \alpha}{2 J_a E} + \int_0^{2\pi} \frac{M^2 \cos^2 \alpha r d \alpha}{2 J_p G} = \frac{\pi M^2 r}{2} \left( \frac{1}{J_a E} + \frac{1}{J_p G} \right)$$

Beschränken wir uns auf den weitaus häufigsten Fall der Stahlfeder mit rundem Drahtquerschnitt, so muss für  $E = 2,6G$  und  $J_a = J_p/2$  gesetzt werden, woraus folgt

$$A = \frac{\pi M^2 r}{2 J_p G} \left( \frac{2}{2,6} + 1 \right) = \frac{1,77 \pi M^2 r}{2 J_p G}$$

Um die relative Verdrehung  $\Delta\varphi$  der beiden Endquerschnitte der einen Windung zu erhalten, haben wir nach Castigliano diese Arbeit partiell nach  $M$  abzuleiten. Dies ergibt

$$\Delta\varphi = \frac{1,77 \pi M r}{J_p G}$$

Darnach erfährt die Feder an der betreffenden Stelle eine Krümmung von

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\Delta\varphi}{d+s} = \frac{1,77 \pi M r}{J_p G (d+s)}$$

Beim Stab, den man sich an Stelle der Feder zu denken hat, berechnet sich die Krümmung nach der Formel

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{J E}$$

wo nun  $J$  das Trägheitsmoment bedeutet, das man in der Eulerschen Formel einzusetzen hat. Wir setzen diese Krüm-mungen einander gleich

$$\frac{1,77 \pi M r}{J_p G (d+s)} = \frac{M}{J E}$$

lösen nach  $J$  auf und setzen den gefundenen Wert in der Eulerschen Formel ein, so wird

$$P_K = \frac{\pi J_p G (d+s)}{1,77 l_0^2 r}$$

Zwischen den Grössen  $P_K$  und  $l_0$  besteht aber noch ein anderer Zusammenhang, denn die Federlänge  $l_0$ , die im Mo-ment des Knickens vorliegt, hängt natürlich von der Bela-stung  $P_K$  in diesem Moment ab.  $l_0$  findet sich aus der Länge  $l_u$  der ungespannten Feder durch Abzug der bis zum Knick-ken erfolgten Einsenkung  $f_k$ , die sich mit Hilfe der Feder-

Konstanten  $c$  auf die Knickbelastung  $P_k$  zurückführen lässt,  $P_k = c f_k$ . Führt man diese Zusammenhänge oben ein und benützt dazu noch die bekannte Beziehung für die Feder-Konstante

$$c = \frac{J_p G}{2 \pi r^3 n}$$

so gewinnt die Eulersche Gleichung die Form

$$\frac{f_k}{r^2} = \frac{2 \pi^2 (d + s) n}{1,77 (l_u - f_k)^2}$$

wo noch für  $(d + s) n = l_u - f_k$  gesetzt und gekürzt werden kann:

$$\frac{f_k}{r^2} = \frac{2 \pi^2}{1,77 (l_u - f_k)}$$

Gehen wir schliesslich auf dimensionslose Grössen über, indem wir  $f_k/r = \varphi_k$  und  $l_u/r = \lambda_u$  setzen, so führt das zu der einfachen Gleichung

$$\varphi_k (\lambda_u - \varphi_k) = 11,2$$

die natürlich immer noch die Eulersche Knickformel, wenn auch mit andern Variablen darstellt.

Diese Formel ist in Bild 4 graphisch dargestellt. Man kann daraus entnehmen, bei welcher relativen Einsenkung  $\varphi_k$  eine Feder von der relativen Länge  $\lambda_u$  ausknickt. Darnach ist unterhalb einer gewissen Grösse  $\lambda_{u0}$  überhaupt kein Knicken zu befürchten. Offenbar nimmt hier bei zunehmender Belastung die Federlänge schneller ab als die Neigung zum Knicken wächst. Die Rechnung ergibt für diese relative Länge den Wert  $\lambda_{u0} = 6,7$  und für die entsprechende Einsenkung  $\varphi_{k0} = 3,35$ .

