

# Berechnung des Belastungsausgleiches in Verteilanlagen

Autor(en): **Henzi, R.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **68 (1950)**

Heft 13

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-57986>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Berechnung des Belastungsausgleiches in Verteilanlagen

DK 519.24 : 62

Von Dipl.-Ing. R. HENZI, Zürich

### I. Einleitung

Bei der Dimensionierung von Verteilanlagen irgendwelcher Art, z. B. von Rohrleitungen für Gas, Kalt- und Warmwasser, Heizwasser, Kabel für elektrische Energie usw. ist die Bestimmung der in den einzelnen Leitungssträngen maximal durchfliessenden Mengen die schwierigste Aufgabe. Wird von einem Leitungsstrang nur ein einzelner Apparat bedient, so ist die maximal durchfliessende Menge gleich seinem Anschlusswert  $a$ . Sind dagegen an ihm  $m$  solcher Apparate angeschlossen, die nur zeitweise und kurzfristig im Betrieb stehen und betrieblich vollkommen voneinander unabhängig sind, so wird der Praktiker seiner Berechnung nicht die Menge  $ma$ , sondern eine kleinere Menge  $m'a$  zugrunde legen. Er erachtet es mit Recht als «sehr unwahrscheinlich», dass gerade alle  $m$  Apparate gleichzeitig im Betriebe stehen, während die Wahrscheinlichkeit für gleichzeitigen Betrieb von  $m'$  Apparaten schon sehr viel grösser sei. Ueber den Quotienten  $m'/m < 1$  liegen, sofern es sich im betreffenden Arbeitsgebiet um häufig vorkommende normale Verhältnisse handelt, meist Erfahrungswerte vor. Im andern Falle ist der projektierende Ingenieur auf Schätzungen angewiesen.

Hier vermag die Wahrscheinlichkeitsrechnung helfend einzugreifen. Die Telephonverwaltungen benützen die Erkenntnisse dieser mathematischen Disziplin, besonders auf Grund der Arbeiten von Erlang, Lubberger und anderen, schon seit mehr als 30 Jahren zur Berechnung ihrer Netze und Wähler. Gerade die hohe Betriebssicherheit dieser Anlagen, verbunden mit einer hervorragenden Betriebsgüte, die sich in kaum wahrnehmbaren und seltenen Wartezeiten ausdrückt, lassen den grossen Nutzen systematischer Forschungen und die Verwertung theoretischer Ergebnisse in der Praxis erkennen.

W. Kummer [1], [2], [3] \*) hat in mehreren Publikationen auf die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung bei Problemen dieser Art, besonders bei der elektrischen Bahntraktion, hingewiesen. Er behandelt das Problem unter dem Gesichtspunkt, dass die Belastungsstruktur aller Elemente gleich sei, führt also gewissermassen eine Interpolation durch und setzt ferner eine grosse Zahl von Elementen voraus. Dies führt ihn auf die Poissonsche Häufigkeitsverteilung. Diese setzt zusammenfassend voraus:

1. Die Anzahl der angeschlossenen Apparate ist gross;
2. die Einzelwahrscheinlichkeit eines Apparates, d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass ein Apparat im Betriebe steht, ist klein;
3. die vom einzelnen Apparat bezogene Energiemenge ist konstant, d. h. der Apparat steht entweder voll oder gar nicht im Betrieb, Zwischenbelastungen sind also ausgeschlossen.

H. Schellenberg [4] hat auf Grund der Arbeiten von Kummer theoretische Kurven mit den aus zahlreichen Versuchen an Wasserverteilanlagen ermittelten praktischen Kurven verglichen. Die Übereinstimmung ist im Gebiet grosser Apparatmengen sehr gut. Die Abweichung wird aber umso erheblicher, je weiter er auf kleinere Apparatmengen zurückgeht, je mehr er sich also von den Bedingungen 1 und 2 entfernt.

In den folgenden Ausführungen wird von der allgemeinen Bernoullischen oder binomischen Verteilung ausgegangen, die ohne die unter 1 und 2 genannten Voraussetzungen auskommt und aus der die Poissonsche Verteilung erst als Spezialfall hervorgeht. Ferner wird gezeigt, wie sich der Belastungsausgleich zwischen 2 und mehr Apparategruppen mit verschiedener Einzelwahrscheinlichkeit abspielt; es wird also die «Belastungssynthese» von Gruppen von verschiedenartigem Charakter behandelt. Schliesslich wird dargelegt, wie sich die Gesamtbelastung herrührend von einer Gruppe von Apparaten mit variabler aber gesetzmässiger Belastung (z. B. Kochherde) verteilt.

Bei allen Untersuchungen dieser Art muss man selbstverständlich auf die Verhältnisse in der Hauptbelastungszeit

abstellen. Beim Telephon spricht man von der Hauptverkehrsstunde oder regsten Stunde, die in der Regel zwischen 10 und 11 Uhr liegt. Die vorwiegend die Haushaltküche mit Energie beliefernden Werke (Elektrizitäts- und besonders die Gaswerke) haben ihre Spitzenbelastung meist zwischen 11<sup>1</sup>/<sub>4</sub> und 12<sup>1</sup>/<sub>4</sub> Uhr. Für Ein- und Mehrfamilienhäuser, sowie Gruppen von mehreren Mehrfamilienhäusern, die mit Gasbadeöfen ausgerüstet sind, treten dagegen zuweilen am Abend, speziell Freitag- oder Samstagabend, kurze aber intensive Belastungsspitzen auf, die die Mittagsspitze der betreffenden Abonnentengruppe übertreffen können.

