Der zusammengesetzte Druckstab aus Holz: ein Beitrag zu seiner Berechnung

Autor(en): **Lombardi, Giovanni**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **69 (1951)**

Heft 22

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-58869

69. Jahrgang
Nachdruck von Bild oder Text nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet
Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich
Nummer 22

Der zusammengesetzte Druckstab aus Holz

Ein Beitrag zu seiner Berechnung

DK 624.075.22.011.1

Von GIOVANNI LOMBARDI, Dipl. Bau-Ing., Zürich

1. Einleitung

Der zusammengesetzte Holzdruckstab — ein in der Holzbaupraxis überaus wichtiger Tragkörper — ist bis vor kurzem wenig untersucht worden. Prof. Dr. F. Stüssi hat den Fall eines rahmenförmigen Holzstabes mit nachgiebigen Verbindungen behandelt[1]). Hingegen scheint es, dass der Fall einer kontinuierlichen Verbindung der verschiedenen Holzteile bis heute noch nicht der mathematischen Analyse unterworfen wurde. Es ist der Zweck der folgenden Arbeit, dieses Problem zu untersuchen und Formeln aufzustellen, die zur Bemessung solcher Druckstäbe bzw. ihrer Verbindungsmittel dienen sollen.

2. Der zusammengesetzte Holzdruckstab mit kontinuierlichen Verbindungen

Man verstehe darunter einen aus einer beliebigen Anzahl von parallellaufenden, miteinander verbundenen prismatischen Holzteilen zusammengesetzten Druckstab. Dabei seien die Verbindungsmittel zwischen den einzelnen Teilen nicht wie beim rahmenförmigen Stab in einzelnen Punkten konzentriert, sondern auf die ganze Länge des Stabes gleichmässig verteilt angenommen. Da die vorliegende Untersuchung keine weitere Voraussetzung über die konstruktive Ausbildung der Verbindungen macht, sind die Ergebnisse auf jede Verbindungsart anwendbar (z. B. auf Leimung, Nagelung oder auf genügend verteilte Bolzen- bzw. Dübelverbindungen).

Als Grundlage der statischen Berechnung dienen folgende Voraussetzungen:

a) der Druckstab ist gerade und aus geraden Holzteilen gebildet;
b) alle Teile haben über die ganze Länge einen konstanten Querschnitt;
c) gleich steife Verbindungsmittel seien gleichmässig längs der Fugen verteilt. Jedoch können sie unter Vorbehalt der Voraussetzung d) von Fuge zu Fuge verschieden sein;
d) der zusammengesetzte Stab ist im Querschnitt symmetrisch bezüglich der für Knicken massgebenden Hauptaxe (y);
e) das Holz und die Verbindungsmittel sind elastisch;
f) der Stab ist auf zentrisches Knicken beansprucht.

Die im folgenden dargelegte Methode ist auf Druckstäbe mit beliebig vielen Einzelteilen anwendbar; sie wird jedoch hier, der Einfachheit der Darstellung wegen, nur für den dreiteiligen Stab entwickelt. Bei mehr als drei Teilen gestaltet sich die Berechnung etwas komplizierter, ist aber ohne zusätzliche Schwierigkeiten durchführbar. Deshalb begnügt man sich hier, allein die Endergebnisse für den zwei-, vier- und fünfteiligen Stab wiederzugeben.

3. Qualitative Betrachtung des Knickens des dreiteiligen Druckstabes

Bild 1 zeigt den der Untersuchung zu Grunde gelegten dreiteiligen Stab. Es werde zuerst beidseitig gelenkige Lagerung vorausgesetzt. Im Bilde 2 ist der selbe Stab in ausgeknickter Lage gezeigt. Beachtenswert ist die relative Stellung der Einzelteile und die Verschiebung, die zwischen ihnen entsteht. Je nach der Steifigkeit der Verbindungen können verschiedene Fälle unterschieden werden.

Erster Grenzfall. Die drei Teile sind starr miteinander verbunden, so dass keine Verschiebungen zwischen ihnen möglich sind. Der Druckstab verhält sich wie ein homogener Einzelstab. Für die Stellung des Endquerschnittes gilt dann die Linie 1 in Bild 2.

Zweiter Grenzfall. Die Verbindungen existieren nicht; die drei Stäbe sind unabhängig, und die Endquerschnitte stellen sich nach der Linie 3 ein. Die Schwerpunkte der drei Endquerschnitte bleiben auf einer waagrechten Linie.