Für Federlängen, die grösser sind als  $\lambda_{u0}$  gibt die Kurve interessanterweise zwei Werte von  $\varphi_k$ , was nur so verstanden werden kann, dass die Feder beim Zusammendrücken zweimal den Zustand erreicht, in dem die Belastung gerade gleich der Knickkraft ist und sich die Feder einen Moment im indifferenten Gleichgewicht befindet. Bei allen Belastungen, die zwischen diesen beiden Zuständen liegen, ist das Gleichgewicht gestört und die Feder ausgeknickt. Ausserhalb jedoch ist das Gleichgewicht stabil und die Feder bleibt gerade. Die Kurve in Bild 4 teilt also das ganze Feld der möglichen Zustände in zwei Bereiche, einen ersten (horizontal schraffiert), in dem keine Knickgefahr besteht, und in einen zweiten (vertikal schraffiert), in dem die Feder knickt. Eine Feder von der relativen Länge  $\lambda_{ux}$  würde also bei einer Einsenkung  $\varphi_{k1}$  knicken und so lange geknickt bleiben, bis  $\varphi_{k2}$  erreicht ist, wo sie sich von selbst wieder gerade richtet, ein Verhalten, das tatsächlich ab und zu bei Federn beobachtet wird. Dass dies nicht bei allen Federn der Fall ist, sondern nur bei solchen mit relativ kleiner Drahtstärke, liegt daran, dass Federn von grösseren Drahtstärken nicht genügend grosse Deformationen ausführen können, um den zweiten Gleichgewichtszustand, bei dem sie sich wieder aufrichten, zu erreichen, da bei ihnen die Windungen vorher zum Aufliegen kommen.

Soll das Aufliegen der Windungen gerade dann eintreten, wenn die Beanspruchung der Feder ihren zulässigen Wert erreicht hat, so beträgt die mögliche Deformation

$$f_{\max} = 4 \pi r^2 \frac{\tau_{zul} n}{G d}$$

die wiederum durch Substitution von  $f_{\max}/r = \varphi_{\max}$  und  $d/r = \delta$  übergeht in

$$\varphi_{\max} = 4 \pi \frac{\tau_{zul} n}{G \delta}$$

Eliminieren wir noch die Windungszahl  $n$  mit Hilfe der Beziehung

$$\begin{aligned} l_u &= dn + f_{\max} = dn + 4 \pi \frac{\tau_{zul} r^2 n}{G d} = \\ &= n \left( d + 4 \pi \frac{\tau_{zul} r^2}{G d} \right) \end{aligned}$$