### II. Apparate mit konstanter Belastung und gleicher Einzelwahrscheinlichkeit<sup>1)</sup>

Es bedeuten:

- $T$  die Beobachtungszeit (z. B. die Stunde der maximalen Belastung)  
 $t$  die Betriebszeit des Apparates während der Beobachtungszeit  
 $\frac{t}{T} = p$  die relative Benützungsdauer = die Einzelwahrscheinlichkeit des Apparates = die Wahrscheinlichkeit, dass der betreffende Apparat in irgend einem Zeitpunkt während der Beobachtungszeit  $T$  gerade im Betrieb steht

- $1 - \frac{t}{T} = 1 - p$  die Gegenwahrscheinlichkeit = die Wahrscheinlichkeit, dass der betreffende Apparat in irgend einem Zeitpunkt während der Beobachtungszeit  $T$  gerade nicht im Betrieb steht.

Sind  $m$  gleiche Apparate mit der Einzelwahrscheinlichkeit  $p$  angeschlossen, so soll  $B(x)$  die Wahrscheinlichkeit bedeuten, dass in irgend einem Zeitpunkt während der Beobachtungszeit  $T$  gerade  $x$  von den  $m$  Apparaten im Betriebe und  $(m - x)$  Apparate ausser Betrieb stehen.  $B(x)$  berechnet man dabei nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit gemäss

$$(1) \quad B(x) = \binom{m}{x} p^x (1-p)^{m-x}$$

(Bernoullische oder binomische Verteilung)

Gelegentlich wird dieses Verteilungsgesetz auch nach Newton benannt.

Zur Kontrolle dient die Gleichung:

$$(2) \quad \sum_{x=0}^{x=m} B(x) = 1$$

Diese Verteilungsfunktion ergibt im Cartesischen Koordinatensystem das bekannte glockenförmige Bild, das, anfänglich noch unsymmetrisch — nur bei  $p = 1/2 = 1 - p$  ist es stets symmetrisch — umso mehr einer Symmetrie zustrebt, je grösser die Apparatezahl  $m$  ist (Bild 1). Die Rechtecke über den einzelnen Abszissenabschnitten stellen die Wahrschein-

<sup>1)</sup> Für Leser, die mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung weniger vertraut sind, mögen die folgenden Bemerkungen nützlich sein:

Unter einer Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses versteht man immer den Quotienten

$$W = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$$

z. B. ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel in einem Wurf eine bestimmte der sechs möglichen Zahlen zu werfen  $W = \frac{1}{6}$ .

I. Die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel in einem Wurf z. B. entweder eine 4 oder eine 5 zu erhalten, ist  $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ .

Also: Entweder-Oder-Fall: Einzelwahrscheinlichkeiten addieren.

Die Wahrscheinlichkeit, in einem Wurf irgend eine der sechs Zahlen zu werfen, ist gleich 1 (mathematische Gewissheit).

II. Mit zwei Würfeln sind 36 Wertepaare möglich, die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Wertepaar, z. B. (2, 4) ist  $\frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$ .

Die Wahrscheinlichkeit also dafür, sowohl mit dem ersten Würfel eine 2, als auch gleichzeitig mit dem zweiten Würfel eine 4 zu erhalten, ist gleich dem Produkt beider Einzelwahrscheinlichkeiten.

Also: Sowohl-als auch-Fall: Einzelwahrscheinlichkeiten multiplizieren.

III. Fragen wir nach der Wahrscheinlichkeit, dass einer der beiden Würfel zwei, der andere vier zeigt, also entweder Wertepaar (2, 4) oder Wertepaar (4, 2) sich ergebe, so finden wir:  $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$

\*) Siehe Literaturverzeichnis am Schluss des Aufsatzes.

lichkeit dar für den betreffenden Abszissenwert, die ganze Fläche zwischen Treppenkurve und Abszisse somit den Wert 1.

Durch Reduktion des Abszissenbereiches auf 1 und gleichzeitige Korrektur der Ordinatenwerte im entgegengesetzten Sinne — damit die Gesamtfläche gleich 1 bleibt — entsteht Bild 2. Mit zunehmender Apparatezahl wird die Kurve immer steiler mit dem Maximum im Abszissenmittelwert und die Wahrscheinlichkeit für eine Abweichung  $\epsilon$  vom Mittelwert  $\mu$  wird also immer kleiner. Bei  $m = \infty$  reduziert sich die Kurve auf eine vertikale Gerade von der Länge 1, errichtet in der Abszisse des Mittelwertes; die Wahrscheinlichkeit für eine Abweichung vom Mittelwert wird in diesem Grenzfall also gleich Null. Dies erklärt die Stabilität von Belastungsspitzen bei Versorgungsbetrieben, solange die äusseren Verhältnisse, wie angeschlossene Apparate, Wochentag, Witterung (Jahreszeit, Aussentemperatur, Sonnenschein usw.) unverändert bleiben. Die Stabilität ist umso besser, je grösser der Betrieb ist.

Auf dem absteigenden Kurventeil werden die Werte der Verteilungsfunktion  $B(x)$  immer rascher klein, wie die Abnahme des Quotienten  $B(x+1)/B(x)$  für wachsendes  $x$  zeigt. Augenfällig wird diese Eigenschaft bei Darstellung der Verteilungsfunktion im logarithmischen Koordinatensystem (siehe Bild 3, Polygonzüge I und II) <sup>2)</sup>.