Allgemeiner Fall. Die Verhältnisse werden im allgemeinen zwischen den beiden obigen Grenzfällen liegen. Für die Endquerschnitte gilt die Linie 2. Zwischen den Einzelteilen entstehen Schubkräfte, welche die Tendenz haben, den äussersten Balken zu verlängern und den inneren zu verkürzen, während der mittlere in der Länge durch das Ausknicken (nicht die Lastanbringung) unverändert bleibt.

Mit $v(x)$ bezeichne man die Aenderung des Abstandes des Punktes x eines Stabes vom Mittelpunkt der Knicklänge aus. Dabei ist natürlich $v(x = 0) = 0$. Die Verschiebungen zwischen den Balken seien mit $s(x)$ bezeichnet. Die Kräfte $F(x)$ in den Verbindungsmitteln sind dann proportional diesen Verschiebungen. Zu diesen Schubkräften können noch senkrecht zur Stabaxe Zug- oder Druckkräfte $p(x)$ hinzutreten, die zur Aufgabe haben, die gleiche Durchbiegung $w(x)$ der drei Teile zu gewährleisten. Die Kräfte $F(x)$ verursachen die Längenänderung der äusseren Stäbe.

4. Aufstellung der Differentialgleichungen des Knickens für den zusammengesetzten dreiteiligen Druckstab

Der im Bilde 1 dargestellte Stab sei mit der noch unbekannten Knicklast P_k belastet und vorläufig durch seitliche Stützungen am Ausknicken verhindert. Diese Knicklast verteilt sich auf die drei Teile. Im allgemeinen jedoch wird die Verteilung nicht den verschiedenen Holzquerschnitten proportional sein, so dass die Stäbe sich nicht in gleichem Masse verkürzen und zwischen ihnen Schubkräfte $F_0(x)$ und Querbelastungen $p_0(x)$ entstehen. In den verschiedenen Holzbalken sind die Biegemomente aus F_0 und p_0 gleich null, denn die Axe bleibt gerade. Man entferne nun die äussere Stützung, und der Stab knicke aus. Die entstehenden Verformungen und Kräfte seien an Hand des Bildes 3 untersucht.

1. Geometrische Bedingung

Aus Bild 3 geht unmittelbar folgende Beziehung zwischen der Verschiebung $s(x)$, der Stabverlängerung $v(x)$ und der Neigung der Stabaxe $w'(x)$ hervor:

$$(1) \qquad s + v + a\,w' = 0$$

wobei $s = s(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$ und $' = d/dx$.

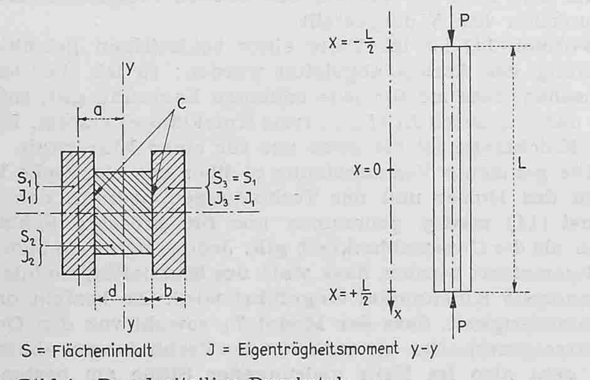

Bild 1. Der dreiteilige Druckstab

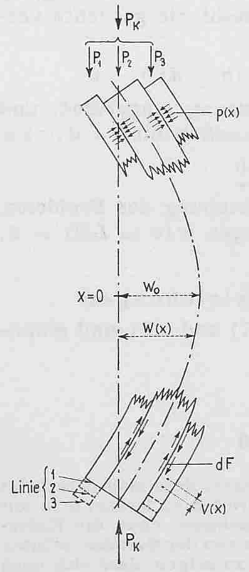

Bild 2. Der ausgeknickte Stab

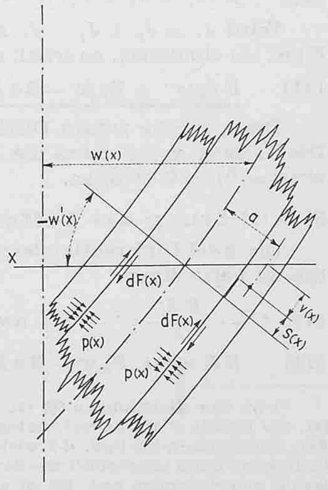

Bild 3. Aufstellen der Differentialgleichungen

[1]) Vgl. SBZ 1947, Nr. 24, S. 316*.