so bleibt schliesslich die einfache Beziehung

$$\varphi_{\max} = \frac{\lambda_u}{\frac{G \delta^2}{4 \pi \tau_{zul}} + 1}$$

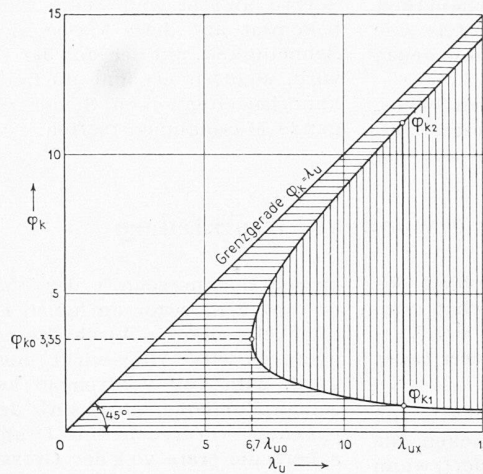


Bild 4

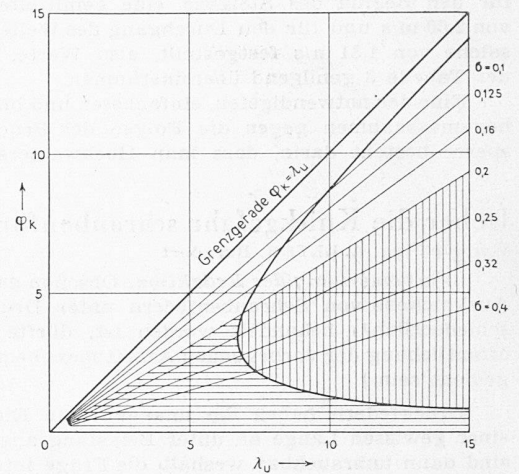


Bild 5

Fassen wir wie vorhin den Fall der Stahlfeder ins Auge so kann für  $G = 850\,000 \text{ kg/cm}^2$  und  $\tau_{zul} = 4500 \text{ kg/cm}^2$  gesetzt werden, so dass  $G/4\pi\tau_{zul} = \sim 15$  und

$$\varphi_{\max} = \frac{\lambda_u}{15 \delta^2 + 1}$$

$\varphi_{\max}$  wird darnach durch ein Geradenbüschel durch den Koordinatenursprung dargestellt (Bild 5). Durch diese Geraden werden die Bereiche des stabilen oder labilen Gleichgewichts eingeschränkt, so dass nur die Teile übrig bleiben, die in Bild 5 beispielsweise für  $\delta = 0,2$  durch Schraffur angedeutet sind.

Bild 5 erlaubt bei jeder Feder die Knickgefahr im voraus abzuklären. Die massgebenden Grössen  $\lambda_u$  und  $\delta$  sind schnell bestimmt, wobei darauf zu achten ist, dass als Länge  $l_u$  der ungespannten Feder jeweils die Länge zwischen zwei Wendepunkten zu nehmen ist, die sich aus den Einspannbedingungen der Federenden ergibt.

Eine Kontrolle im Sinne von Bild 5 ist nur dann nicht nötig, wenn sich der Konstrukteur entschliesst, grundsätzlich keine Federn zu verwenden, deren Länge grösser als das 6,7fache des mittleren Windungsradius ist.

## Wettbewerb für ein Quartierschulhaus und ein Realschulhaus mit Turnhalle in Pratteln DK 727.1

Während in der vorliegenden Nummer nur das kleine Quartierschulhaus zur Darstellung gelangt, folgt in der nächsten das grössere Realschulhaus. Dort findet der Leser dann auch die Gesamtsituation, aus der die Lage beider Objekte im Ortsganzen hervorgeht.

### Aus dem Bericht des Preisgerichtes

Der Bauverwaltung Pratteln sind 120 Wettbewerbsentwürfe eingegangen: 60 für das Quartierschulhaus und 60 für das Realschulhaus mit Turnhalle. Es wird festgestellt, dass keine wesentlichen Abweichungen vom Wettbewerbsprogramm vorliegen und dass alle Projekte rechtzeitig und vollständig eingegangen sind. Die kubische Berechnung wurde in der Vorprüfung für alle Projekte auf die gleiche Basis gestellt.

Folgende Punkte wurden der Beurteilung beider Schulen in den nachfolgenden Rundgängen zugrunde gelegt: 1. Einfügung in die Situation; 2. Nutzung der Freiflächen; 3. Zugänge; 4. Organisation, Grundriss; 5. Räumliche Gestaltung, Baukörper; 6. Architektonische Haltung; 7. Wirtschaftlichkeit in bezug auf Erstellung, Betrieb und Unterhalt (etappenweiser Ausbau bei der Realschule).

### A. Quartierschulhaus

Die in engster Wahl verbleibenden Entwürfe werden zunächst einzeln studiert, sodann vom gesamten Preisgericht eingehend besprochen und wie folgt beurteilt:

**Erster Preis, Nr. 61, W. Kradolfer.** Kubikinhalt 5640 m<sup>3</sup>.

**Vorteile:** Gute Beziehung zur bestehenden Bebauung mit genügenden Abständen. Zugang übersichtlich und störungsfrei. Kurzer zweigeschossiger Baukörper des Klassentraktes, vorteilhafte Anlage der Pausenhalle und des ebenerdigen