Nach diesen einführenden Bemerkungen kehren wir zu unserem Hauptproblem zurück: Es ist für ein System von  $m$  gleichen Apparaten, von denen jeder einzelne mit der Wahrscheinlichkeit  $p = t/T$  im Betrieb steht, diejenige Apparatezahl  $x_k$  so zu berechnen, dass Ueberlastungen des Systems nur sehr kurzzeitig auftreten können, so dass sie weder zu Apparate-Beschädigungen noch zu Betriebsstörungen führen können. Diese Kurzzeitigkeit ist gegeben durch die Wahrscheinlichkeit, dass entweder  $x_k + 1$  oder  $x_k + 2, \dots$  oder  $m$  Apparate gleichzeitig im Betrieb stehen, und sie soll einen bestimmten kleinen kritischen Wert  $P_k$  nicht überschreiten.  $P_k$  richtet sich naturgemäss nach der Art der Apparate und des Betriebs. Es muss also sein

$$(3) \sum_{x_k+1}^m B(x) = P_k$$

Aus dieser binomischen Reihe bestimmt sich  $x_k$ , für welche Apparatezahl die Anlage zu dimensionieren ist. Wird beispielsweise  $P_k = 0,01$  festgesetzt und die Anlage entsprechend dimensioniert, so ergibt sich, dass, bezogen auf die Hauptbelastungsstunde, während 36 Sekunden Ueberlastungen, die unter Umständen sehr erheblich sein können, auftreten. Dies ist in den meisten Fällen zu viel.  $P_k$  wird daher zweckmässigerweise auf 0,002 oder 0,001 festzusetzen sein.

Wegen der Abnahme des Quotienten  $B(x+1)/B(x)$  im absteigenden Kurvengebiet der Verteilungsfunktion genügt es meist, nach einer ersten Abschätzung von  $x_k$  den Wert von  $B(x_k + 1)$ , event. noch denjenigen von  $B(x_k + 2)$  zu berechnen <sup>3)</sup>.

### III. Zusammenhänge zwischen binomischer, Poissonscher und Normal-Verteilung

Die beiden wichtigsten charakteristischen Grössen einer statistischen Verteilungsfunktion  $\varphi(x)$  sind:

<sup>2)</sup> Weil die Endwerte  $B(0) = (1-p)^m$  und  $B(m) = p^m$  besonders leicht zu rechnen sind, können die übrigen Werte mittels der Rekursionsformel  $\frac{B(x+1)}{B(x)} = \frac{p}{1-p} \frac{m-x}{x+1}$  auf einfache Weise ermittelt werden.

Für die später erwähnte Poissonsche Verteilung (Gleichung (8)) lautet die Rekursionsformel  $\frac{W(x+1)}{W(x)} = \frac{\lambda}{x+1}$ .

<sup>3)</sup> Im Hinblick auf Formel (3) ist zu erwähnen, dass das Integral der in der mathematischen Statistik verwendeten  $F$ -Verteilung ebenfalls eine Teilsumme einer binomischen Reihe ist, in welcher aber die Binomialkoeffizienten  $\binom{m}{x}$  und die Exponenten von  $p$  und  $(1-p)$  Funktionen zweier Parameter  $n_1$  und  $n_2$  sind. Für gewisse ganzzahlige Werte von  $n_1$  und  $n_2$  liegen Tabellen vor. Ein Uebergang auf die  $F$ -Verteilung hätte aber nur einen Sinn, wenn aus dem gegebenen  $m$  und  $p$  solche  $n_1$  und  $n_2$  errechnet werden, für die die Tabellen  $F$ -Werte angeben oder durch Interpolation bestimmt werden können. In ähnlicher Weise ist die  $\chi$ -Verteilung eine Teilsumme einer Poisson-Reihe

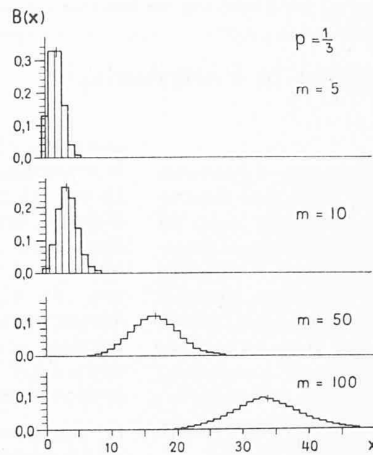


Bild 1. Binomische Verteilungen

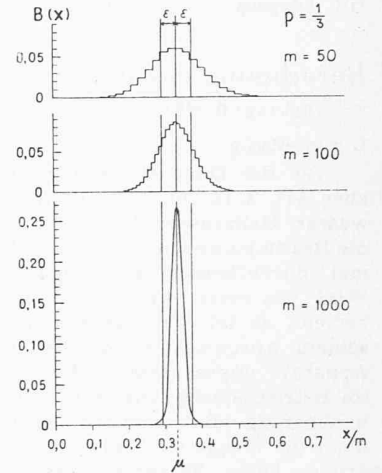


Bild 2. Binomische Verteilungen

a) der Durchschnitt

$$(4) \mu = \sum_{x=0}^m x \varphi(x)$$

b) die quadratische Streuung

$$(5) \sigma^2 = \sum_{x=0}^m (x - \mu)^2 \varphi(x)$$

Für die Bernoullische Verteilung wird

$$(6) \text{ der Durchschnitt } \mu = m p$$

$$(7) \text{ die quadratische Streuung } \sigma^2 = m p (1 - p)$$

Lässt man in der Bernoullischen Gleichung  $m$  wachsen, theoretisch bis zu  $\infty$ ,  $p$  gleichzeitig aber immer kleiner werden, theoretisch also gegen Null abnehmen, jedoch so, dass das Produkt  $m p$  eine endliche Zahl  $\lambda$  ist, so geht die Gleichung (1) über in das Gesetz

$$W(x) = e^{-m p} \frac{(m p)^x}{x!}$$

oder, wenn  $m p = \lambda$  gesetzt wird:

$$(8) W(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

(Poissonsche Verteilung)

