

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 67 (1949)  
**Heft:** 38

**Artikel:** Die bildliche Darstellung der Vergleichspannung  
**Autor:** Lehmann, E.A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-84136>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 22.12.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

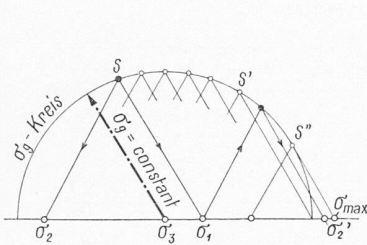


Bild 8

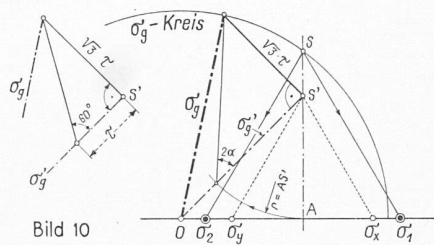


Bild 10

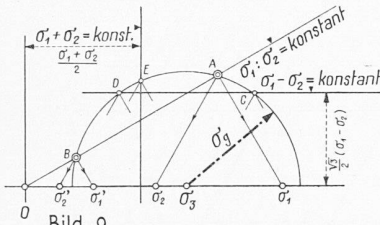


Bild 9

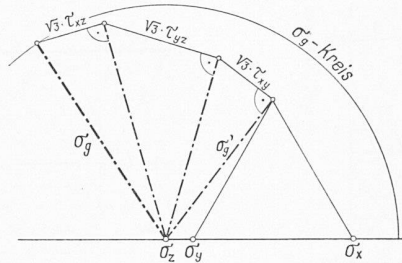


Bild 11

und zwar unter verschiedenen extremen Bedingungen. Ebenfalls durch Versuche könnte die Wirksamkeit der Lagerung im Sandbett überprüft werden. Wertvoll wären auch Versuche über die zweckmässigste Bauausführung. Für in Beton gelagerte Röhren sind Versuche durchgeführt worden, welche zeigten, dass die wirkliche Sicherheit grösser sein kann als die theoretisch zu erwartende.

### Die bildliche Darstellung der Vergleichsspannung

Von E. A. LEHMANN

DK 531.252

#### I. Eine planimetrische Konstruktion

**A. Aufgabe:** Gegeben sind die Hauptspannungen  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$ . Gesucht ist die Vergleichsspannung nach der Theorie der Gestaltänderungsarbeit

$$\sigma_g = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1}$$

**Lösung:** Von den drei auf einer Axe aufgetragenen Punkten, deren Abstände vom Nullpunkt nach Grösse und Vorzeichen den Hauptspannungen  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  entsprechen, betrachte man deren zwei als Basiseckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks. Die gerade Verbindungslinie von dessen Spitze zum dritten Punkt stellt der Grösse nach die Vergleichsspannung  $\sigma_g$  dar.

Die Lösung ist in den Bildern 1 bis 3 für verschiedene Grössenverhältnisse der Hauptspannungen dargestellt; Bild 4 zeigt für andere Werte eine Zusammenfassung. Der Beweis ist einfach und für Bild 3 dargestellt. Man erkennt, dass als

Basen der gleichseitigen Dreiecke, die im folgenden «Spannungsdreiecke» genannt werden sollen, die horizontalen Durchmesser der Mohr'schen Spannungskreise gedient haben.

In Bild 2 wird der Unterschied zwischen der Theorie der grössten Schubspannung nach Guest und derjenigen der (konstanten) Gestaltänderungsarbeit besonders deutlich. Die Dreieckseite entspricht  $2\tau_{max} = \sigma_1 - \sigma_3$  und bleibt konstant, wie auch die mittlere Hauptspannung  $\sigma_2$  sich ändert. Hingegen ändert sich  $\sigma_g$  mit der Lage von  $\sigma_2$ .  $\sigma_g$  wird zum Minimum für  $\sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ . Die Extremwerte sind:

$$\sigma_{g \min} = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_1 - \sigma_3); \quad \sigma_{g \max} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_{max}$$

Der grösste Unterschied beträgt somit 13,4%.

Bild 5 zeigt eine Anwendung der Konstruktion. Dort sind für verschiedene Spannungszustände nahe beim Bruch bzw. beim Fließen die Vergleichsspannungen  $\sigma_g$  für ein hypothetisches anisotropes Material konstruiert. Statt der Mohr'schen Kreise sind die Spannungsdreiecke verwendet. Für ein isotropes Material würden die  $\sigma_g$  alle gleich gross. Bilder 6 und 7 belegen die praktische Verwendung der Konstruktion an Hand von zwei ausgewählten Beispielen.

