

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 67 (1949)
Heft: 4: Zum Rücktritt von Schulrats-Präsident Rohn, 2. Heft

Artikel: Etude de l'influence du poids propre sur la stabilité d'une plaque rectangulaire
Autor: Favre, Henry
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-83992>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 22.12.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Etude de l'influence du poids propre sur la stabilité d'une plaque rectangulaire

DK 624.075.4

Par HENRY FAVRE, Prof. Dr., Zurich

(Suite et fin de la page 35)

Seconde approximation. En ne conservant que deux coefficients consécutifs, a_n et a_{n+1} , le système (11) se réduit aux deux équations linéaires et homogènes:

$$\begin{cases} \left[\frac{1}{n^2} \left(\frac{b}{a} + n^2 \frac{a}{b} \right)^2 - \frac{\xi}{2} - k \right] a_n + \\ + \frac{4(2n^2 + 2n + 1)(n + 1)}{\pi^2(2n + 1)^2 n} \xi a_{n+1} = 0, \\ \frac{4(2n^2 + 2n + 1)n}{\pi^2(2n + 1)^2(n + 1)} \xi a_n + \\ + \left[\frac{1}{(n + 1)^2} \left(\frac{b}{a} + (n + 1)^2 \frac{a}{b} \right)^2 - \frac{\xi}{2} - k \right] a_{n+1} = 0. \end{cases}$$

En égalant à zéro le déterminant général, on obtient pour k l'équation du second degré:

$$\begin{cases} k^2 - \left[\frac{1}{(n + 1)^2} \left(\frac{b}{a} + (n + 1)^2 \frac{a}{b} \right)^2 + \frac{1}{n^2} \left(\frac{b}{a} + n^2 \frac{a}{b} \right)^2 - \xi \right] k + \\ + \left[\frac{1}{(n + 1)^2} \left(\frac{b}{a} + (n + 1)^2 \frac{a}{b} \right)^2 - \frac{\xi}{2} \right] \left[\frac{1}{n^2} \left(\frac{b}{a} + n^2 \frac{a}{b} \right)^2 - \frac{\xi}{2} \right] - \\ - \frac{16(2n^2 + 2n + 1)^2}{\pi^4(2n + 1)^4} \xi^2 = 0. \end{cases}$$

dont la plus petite racine, qui est celle que nous devons considérer, est:

$$(13) \quad \frac{(N_0)_{cr.}}{\frac{\pi^2 D}{a^2}} = k = \alpha_n + \beta_n - \sqrt{(\alpha_n - \beta_n)^2 + \gamma_n},$$

en posant:

$$\begin{cases} \alpha_n = \frac{1}{2(n + 1)^2} \left(\frac{b}{a} + (n + 1)^2 \frac{a}{b} \right)^2 - \frac{\xi}{4}, \\ \beta_n = \frac{1}{2n^2} \left(\frac{b}{a} + n^2 \frac{a}{b} \right)^2 - \frac{\xi}{4}, \\ \gamma_n = \frac{16(2n^2 + 2n + 1)^2}{(2n + 1)^4} \xi^2. \end{cases}$$

Il faut prendre également, pour chaque valeur de b/a , le nombre entier positif n correspondant à la plus petite valeur de k .

Troisième approximation. En considérant trois coefficients consécutifs, a_n , a_{n+1} , et a_{n+2} , le système (11) se réduit à trois équations linéaires et homogènes. En égalant le déterminant général à zéro, on obtient pour k l'équation du 3ème degré:

$$(14) \quad \begin{cases} - \frac{16(2n^2 + 6n + 5)^2}{\pi^4(2n + 3)^4} \xi^2 + \\ + \left[\frac{1}{(n + 2)^2} \left(\frac{b}{a} + (n + 2)^2 \frac{a}{b} \right)^2 - \frac{\xi}{2} - k \right] + \\ + \left[\frac{1}{(n + 1)^2} \left(\frac{b}{a} + (n + 1)^2 \frac{a}{b} \right)^2 - \frac{\xi}{2} - k \right] - \\ - \frac{16(2n^2 + 2n + 1)^2}{\pi^4(2n + 1)^4} \xi^2 = 0. \\ - \frac{1}{n^2} \left(\frac{b}{a} + n^2 \frac{a}{b} \right)^2 - \frac{\xi}{2} - k \end{cases}$$

Pour déterminer la plus petite racine de cette équation, le plus simple est de procéder par tâtonnements, en cherchant, pour chaque valeur de b/a considérée, à satisfaire à l'équation (14) à l'aide d'une valeur de k légèrement inférieure à celle donnée par la seconde approximation (13). Il faut toujours prendre, pour chaque valeur de b/a , le nombre entier positif n correspondant à la plus petite valeur de k .