Während Gleichung (1) zwei Parameter  $m, p$  und die Variable  $x$  aufweist, enthält Gleichung (8) nur einen Parameter  $\lambda$  und die Variable  $x$ . Für die Poissonsche Verteilung werden:

$$(9) \mu = \lambda$$

$$(10) \sigma^2 = \lambda$$

Durchschnitt und quadratische Streuung haben bei der Poissonschen Verteilung also den selben Wert  $\lambda$ . Das Häufigkeitsmaximum liegt, sofern  $\lambda$  ganzzahlig ist, bei  $x = \lambda$  und  $x = \lambda - 1$ . Ist dagegen  $\lambda$  eine gebrochene Zahl, so tritt die maximale Häufigkeit bei der nächsten kleineren Zahl auf, z. B. für  $\lambda = 2,9$  bei  $x = 2$ .

Die Poissonsche Verteilung ist die Verteilung der seltenen Ereignisse und gibt umso genauer die tatsächlichen Häufigkeiten wieder, je kleiner  $p$  und je grösser  $m$  ist.

Setzt man in der binomischen Verteilung  $p = 1/2 = 1 - p$  und lässt ferner  $m$  wiederum wachsen und zu Unendlich werden, so geht diese Verteilung über in die Gleichung

$$(11) \varphi(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

(Normalverteilung oder Gauss-Laplacesche Verteilung)

Für den Uebergang von der binomischen zur Normalverteilung gelten die Beziehungen:

$$\mu = m p \text{ und } \sigma = \sqrt{m p (1 - p)}$$

$\mu$  ist hier zugleich der  $x$ -Wert für die grösste Häufigkeit.

Selbst wenn  $p \neq 1/2$ ,  $m$  jedoch gross, d. h.  $m p > 10$  ist, so gibt die Normalverteilung die Verhältnisse in einer für die Praxis durchaus genügenden Genauigkeit wieder.

**IV. Apparate mit konstanter Belastung und verschiedenen Einzelwahrscheinlichkeiten**

a) Wir betrachten zuerst zwei Apparategruppen von je  $m/2$  Apparaten mit gleichem Anschlusswert  $a$  aber mit verschiedenen Einzelwahrscheinlichkeiten  $p_1$  und  $p_2$ . Eine betriebliche Abhängigkeit eines Apparates einer Gruppe von einem andern Apparat der gleichen Gruppe oder einem Apparat einer andern Gruppe soll grundsätzlich ausgeschlossen sein (stochastische Unabhängigkeit). Für jede Gruppe soll eine binomische Verteilung gelten, nämlich:

für die erste Gruppe mit der Einzelwahrscheinlichkeit  $p_1$ ,

$$B_1(x_1) = \binom{m/2}{x_1} p_1^{x_1} (1 - p_1)^{m/2 - x_1}$$

für die zweite Gruppe mit der Einzelwahrscheinlichkeit  $p_2$

$$B_2(x_2) = \binom{m/2}{x_2} p_2^{x_2} (1 - p_2)^{m/2 - x_2}$$

Es sei nun  $W(x)$  die Wahrscheinlichkeit dafür, dass gerade  $x$  Apparate im Gesamten im Betrieb stehen, dass also, weil ja der Anschlusswert  $a$  der Apparate beider Gruppen gleich ist, die Netzbelastung  $ax$  entstehe. Diese Netzbelastung tritt ein für:

- $x_1 = 0$  und  $x_2 = x$  mit der Wahrscheinlichkeit  $w_0(x) = B_1(0) B_2(x)$
- oder  $x_1 = 1$  und  $x_2 = x - 1$  mit der Wahrscheinlichkeit  $w_1(x) = B_1(1) B_2(x - 1)$
- oder  $x_1 = 2$  und  $x_2 = x - 2$  mit der Wahrscheinlichkeit  $w_2(x) = B_1(2) B_2(x - 2)$
- .....
- oder  $x_1 = x$  und  $x_2 = 0$  mit der Wahrscheinlichkeit  $w_x(x) = B_1(x) B_2(0)$

Daher ist schliesslich

$$(12) \quad W(x) = \sum_{\substack{x_1=0 \\ x_2=x}}^{x_1=x} B_1(x_1) B_2(x_2)$$

wobei für jeden Summanden  $x = x_1 + x_2$  gelten muss. Ferner sind die folgenden Einschränkungen zu beachten:

$$0 \leq x \leq m; \quad 0 \leq x_1 \leq m/2; \quad 0 \leq x_2 \leq m/2$$

Die Anzahl der Produkte, die für die Bestimmung des numerischen Wertes von  $W(x)$  von 0 bis  $m$  zu rechnen sind, beträgt:

$$(13) \quad Z = \left(\frac{m}{2} + 1\right)^2$$

Die Vermutung liegt nahe,  $W(x)$  sei wiederum eine binomische Verteilung mit der Variablen  $x$  und einer noch unbekannt Einzelwahrscheinlichkeit  $p$ , so dass also zu gelten hätte:

$$(14) \quad W(x) = \binom{m}{x} p^x (1 - p)^{m - x}$$

Wenn dem so wäre, so müsste diese Gleichung auch erfüllt sein für die Spezialfälle:

$$W(0) = B_1(0) B_2(0), \text{ woraus gemäss Fussnote } ^2)$$

$$(15) \quad 1 - p = \sqrt{(1 - p_1)(1 - p_2)}$$

und

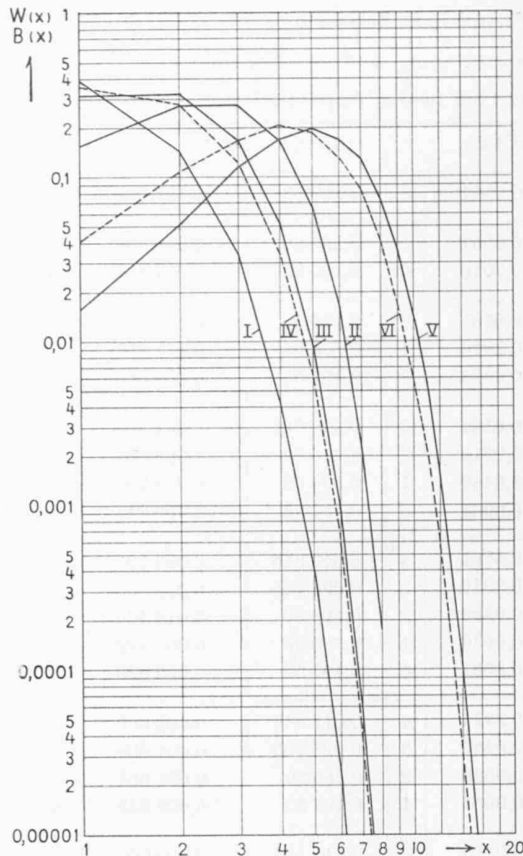
$$W(m) = B_1\left(\frac{m}{2}\right) B_2\left(\frac{m}{2}\right) \text{ woraus}$$

$$(16) \quad p = \sqrt{p_1 p_2}$$

Die beiden Wurzelausdrücke (15) und (16) sind aber nur vereinbar für  $p_1 = p_2 = p$ . Für  $p_1 \neq p_2$  hingegen ist  $W(x)$  nicht eine binomische Verteilung.

Für grosse Werte von  $m$  ist die Rechenarbeit, die sich durch die Zahl  $Z$  (Gleichung (13)) ausdrückt, sehr erheblich. Mittels der Gleichungen (14) und (16) ist es immerhin möglich,  $W(x)$  für die höheren Werte von  $x$ , die für den vorliegenden Zweck allein massgebend sind, näherungsweise zu berechnen, weil sich ja für  $x = m$  vollständige Uebereinstimmung, für die vorangehenden  $x$ -Werte auf dem absteigenden Kurventeil jedoch noch eine genügende Genauigkeit ergibt, die zur Bestimmung des  $x_k$  ausreicht.

Der allgemeine Fall von  $c$  Apparategruppen von je  $m/c$  Apparaten mit gleichem Anschlusswert für alle Apparate-



I	$p = 1/10, m = 8$	$P_k \leq 0,001$	$x_k = 4$
II	$p = 1/2, m = 8$		$x_k = 7$
III	Komb. Belastung: $(p_1 = 1/10, m_1 = 4) + (p_2 = 1/2, m_2 = 4)$	genaue Rechnung	$x_k = 5$
IV	" " " " " " " " " " " "	Näherungsrechnung zu III	$x_k = 5$
V	" " " " " " " " " " " "	genaue Rechnung	$x_k = 12$
VI	" " " " " " " " " " " "	Näherungsrechnung zu V	$x_k = 11$

Bild 3. Belastungsverteilungen

gruppen, jedoch mit den verschiedenen Einzelwahrscheinlichkeiten  $p_1, p_2, \dots, p_c$  ergibt die Gleichung

$$(17) \quad W(x) = \sum B_1(x_1) B_2(x_2) \dots B_c(x_c)$$

wobei wiederum für jeden Summanden  $x = x_1 + x_2 + \dots + x_c$  gelten muss und die Einschränkungen  $0 \leq x \leq m; 0 \leq x_1 \leq \frac{m}{c}; 0 \leq x_2 \leq \frac{m}{c}; \dots; 0 \leq x_c \leq \frac{m}{c}$  zu beachten sind. Die Anzahl der zu berechnenden Produkte ist schliesslich gegeben durch:

$$(18) \quad Z = \left(\frac{m}{c} + 1\right)^c$$

Auch hier gilt die Kontrollgleichung

$$(19) \quad \sum_{x=0}^m W(x) = 1$$

Die Näherungsgleichungen lauten schliesslich:

$$(20) \quad p = \sqrt[c]{p_1 p_2 \dots p_c}$$

und

$$(21) \quad W(x) = \binom{m}{x} p^x (1 - p)^{m - x}$$

b) Sind die Apparatezahlen in den verschiedenen Gruppen verschieden, also  $m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq \dots \neq m_c$ , so trägt die Anzahl der Produkte für die Bildung der Gleichung (12) im ganzen Bereich:

$$(18a) \quad Z = (m_1 + 1)(m_2 + 1) \dots (m_c + 1)$$

Die Einschränkungen lauten hier:

$$0 \leq x \leq m; \quad 0 \leq x_1 \leq m_1; \dots; \quad 0 \leq x_c \leq m_c$$

Die Näherungsgleichung geht über in:

$$(16a) \quad p = \sqrt[m]{p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_c^{m_c}}$$

wobei  $m = m_1 + m_2 + \dots + m_c$  die Gesamtzahl der im Zusammenspiel stehenden Apparate und  $p$  die entsprechende fiktive Einzelwahrscheinlichkeit bedeuten.