#### Umkehrung der Aufgabe

Gegeben seien die Vergleichsspannung  $\sigma_g$  und die Hauptspannung  $\sigma_3$ . Wie Bild 8 zeigt, ist der mit dem Radius  $r = \sigma_g$  um das Zentrum  $\sigma_3$  geschlagene Kreis der geometrische Ort der Spitzen der Spannungsdreiecke mit den Basiseckpunkten  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ . Wenn nun noch  $\sigma_1$  bekannt ist, so erhält man  $\sigma_2$  wie auf Bild 8 angegeben. In Bild 9 sind wiederum  $\sigma_g$  und  $\sigma_3$  gegeben. Gesucht sind die Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ , wenn deren Summe, deren Differenz oder deren Verhältnis bekannt ist. Die Lösung ergibt sich durch Konstruktion der geometrischen Orte der Spitzen der Spannungsdreiecke.

**B. Aufgabe:** Gegeben seien die Normalspannungen  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$ , sowie die zugehörige Schubspannung  $\tau$ . Gesucht sei die Vergleichsspannung

$$\sigma_g = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau^2}$$

**Lösung:** Wir bestimmen vorerst mit der gezeigten Konstruktion

$$\sigma_g' = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y}$$

und dann durch Zusammensetzen nach Pythagoras

$$\sigma_g = \sqrt{\sigma_g'^2 + 3\tau^2}$$

Bild 10 zeigt das Vorgehen. Die Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  ergeben sich mittels der Beziehung

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2$$

unter Verwendung des  $\sigma_g$ -Kreises. Der Stellungswinkel ist mit

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{2\sqrt{3}\tau}{\sqrt{3}(\sigma_x - \sigma_y)}$$

ebenfalls gefunden durch Hinüberschlagen der Strecke AS' auf  $\sigma_g'$ .

Für den dreiaxigen Spannungszustand ist die Konstruktion für

$$\sigma_g = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{yz}^2 + 3\tau_{zx}^2}$$

in Bild 11 angegeben. Eine direkte planimetrische Bestimmung der Hauptspannungen ist nicht möglich, weil eine Gleichung dritten Grades vorliegt; hingegen kann der  $\sigma_g$ -Kreis als Hilfsmittel zur Bestimmung von weiteren zwei Hauptspannungen dienen, falls die erste durch Rechnung gefunden wurde und die Beziehung  $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$  beachtet wird.

#### II. Darstellung der Vergleichsspannung in einem Koordinatensystem

Der Zweck dieser Darlegungen ist, eine Darstellung des dreiaxigen Spannungszustandes und seiner Vergleichsspannung in der Zeichenebene und ohne Zuhilfenahme räumlicher Vorstellungen zu geben. Dies kann wie folgt geschehen: In einem schiefwinkligen Koordinatensystem (Bild 12) mit dem Axen-