2. Steifigkeit der Verbindungen

Die auf die ganze Stablänge als konstant vorausgesetzte Verbindungssteifigkeit sei mit c bezeichnet. Die in den Fugen auftretenden Schubkräfte $F(x)$ lassen sich schreiben:

$$dF = c\,s\,dx \tag{2}$$

mit $F = F(x)$.

3. Längenänderung der Stäbe

Die Elementarkräfte dF erzeugen in den äusseren Holzteilen eine Längskraft:

$$F = \int_x^{L/2} dF = c\int_x^{L/2} s\,dx \tag{3}$$

mit $F = 0$ für $x = L/2$

Diese Längskraft verursacht die Längenänderung $v(x)$ der Stäbe.

$$v = \int_{x=0}^{x} \frac{F\,dx}{E S_1} \tag{4}$$

E = Elastizitätsmodul des Holzes in der Faserrichtung.

4. Differentialgleichung für die Stablängenänderung

Aus diesen ersten Beziehungen lässt sich die erste Differentialgleichung des Problems ableiten. Durch Differenzieren von (4) erhält man:

$$v' = \frac{F}{E S_1} \tag{5}$$

welches in (3) eingesetzt nach einer zweiten Differentiation in

$$v'' = -\frac{c\,s}{E S_1} \tag{6}$$

übergeht. Wird nun s aus (6) und (2) eliminiert, so entsteht die gesuchte Differentialgleichung:

$$-\frac{E S_1}{c}\,v'' + v + a w' = 0 \tag{7}$$

Die Lösung $v(x)$ hat die Bedingungen: $v_{(x=0)} = 0$ und $v'_{(x=L/2)} = 0$ zu erfüllen.

5. Aufstellung der Knickgleichung

Durch Gleichsetzen der äusseren und der inneren Momente für jeden Stab werden die drei Knickgleichungen gebildet:

$$\begin{aligned} &\text{Stab 1: } M_1(x) = P_1 w - F b/2 + M_{01} = -E J_1 w'' \\ &\text{Stab 2: } M_2(x) = P_2 w - F d \quad + M_{02} = -E J_2 w'' \\ &\text{Stab 3: } M_3(x) = P_3 w - F b/2 + M_{03} = -E J_3 w'' \end{aligned} \tag{8}$$ [2]

Dabei stellen die M_{0i} die Biegemomente dar, die von den Kräften $p(x)$ verursacht werden. Da aber diese Kräfte $p(x)$ im Gleichgewicht unter sich sind, so gilt:

$$M_{01}(x) + M_{02}(x) + M_{03}(x) = 0 \tag{9}$$

Ferner gilt:

$$P_k = P_1 + P_2 + P_3 \tag{10}$$

Die unbekannten Grössen M_{0i} und P_i lassen sich durch Addition der Gleichungen (8), sowie durch Berücksichtigung von (9) und (10) eliminieren. Es entsteht die gesuchte verallgemeinerte Knickgleichung.

$$E(J_1 + J_2 + J_3)\,w'' + P_k w - (b + d) F = 0 \tag{11'}$$

Wird $J_s = J_1 + J_2 + J_3$ als Abkürzung eingeführt, und F mit (5) eliminiert, so erhält man schliesslich mit $b + d = 2a$

$$E J_s w'' + P_k w - 2 a E S_1 v' = 0 \tag{11}$$

Diese ist die zweite Differentialgleichung des Problems. Die Lösung $w(x)$ muss die Bedingungen $w(x = L/2) = 0$, $w'(x = 0) = 0$ erfüllen.