Tabelle 1. Kombinierte Belastung:

vier Apparate  $p_1 = \frac{1}{10}$  und vier Apparate  $p_2 = \frac{1}{3}$   
 (Anschlusswert bei beiden Apparate-Typen gleich)

$x$	$x_1$	$B_1(x_1)$	$x_2$	$B_2(x_2)$	$B_1(x_1) \cdot B_2(x_2)$	$W(x)$
0	0	0,6561	0	0,197 53	0,129 599	0,129 599
1	0	0,6561	1	0,395 06	0,259 199	
	1	0,2916	0	0,197 53	0,057 600	0,316 799
2	0	0,6561	2	0,296 30	0,194 402	0,319 202
	1	0,2916	1	0,395 06	0,115 200	
	2	0,0486	0	0,197 53	0,009 600	
3	0	0,6561	3	0,098 765	0,064 800	0,171 112
	1	0,2916	2	0,296 30	0,086 401	
	2	0,0486	1	0,395 06	0,019 200	
	3	0,0036	0	0,197 53	0,000 711	
4	0	0,6561	4	0,012 346	0,008 100	0,052 742
	1	0,2916	3	0,098 765	0,028 800	
	2	0,0486	2	0,296 30	0,014 400	
	3	0,0036	1	0,395 06	0,001 422	
	4	0,0001	0	0,197 53	0,000 020	
5	1	0,2916	4	0,012 346	0,003 600	0,009 506
	2	0,0486	3	0,098 765	0,004 800	
	3	0,0036	2	0,296 30	0,001 067	
	4	0,0001	1	0,197 53	0,000 039	
6	2	0,0486	4	0,012 346	0,000 600	0,000 985
	3	0,0036	3	0,098 765	0,000 355	
	4	0,0001	2	0,296 30	0,000 030	
7	3	0,0036	4	0,012 346	0,000 044	0,000 054
	4	0,0001	3	0,098 765	0,000 010	
8	4	0,0001	4	0,012 346	0,000 001	0,000 001

Kontrolle:  $\sum W(x) = 1,000\ 000$

c) Sind schliesslich auch noch die Anschlusswerte  $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_c$  für die verschiedenen Apparategruppen verschieden, so ist die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Belastung  $b$

$$(22) \quad W(b) = \sum B_1(x_1) B_2(x_2) \dots B_c(x_c)$$

wobei die Summe jeweils über alle diejenigen Werte zu bilden ist, für die gilt

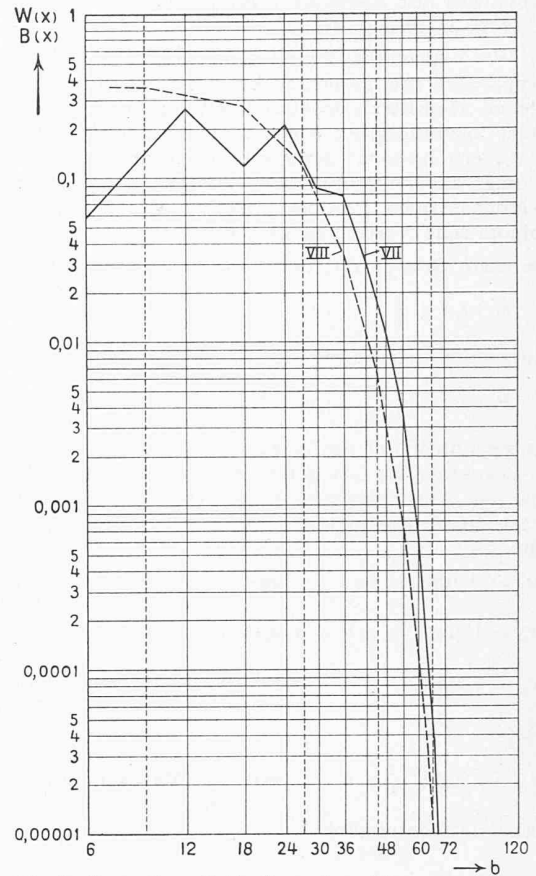
$$\sum_{i=1}^c a_i x_i = b$$

Der Polygonzug einer solchen Verteilung ist nicht mehr glatt, sondern weist Unebenheiten auf (siehe Bild 4, Kurve VII), die im sinkenden Kurventeil allerdings weniger in Erscheinung treten.

$Z$  und  $p$  können wiederum nach den Gleichungen (18a) und (16a) gerechnet werden; es darf aber nicht übersehen werden, dass die Näherungsrechnung nur mehr einen orientierenden Charakter hat, weil ja die Apparategruppen mit grossen Werten von  $a, m$  und  $p$  überwiegenden Einfluss haben.

In Bild 3 stellen die Polygonzüge I und II zwei verschiedene binomische Verteilungen dar, III eine kombinierte Verteilung von zwei Apparategruppen gleicher Anzahl und von gleichem Anschlusswert (Fall a, siehe auch Tabelle 1), IV die entsprechende genäherte Verteilung, V eine kombinierte Verteilung von zwei Apparategruppen verschiedener Anzahl aber von gleichem Anschlusswert (Fall b) und VI die entsprechende Näherung.

Ein Beispiel für Fall c zeigt Bild 4, wobei VII nach der genauen Methode und VIII nach der Näherungsrechnung bestimmt wurde, VIII ist identisch VII von Bild 3, wurde aber statt über den Apparatezahlen 1, 2, usw. als Abszissen über dem mittleren Anschlusswert eines Apparates, 9, und dessen Vielfachen aufgetragen. Die Abweichung der Näherung von



VII  $(p_1 = 1/10, m_1 = 4, a_1 = 6) + (p_2 = 1/3, m_2 = 4, a_2 = 12)$   
 genaue Rechnung  $p_k \leq 0,001 \quad b_k = 54$   
 VIII Näherungsrechnung zu VII  $p = 0,183; m = 8; a_m = 9; b_k = 48$

Bild 4. Belastungsverteilungen

der genauen Rechnung ist in diesem Fall naturgemäss erheblich grösser als in den weiter oben behandelten Fällen.