Bild 12

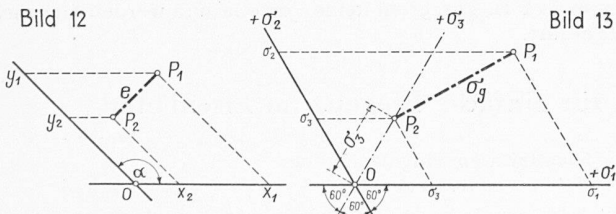


Bild 13

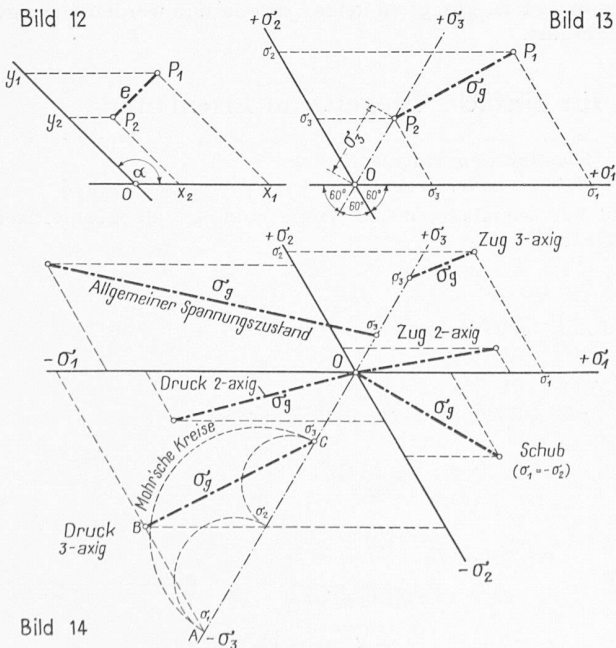
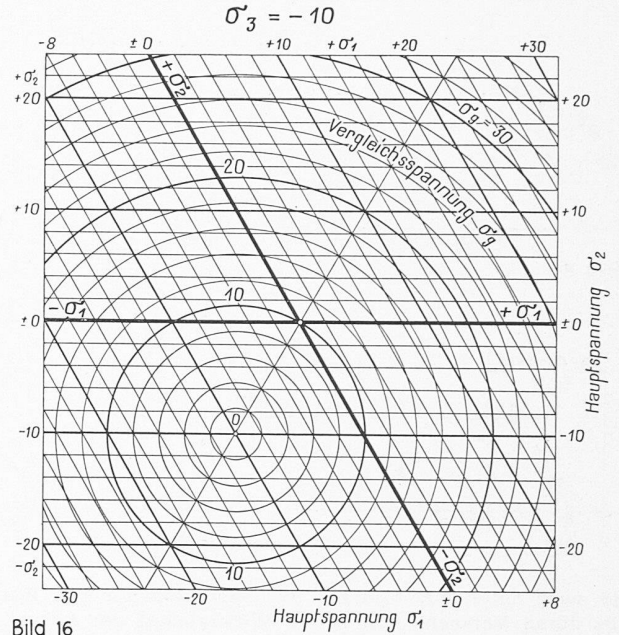
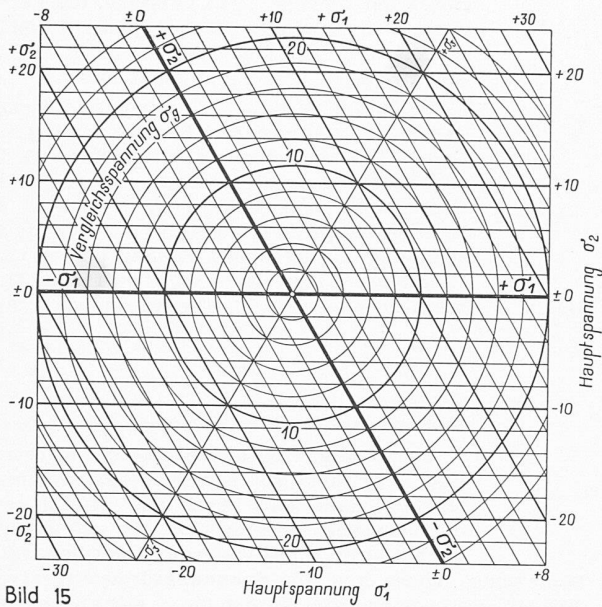


Bild 14



winkel  $\alpha$  ist der Abstand zweier Punkte  $P_1(x_1, y_1)$  und  $P_2(x_2, y_2)$  bestimmt durch

$$e = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \cos \alpha}$$

Mit  $x_1 = \sigma_1, y_1 = \sigma_2, x_2 = \sigma_2 = \sigma_3, \cos \alpha = \cos 120^\circ = -1/2$  wird

$$e = \sigma_g = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - (\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3)} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1}$$

Daraus folgt: Im schiefwinkligen Koordinatensystem mit dem Axenwinkel  $\alpha = 120^\circ$  stellt der Abstand zweier Punkte, wovon einer die Koordinaten  $\sigma_1, \sigma_2$ , der andere die Koordinaten  $\sigma_3, \sigma_3$  hat, die Vergleichsspannung dar. Beim zweiaxigen Spannungszustand mit  $\sigma_3 = 0$  ist die Vergleichsspannung gleich dem Abstand des mit den Koordinaten  $\sigma_1, \sigma_2$  aufgetragenen Punktes vom Nullpunkt (Bild 13). Es ist anschaulicher, den Punkt mit den Doppelkoordinaten  $\sigma_3, \sigma_3$ , nicht mit diesen Koordinaten, sondern auf einer neu zu bestimmenden  $\sigma_3$ -Achse vom Nullpunkt aus aufzutragen. Diese  $\sigma_3$ -Achse ist die Winkelhalbierende zwischen der  $\sigma_1$ - und der  $\sigma_2$ -Achse. Dies ist in Bild 13 bereits durchgeführt.

Eine allgemeine Darstellung ergibt Bild 14. Dort sind, ähnlich wie in Bild 5, für ein anisotropes Material verschiedene Spannungszustände nahe beim Bruch bzw. beim Fließen eingetragen. Die Grösse der Vergleichsspannung ist sofort ersichtlich. Im untern Teil des Bildes sind vergleichsweise die Mohr'schen Kreise zu finden, und im Dreieck ABC erkennen wir dasjenige von Bild 3 wieder.