5. Auflösung der Differentialgleichungen

Die zwei Differentialgleichungen (7) und (11) sind simultan zu befriedigen.

$$-\frac{E S_1}{c}\,v'' + v + a w' = 0 \tag{7}$$

$$E J_s w'' + P_k w - 2 a E S_1 v' = 0 \tag{11}$$

Mit den Bedingungen:

$$\begin{aligned} x = 0 &: \quad v = 0, \quad w' = 0 \quad \text{und} \\ x = L/2 &: \quad v' = 0, \quad w = 0 \end{aligned}$$

Es ist ohne weiteres möglich, durch Elimination von v oder w eine einzige Differentialgleichung höherer Ordnung für nur eine Funktion zu erhalten. Es liegt jedoch näher, einen geeigneten Lösungsansatz zu machen:

$$v(x) = v_0 \sin\frac{\pi x}{L} \tag{12}$$

und

$$w(x) = w_0 \cos\frac{\pi x}{L}$$

Dadurch sind alle Bedingungen erfüllt. Man hat also nur den Eigenwert P_k des Differential-Gleichungssystems, damit Knicken eintritt, zu bestimmen. Gleichung (12) in (7) und (11) eingesetzt, liefert nach einigen Umformungen:

$$P_k = \frac{E\pi^2}{L^2}\left(J_s + \frac{2a^2 S_1}{1 + K}\right) \tag{13}$$

mit $K = \dfrac{E S_1 \pi^2}{c L^2}$

Diese Gleichung kann in eine gewöhnlichere Form überführt werden, wenn man ein ideelles Trägheitsmoment J_{id} einführt. Es ist dann:

$$P_k = \frac{\pi^2 E J_{id}}{L^2}$$

mit

$$J_{id} = \sum_3 J_i + \frac{2a^2 S_1}{1 + K} \tag{14}$$

6. Diskussion der Ergebnisse

Formel (14) stellt das Ergebnis der vorliegenden Untersuchung im Falle eines dreiteiligen Druckstabes dar. Sie erlaubt, aus der Steifigkeit c der Verbindungsmittel und aus den Abmessungen des Stabes das entsprechende ideelle Trägheitsmoment zu rechnen und daraus wie üblich die ideelle Schlankheit, und aus der zulässigen Spannung die Tragkraft des zusammengesetzten Druckstabes zu ermitteln.

Anderseits kann diese Formel dazu dienen, die Steifigkeit der Verbindungen zu errechnen, die nötig sind, um ein bestimmtes Trägheitsmoment zu erreichen.

Interessant ist, dass das ideelle Trägheitsmoment nicht nur von den Querschnittseigenschaften (E, J, S, a, c), sondern auch von der Knicklänge abhängt.

Die früher erwähnten Grenzfälle für die Verbindungssteifigkeit finden sich hier wieder:

1. Grenzfall. Die drei Teile sind fest miteinander verbunden, die Steifigkeit c ist also unendlich; d. h. $K = 0$, und man erhält:

$$J_{id} = \Sigma J_i + 2a^2 S_1 = J_0$$

in Uebereinstimmung mit der Formel von Steiner.

2. Grenzfall. Die drei Teile sind unabhängig voneinander; man hat also $c = 0$ und K unendlich. Wie zu erwarten war, folgt:

$$J_{id} = \sum_3 J_i$$

Allgemeiner Fall. Im allgemeinen ist c eine positive Grösse, so dass J_{id} zwischen den obigen Grenzwerten schwankt. Man kann dabei K als Kennzahl der Verbindungsmittel auffassen und $1/(1 + K)$ als Wirkungsgrad des Beitrages der äusseren Stäbe zum Gesamtträgheitsmoment bezeichnen.

Im Bild 4 ist der Verlauf des ideellen Trägheitsmoments in Funktion von K dargestellt.

Formel (14) ist im Falle einer beidseitigen gelenkigen Lagerung des Stabes abgeleitet worden; es ist aber leicht einzusehen, dass sie für jede beliebige Lagerung gilt, sobald man darin L durch L_k (L_k = freie Knicklänge) ersetzt. Diese freie Knicklänge ist die selbe wie für einen Einzelstab.