V. Apparate mit variabler Belastung

Kochherde, sowohl Gasherde als Elektroherde, weisen eine variable Belastung auf. Beim Elektroherd folgen die Belastungsänderungen in Stufen (diskontinuierlich), beim Gasherd dagegen sind alle Belastungswerte zwischen 0 und dem Anschlusswert möglich (kontinuierlich).

Betriebsmessungen zeigen, dass die Belastungsverteilung gut durch eine der durch die Gleichungen (1), (8) oder (11) gegebenen Verteilungsfunktionen dargestellt werden kann. Auch beim Gasherd darf in erster Annäherung eine diskontinuierliche Verteilung zugrunde gelegt werden, weil für die Auswertung von Belastungsmessungen (direkte Zählerablesungen oder Diagramm von Registrierapparaten) der Belastungsbereich zwischen 0 und dem Anschlusswert in eine Anzahl von gleichen Intervallen unterteilt werden muss.

Die Belastung eines Herdes wird also als ein Zusammenspiel von  $u$  «Elementarbelastungen» aufgefasst und dementsprechend gemäss Abschnitt II rechnerisch behandelt.  $x$  bedeutet dann die Anzahl der momentan im Betrieb stehenden Elementarbelastungen mit der Einzelwahrscheinlichkeit  $p$ . Für den einzelnen Herd gilt demnach

$$(23) \quad B(x) = \binom{u}{x} p^x (1-p)^{u-x}$$

wobei  $0 \leq x \leq u$ . Sind  $m$  Herde an ein Netz angeschlossen, so stehen im gesamten  $mu$  Elementarbelastungen im Zusammenspiel, deren Zugehörigkeit zum einen oder andern Herd für die Gesamtbelastung belanglos ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass gerade  $x$  Elementarbelastungen im Betrieb und  $(mu - x)$  Elementarbelastungen ausser Betrieb stehen, ist daher gegeben durch:

$$(24) \quad B(x) = \binom{mu}{x} p^x (1-p)^{mu-x}$$

wobei nun aber  $0 \leq x \leq mu$  gilt. Aus praktischen Gründen wird schon bei der Versuchsauswertung der Belastungsbereich

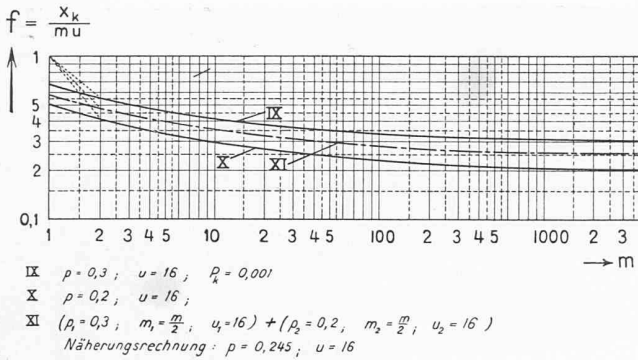


Bild 5. Belastungsanteil des Gesamt-Anschlusswertes

eines Apparates so unterteilt, dass sich für  $u$  Werte zwischen 10 und 20 ergeben.  $mu$  nimmt rasch grosse Werte an und der Uebergang auf die Normalverteilung ist daher zulässig und zweckmässig

$$(25) \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$(26) \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$(27) \quad \mu = mu p$$

$$(28) \quad \sigma = \sqrt{m u p (1-p)}$$

In manchen Handbüchern über mathematische Statistik und in statistischen Tabellenwerken finden sich Zahlenwerte für die standardisierte Normalverteilung:

$$(29) \quad y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$(30) \quad Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Für  $t = +\infty$  wird  $Y = 0,5$ , weil ja der Integrationsbereich von 0 bis  $+\infty$  bzw. von 0 bis  $-\infty$  je nur die Hälfte der Wahrscheinlichkeitsfläche umfasst.

Durch Vergleich der sechs letzten Gleichungen folgt sofort:

$$(31) \quad \frac{y}{\sigma} = \varphi(x)$$

$$(32) \quad t = \frac{x - mu p}{\sqrt{m u p (1-p)}}$$

Die Rechnung wird nun für unsern Zweck besonders einfach. Analog Gleichung (3) und den daran angeschlossenen Bemerkungen wird

$$(33) \quad Y_k = 0,5 - P_k$$

Bei festgesetztem  $P_k$  lässt sich aus Tabellen für  $Y$  das zugehörige  $t_k$  entnehmen. Aus Gleichung (32) berechnet man schlusslich  $x_k$ . Bild 5 zeigt die Funktion  $x_k/mu$  für  $p = 0,2$  (Kurve IX) und  $p = 0,3$  (Kurve X), beides für  $P_k = 0,001$ . Dieser Quotient  $x_k/mu$  gibt den Anteil an von der Summe aller Anschlusswerte, der der Netzberechnung zu Grunde zu legen ist.

Bei gewissen Erscheinungen mit unsymmetrischer Häufigkeitsverteilung ist nicht die Funktion des Argumentes  $x$  eine Normalverteilung, sondern die einer von  $x$  abhängigen Hilfsvariablen  $z = \psi(x)$ . Es ist dann sinngemäss zu verfahren, wobei  $z$  an die Stelle von  $x$  tritt. Der Reihe nach wird aus dem gegebenen  $P_k$  bestimmt:  $Y_k, t_k, z_k, x_k$ .

Bei manchen volkswirtschaftlichen Statistiken z. B. ist  $\psi(x)$  eine logarithmische Funktion, wie Gibrat [5] an zahlreichen Beispielen gezeigt hat. Bei andern Verteilungen kann auch die ursprünglich unsymmetrische Verteilung mit der Hilfsfunktion  $z = 1/x$  in eine symmetrische Normalverteilung übergeführt werden.