En conservant quatre coefficients consécutifs, a_n , a_{n+1} , a_{n+2} et a_{n+3} dans le système (11), on obtiendrait pour k , en égalant à zéro le déterminant général, une équation d'où l'on tirerait une valeur de quatrième approximation, et ainsi de suite.

Nous avons fait les calculs numériques pour $\xi = 0, 1, 2, \dots, 10$ et $b/a < 5$, en utilisant successivement les formules (12), (13), (14) et, quelquefois, l'équation analogue à (14) relative à la quatrième approximation. Pour $b/a \leq 1$, les différences entre les valeurs k données par les formules de 2ème et 3ème approximations ont été trouvées très petites, en général de l'ordre du millième. Ces différences augmentent par contre lorsque b/a dépasse 1. Elles augmentent aussi avec ξ . Il nous a cependant été facile d'extrapoler les résultats donnés par la 3ème approximation dans le domaine $1 < b/a < 5$, les différences des valeurs de deux approximations successives décroissant en général comme les

termes de la progression géométrique $1, \frac{1}{3}, \left(\frac{1}{3}\right)^2, \dots$, dont la somme est $\frac{3}{2}$.

Dans la figure 2, qui résume les résultats des calculs numériques, nous avons tracé les courbes donnant, pour les onze valeurs de ξ considérées, le rapport $k = \frac{(N_0)_{cr.}}{\pi^2 D/a^2}$ en fonction de b/a ; la courbe $\xi = 0$ correspond aux valeurs données par Bryan dans le cas où le poids de la plaque est négligeable⁴⁾. Cette figure, qui sera utile aux ingénieurs, montre éloquemment l'influence du poids propre sur la valeur de la surcharge critique.

Déformation du feuillet moyen produite par le flambage. Dans la troisième approximation, l'équation (1) de la surface élastique est:

$$(15) \quad \begin{cases} w = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \left[a_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + \right. \\ \left. + a_{n+1} \sin\left(\frac{(n+1)\pi y}{b}\right) + a_{n+2} \sin\left(\frac{(n+2)\pi y}{b}\right) \right]. \end{cases}$$

En appliquant les trois équations qui ont permis d'établir la relation (14), il nous a été facile d'exprimer les coefficients a_n , a_{n+1} , a_{n+2} en fonction d'un paramètre arbitraire μ :

$$a_n = a'_n \mu, \quad a_{n+1} = a'_{n+1} \mu, \quad a_{n+2} = a'_{n+2} \mu.$$

Nous avons fait le calcul numérique pour $b/a = 0,5, 1, 1,5$ et 2 , en choisissant $\xi = 4$. Pour ces quatre valeurs du rapport b/a , il faut utiliser l'indice $n = 1$. L'équation de la courbe d'intersection de la surface élastique et du plan vertical $x = a/2$ est alors:

$$w = \left[a_1' \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) + a_2' \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right) + a_3' \sin\left(\frac{3\pi y}{b}\right) \right] \mu.$$

Cette courbe est dessinée dans la figure 3 pour les quatre valeurs du rapport b/a que nous avons considérées. La figure 4 correspond au cas où la pesanteur est négligeable ($\xi = 0$). La comparaison des deux figures montre l'influence du poids propre sur la forme de la surface élastique produite par le flambage.

Remarques

1. En faisant tendre le rapport b/a vers zéro, dans la formule de seconde approximation (13), on retrouve les valeurs indiquées par S. Timo-

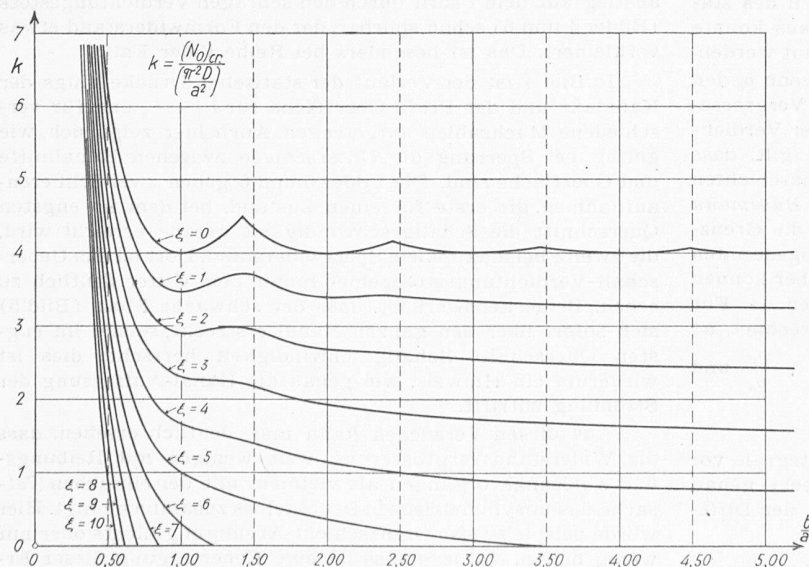
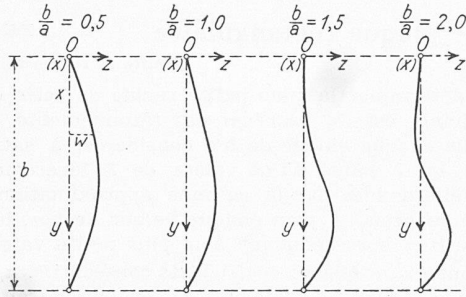
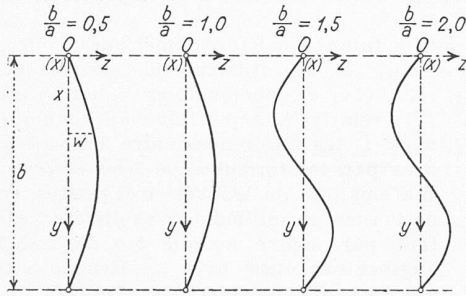