Auf diesen Grundlagen sind die Bilder 15, 16 und 17 entstanden. Bild 15 ergibt die Vergleichsspannung für den zwei-axigen Zustand. Die  $\sigma_g$ -Linien sind im Kreise und stellen die transformierten Ellipsen des rechtwinkligen Koordinatensystems Becker-Westergaard dar. Die Tafel lässt sich auch für dreiaxigen Spannungszustand verwenden, indem man mit den reduzierten Werten  $\sigma_1^* = \sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2^* = \sigma_2 - \sigma_3$  rechnet. Die Reduktion ist erlaubt, weil ein allseitiger Druck oder Zug auf die Gestaltänderungsarbeit keinen Einfluss hat. Es ist somit

$$\sigma_g = \sqrt{\sigma_1^{*2} + \sigma_2^{*2} - \sigma_1^* \sigma_2^*}$$

worin  $\sigma_1^* = \sigma_1 - \sigma_3$  und  $\sigma_2^* = \sigma_2 - \sigma_3$ . Diese Formel bietet auch rechnerisch Vorteile.

Ein Spezialfall ist in Bild 16 dargestellt.  $\sigma_3$  ist als konstant und zwar zu  $-10$  angenommen, während  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  beliebig gross sein können. Gegenüber Bild 15 ist lediglich das Zentrum der  $\sigma_g$ -Kreise auf der  $\sigma_3$ -Achse verschoben.

Mit Bild 17 sind wir zu einem rechtwinkligen Axensystem zurückgekehrt. Wir finden die Vergleichsspannung als Funktion der Summe und der Differenz der Hauptspannungen. Die Einheit der Ordinate ist das  $\sqrt{3}$ fache derjenigen der Abszisse, und die  $\sigma_g$ -Linien sind Kreise.

In durchaus ähnlicher Weise wie früher in Bild 10 lassen sich im schiefwinkligen System aus den Normal- und Schubspannungen die Vergleichsspannungen und die Hauptspannungen finden. Diese Konstruktionen bieten aber gegenüber den im Abschnitt I. B. gezeigten keine Vorteile und werden hier nicht aufgeführt.

## Ueber die Bedeutung der Dimensionierungsformeln für einfache Biegung im Eisenbeton

Von G. A. RYCHNER

DK 624.012.4

Wir betrachten den Fall eines auf Biegung beanspruchten Rechteckquerschnitts, der nur eine Zugarmierung aufweist oder in dem die Druckarmierung (meist Montagearmierung) vernachlässigt wird. Der T-Querschnitt, bei dem die neutrale Achse in die Druckplatte fällt, kann bekanntlich einem Rechteckquerschnitt von der gleichen Nutzhöhe gleichgesetzt werden, so dass sich unsere Untersuchung auch auf ihn anwenden lässt. Unsere Berechnung befasst sich wie üblich mit dem im Zugbereich gerissenen Betonquerschnitt und stützt sich vorderhand auf das Proportionalitätsgesetz von Hooke und auf die Hypothese von Bernoulli-Navier, nach der ein ebener Querschnitt auch nach der Deformation eben bleibt. Bezeichnungen (Bild 1)

$F_e$  totaler Eisenquerschnitt der auf Zug beanspruchten Stahleinlagen

$h$  Nutzhöhe,  $b$  Breite des Querschnitts

$\mu = F_e/bh$  Armierungsgehalt des Querschnitts

$\sigma_e$  Zugspannung der Stahleinlagen

$\sigma_b$  Druckspannung des Betons am gedrückten Rand

$E_e$  Elastizitätsmodul des Stahls

$E_b$  Elastizitätsmodul des Betons

$n = E_e/E_b$  Äquivalenzzahl

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke folgt die geometrische Beziehung

$$(1) \quad \frac{x}{h-x} = \frac{n \sigma_b}{\sigma_e}; \quad \frac{x}{h} = \frac{n \sigma_b}{n \sigma_b + \sigma_e}$$

und aus der Gleichgewichtsbedingung

$$(2) \quad Z = \sigma_e F_e = \sigma_e \mu b h = D = \sigma_b \frac{b x}{2}; \quad \frac{x}{h} = 2 \mu \frac{\sigma_e}{\sigma_b}$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) erhält man:

$$(3) \quad \mu = \frac{n}{2 \frac{\sigma_e}{\sigma_b} (n + \frac{\sigma_e}{\sigma_b})}$$

$$(4) \quad \sigma_b = \mu \sigma_e (\sqrt{1 + 2/n \mu} + 1)$$

$$(5) \quad \sigma_e = 1/2 \cdot n \sigma_b (\sqrt{1 + 2/n \mu} - 1)$$

$$(5') \quad \sigma_e/\sigma_b = n/2 (\sqrt{1 + 2/n \mu} - 1) = A \quad \text{Bild 1}$$