**VI. Mehrere Gruppen von Apparaten mit variabler Belastung und verschiedener Charakteristik**

Es seien  $c$  Apparategruppen mit gleichem Apparateanschlusswert, aber verschiedener Normalverteilung gegeben, die durch entsprechende binomische Verteilungen von der

Form der Gleichung (24) ersetzt werden können. Wir erhalten dann entsprechend Abschnitt III b sinngemäss als Näherung:

$$(34) \quad p = \sqrt{\frac{m u}{p_1^{m_1 u_1} p_2^{m_2 u_2} \dots p_c^{m_c u_c}}}$$

Darin bedeutet:

$mu = m_1 u_1 + m_2 u_2 + \dots + m_c u_c$  die Gesamtzahl der im Zusammenspiel stehenden Elementarbelastungen;

$m$  die Gesamtzahl der Apparate;

$u$  eine mittlere Anzahl der Elementarbelastungen pro Apparat

Im weiteren wird nach Abschnitt V verfahren. In Bild 5 gibt Kurve XI das Resultat wieder für zwei gleich grosse Gruppen von Apparaten mit  $p_1 = 0,2$  bzw.  $p_2 = 0,3$ .

Den Anlass zu dieser Studie gaben Untersuchungen an Gasleitungsnetzen. Es war häufig die Frage zu entscheiden, ob ein vorhandenes Netz den Anschluss neuer Apparate (Industrie, Gewerbe, Gasheizungen, usw.) zulasse, deren Belastungsstruktur sehr stark von derjenigen der bereits angeschlossenen Apparate abweicht und deren Einzelwahrscheinlichkeit sehr gross ist, oder welche Leitungsverstärkungen gegebenenfalls erforderlich wären. Eine dem zusätzlichen Anschlusswert entsprechende Extrapolation, die eine gleichbleibende Struktur der Belastungsverhältnisse voraussetzt, war daher nicht möglich. Dies führte im besonders zu den im Abschnitt IV erläuterten Ueberlegungen.

**Literaturverzeichnis:**

- [1] W. Kummer: Analytische Bestimmung des Schwankungsverhältnisses im Kraftbedarf elektrischer Bahnen und ähnlicher Zentralanlagen. SBZ Bd. 86, Nr. 14, S. 169\* (3. 10. 25).
- [2] W. Kummer: Die Effektschwankung im elektrischen Betriebe der Schweizerischen Bundesbahnen. SBZ Bd. 96, Nr. 1, S. 1\* (5. 7. 30).
- [3] W. Kummer: Die Auswertung unsymmetrischer Verteilungsreihen der Grosszahl-Forschung. SBZ Bd. 101, Nr. 10, S. 123\* (18. 3. 33).
- [4] H. Schellenberg: Belastungsausgleich in Verteilanlagen. SBZ 1947, Nr. 36, S. 495\*.
- [5] R. Gibrat: Les inégalités économiques. 1931.
- [6] A. Linder: Statistische Methoden für Naturwissenschaftler, Mediziner und Ingenieure. Verlag Birkhäuser, Basel 1945.

**Unterwasserkraftwerke**

DK 627.8

Unterwasserkraftwerke stehen nun teilweise schon mehr als zehn Jahre im Betrieb, so dass über ihre technische Entwicklung und über die bisherigen Betriebserfahrungen zuverlässige Angaben erhältlich sein sollten. H. E. Fentzloff berichtet in «La Houille Blanche» 1949, Nr. 5, dieser Kraftwerktyp hätte sich in jeder Beziehung bewährt. Zunächst ist daran zu erinnern, dass es sich bei den bisher erstellten Anlagen nach unsern Begriffen um kleinere Kraftwerke bzw. um Maschinengruppen mit bescheidenen Leistungen handelt (vgl. Tabelle), dass also Rückschlüsse auf Kraftwerke ausserhalb dieser Grössenordnung nicht ohne weiteres zulässig sein dürften. Ausserdem enthält der erwähnte Artikel keine Wirtschaftlichkeitsberechnungen; diese würden übrigens im Hinblick auf die damaligen Bau- und Geldverhältnisse in Deutschland auch keinen Vergleich mit normalen Voraussetzungen gestatten. Wohl war der spezifische Aufwand an Beton und Stahl für die Tiefbauarbeiten pro Leistungseinheit relativ gering; dies allein kann jedoch kein genügendes Kriterium für die totalen Bauaufwendungen sein. Abgesehen von der Beurteilung des baulichen Teiles der Anlagen sind indessen in maschinentechnischer Beziehung Fortschritte zu verzeichnen, welche die ursprüngliche Bauweise Arno Fischers<sup>1)</sup> in etwas günstigerem Licht erscheinen lassen. Beispielsweise ist von geringen Spaltverlusten und einfacher Demontage der Turbinen sowie von grosser Betriebssicherheit und guter

Tabelle über einige Unterwasserkraftwerke

Kraftwerk	Fluss	Betriebsbeginn	Gefälle m	Wasserdurchfluss m <sup>3</sup> /s	Turbinen	
					Zahl	Totale Leistung PS
Rostin . . . . .	Persante	1936	3,75	12,6	2	530
Steinbach . . . . .	Iller	1938	8,70	100	4	10 000
(9 Standardwerke) . . . . .	Lech	1940	8,10	120	6	11 100
Freilassing . . . . .	Saalach	1942	8,23	60	3	5 600

<sup>1)</sup> Siehe SBZ 1948, Nr. 32, S. 449.