Fig. 2

⁴⁾ Voir Proc. London Math. Soc., Vol. 22, 1891, p. 54.

Fig. 3 ($\xi = 4$)Fig. 4 ($\xi = 0$)

shenko pour la force critique axiale relative à une barre pesante verticale, articulée à ses extrémités⁵⁾.

2. Les résultats obtenus peuvent être appliqués au cas d'une plaque rectangulaire inclinée, pourvu que deux de ses côtés soient horizontaux. Il suffit alors, dans la formule (9), de remplacer $\gamma h b$ par $\gamma h b \sin \alpha$, α désignant l'angle formé par le feuillet moyen et un plan horizontal.

3. On pourrait également traiter le cas d'une plaque occupant une position quelconque dans l'espace, mais les calculs seraient notablement plus longs. Il en serait de même en général pour d'autres répartitions des forces appliquées au contour de la plaque et pour d'autres conditions d'appuis.

Ueber die Strömung von Gasen durch ungestaffelte Profilgitter

DK 621.135

Von Prof. Dr. J. ACKERET und Dr. N. ROTT, Zürich
(Schluss von Seite 41)

Die experimentelle Bestimmung der Widerstände wurde von Dr. F. Feldmann durchgeführt und zwar durch Messung des Druckes und des Impulsstromes vor und nach dem Gitter. Eine Wägung wäre an sich vorzuziehen gewesen, jedoch war damals die Dreikomponentenwaage noch nicht im Betrieb; auch hätten die Störungen durch die Aufhängung und durch die dann unvermeidlichen seitlichen Spalte in Kauf genommen werden müssen. Gemessen wurden die Verteilungen des statischen Druckes p und des Pitot-Druckes p_p . Daraus konnte die Kraftstrom-Dichte $p + \rho w^2$ rechnerisch bestimmt werden.

In isentroper Strömung ist $p_p = \text{konst.} = p_0$, wenn p_0 den gemessenen Ruhedruck bedeutet. Da, wo Entropie-Vergrößerungen auftreten, d. h. in Grenzschichten und hinter Verdichtungsstößen, ist $p_p < p_0$. Für Verdichtungsstöße gilt, dass die Ruhetemperatur T_0 nicht geändert wird. In Grenzschichten können wir dies nach einem Satz von Stodola und Busemann auch noch mit guter Näherung annehmen, sofern die Grenzschicht turbulent ist. Hinter dem Gitter, in der sogenannten Nachlaufdehle, ist Turbulenz vorhanden; am Profil aber können auf längere Strecken laminare Schichten bestehen. — Für die Auswertung haben wir mit konstantem T_0 gerechnet, a^* also als invariabel betrachtet. Die Werte $\frac{p + \rho w^2}{p_0}$, $\frac{p_p}{p_0}$ und $\frac{\rho w}{\rho^* a^*}$ liegen für $\alpha = 1,400$ in Tabellenform vor⁴⁾.

Da es sich um die Differenz der Kraftstrom-Integrale vor und hinter dem Gitter handelt, so muss man recht genau messen können. Immerhin kann die Schwierigkeit der Diffe-

renzbildung etwas gemildert werden, wenn man den Zustand vor dem Gitter rechnet und nicht die direkt gemessenen Werte verwendet. Insbesondere ist dann die Kontinuität gesichert. In nicht isentroper Strömung ist $\rho^* a^* = \alpha p^*/a^*$ nicht konstant; da jedoch die Stautemperatur nach dem früher gesagten (nahezu) konstant angenommen werden kann, hat a^* überall den gleichen Wert. Wenn mit dem Index a der Wert bei adiabatischer Strömung bezeichnet wird, ist offenbar

$$(7) \quad \frac{p^*}{p_a^*} = \frac{p_p}{p_0} = \frac{(\rho^* a^*)}{(\rho^* a^*)_a}$$

Somit ist:

$$(8) \quad \frac{\rho w}{(\rho^* a^*)_a} = \frac{\rho w}{(\rho^* a^*)} \frac{p_p}{p_0}$$

Das Integral

$$\int_0^f \frac{\rho w}{(\rho^* a^*)_a} df = f_1 \frac{\rho_1 w_1}{(\rho^* a^*)_a}$$

ist proportional dem Massenstrom und muss natürlich vor und nach dem Gitter gleich sein. Aus der Tabelle von Feldmann⁴⁾ folgt dann sofort der Anströmzustand, der zur Berechnung des Widerstandsintegrals

$$W = f_1 (p_1 + \rho_1 w_1^2) - \int_0^f (p_2 + \rho_2 w_2^2) df$$

verwendet wird.

Die Versuche wurden bei konstanter Reynolds'scher Zahl $Re = 350\,000$, bezogen auf l , w_1 und ρ_1 , durchgeführt. Die Ergebnisse sind in den Bildern 2 und 3 dargestellt, wo c_{wl} in Funktion von M_1 dargestellt ist. Es zeigt sich:

a) Vor dem Erreichen der Sperrmachzahl ist c_{wl} von M_1 praktisch unabhängig. c_{wl} wird bei grösserer Teilung kleiner, vermutlich weil die Ubergeschwindigkeiten an der Profil-Oberfläche kleiner werden.

b) Bei den Messreihen I, II und III beginnt der Widerstandsanstieg genau beim Erreichen der Sperrmachzahl und steigt dort vertikal bis zu einem Maximalwert. Bei Reihe IV ist ein kleiner, bei Reihe V ein grösserer Übergangsbogen vorhanden. Man wird die Teilung $t/l = 2$ etwa als die Grenze ansehen dürfen, wo die «Kanaltheorie» versagt, ein merkwürdig grosser Wert!

c) Die gestrichelte Kurve in Bild 3 stellt die gerechneten Widerstandswerte dar, ebenso sind diese in Bild 2 eingetragen. Die gemessenen Werte c_{wl} sind so nahe bei der theoretischen Kurve, dass sogar im Falle V von guter Uebereinstimmung gesprochen werden kann. Auffallend ist natürlich, dass die gemessenen Werte nicht höher liegen, was man doch erwarten müsste, wenn noch Reibungen dazu kommen. Doch ist diese scheinbare Diskrepanz einigermassen verständlich. Erstens herrscht bei Sperrung und maximalem Widerstand längs des grössten Teils des Profils Druckabfall und deshalb wohl Laminarität der Grenzschicht mit entsprechend geringerem Widerstand. Zweitens ist nahe der Hinterkante der Druckanstieg auf dem Profil durch den schrägen Verdichtungsstoss (Bilder 4 und 6) schon spürbar, der den Formwiderstand etwas verkleinert. Das ist besonders bei Reihe V der Fall.

In Bild 4 ist der Verlauf der statischen Drücke längs der Kanalaxe und der Profil-Oberfläche für $t/l = 2/3$ und für verschiedene Machzahlen aufgetragen. Auch hier zeigt sich, wie gering bei Sperrung die Unterschiede zwischen Kanalmitte und Oberfläche sind. Die Bilder 5 und 6 geben zwei Schlierenaufnahmen, die erste für einen Zustand, bei dem im engsten Querschnitt die Schallgeschwindigkeit gerade erreicht wird, die zweite bei maximalem Sperrwiderstand. Dort ist das Ueberschall-Verdichtungsstossgebiet hinter dem Gitter deutlich zu sehen. Bemerkenswert ist, dass der schwache Stoss (Bild 5) sich sofort über den ganzen Kanal erstreckt, sobald im engsten Querschnitt Schallgeschwindigkeit herrscht; dies ist wiederum ein Hinweis, wie genau die Kanal-Auffassung der Strömung zutrifft.

Aus diesen Versuchen kann man deutlich ersehen, dass die Widerstandsvergrößerung weit weniger mit Reibungs- und Ablösungsvorgängen als vielmehr mit der einfachen Tatsache des unsymmetrischen Druckfeldes zusammenhängt. Hier würde beispielsweise Grenzschicht-Absaugung nichts oder nur wenig helfen. Naturgemäss ist eine Uebertragung dieser Ergebnisse auf Profile im unendlichen Luftraum nicht ohne

⁵⁾ loc. cit. Ch. II, § 23.

⁴⁾ F. K. Feldmann: Mitteilungen des Institutes für Aerodynamik Nr. 14, S. 65-67, Zürich 1948, Verlag Leemann.