Die gemachte Voraussetzung e) über das elastische Verhalten des Holzes und der Verbindungen bedingt, dass die Formel (14) streng genommen nur für grössere Schlankheiten als die Grenzschlankheit gilt. Jedoch kann sie dadurch verallgemeinert werden, dass statt des Elastizitätsmoduls der Karmansche Knickmodul eingeführt wird. Es besteht dabei die Schwierigkeit, dass der Modul T_k sowohl von den Querschnittseigenschaften als auch von den Verbindungen abhängt. Man geht also im Falle gedrungener Stäbe am besten so

[2] Zu den Gleichungen (8) ist noch zu sagen, dass man berechtigt ist, die Kräfte F am unverformten Stab angreifen zu lassen, d. h. mit den Hebelarmen $b/2$ bzw. $d/2$ wirkend anzunehmen, denn die Knickbedingung kann aufgestellt werden mit einer von der Geraden beliebig wenig abweichenden Axe. Es ist aber leicht zu zeigen, dass sich auch bei grosser Ausbiegung die vorgeschlagene Berechnungsmethode streng anwenden lässt. Der Beweis wird indessen hier nicht angeführt.

vor: Im Ausdruck für K wird E belassen. Dadurch wird K zu gross, das ideelle Trägheitsmoment ein wenig zu klein. Man befindet sich also auf der sicheren Seite. Der Knickmodul wird dann nur in der Berechnung der Knicklast eingeführt. Oder besser rechnet man einfach aus dem J_{id} die ideelle Schlankheit und die entsprechende zulässige Knickspannung.

7. Der fünfteilige Druckstab

Die Berechnung geht, wenn auch etwas umständlicher, analog wie für den dreiteiligen Stab vor sich. Mit den Bezeichnungen von Bild 5 erhält man für das ideelle Trägheitsmoment:

$$(15)\qquad J_{id} = \sum_5 J_i + \frac{2\,a^2 S_2}{1+N}\left\{1 - \frac{M\,c_1/c_2\,[f/a - N/(1+N)]}{1+M+M\,c_1/(1+N)\,c_2}\right\} + 2\,f^2 S_1 \frac{(1 - N/(1+N)\,a/f)}{1+M+M\,c_1/(1+N)\,c_2}$$

Als Abkürzungen wurden eingeführt:

$$N = \frac{E\,S_2\,\pi^2}{c_2\,L^2} \quad \text{und} \quad M = \frac{E\,S_1\,\pi^2}{c_1\,L^2}$$

Diese Formel hat im wesentlichen einen ähnlichen Aufbau wie die Formel (14) und könnte auf die selbe Weise diskutiert werden.

8. Der vierteilige Druckstab

Bild 6 gibt den Querschnitt eines solchen Stabes wieder. Die Berechnung liesse sich wie für den fünfteiligen Stab durchführen, jedoch kann man einfacher den vierteiligen Stab als einen Spezialfall des fünfteiligen auffassen, nämlich als den Fall, bei dem der mittlere Stab verschwindet. Es gilt dann Formel (15) wieder, wobei aber die Summe über die Eigenträgheitsmomente der Einzelteile sich nur über vier Glieder erstreckt, und wobei

$$c_2 = 2\,c_0$$

zu setzen ist, wenn c_0 die Steifigkeit der Verbindungsmittel in der mittleren Fuge bedeutet. Der Grund hiefür liegt darin, dass beim Uebergang vom fünfteiligen zum vierteiligen Stab eine Doppelfuge in der Mitte entsteht, die alsdann mit ihrer doppelten Steifigkeit zu bewerten ist.

9. Der dreiteilige Stab als Spezialfall des fünfteiligen

Formel (15) lässt sich für den dreiteiligen Stab spezialisieren, wenn S_1 gleich null gemacht wird. Dabei wird $M = 0$, und die Formel geht über in (14), da $N = K$.

10. Der zweiteilige Druckstab

Formel (14) ist auf den zweiteiligen Stab anwendbar. Es gelten hier die gleichen Ueberlegungen wie für den vierteiligen Stab.

Die Summe über die Eigenträgheitsmomente hat nur zwei Glieder, und man soll

$$c = c_2 = 2\,c_0$$

setzen, wenn c_0 die Steifigkeit der mittleren Fuge bedeutet (Bild 7). Für den zweiteiligen Stab gilt also:

$$(16)\qquad J_{id} = 2\,J_1 + \frac{2\,a^2 S}{1+R}$$

mit $R = \dfrac{E\,S\,\pi^2}{2\,c_0\,L^2}$

11. Vergleich zwischen dem zweiteiligen Druckstab mit kontinuierlichen Verbindungen und dem Rahmenstab

Der zweiteilige Druckstab mit kontinuierlichen Verbindungen kann als ein Grenzwert des Rahmenstabes aufgefasst werden, wenn die Verbindungen zwischen den zwei Teilen immer dichter werden und schliesslich in eine stetige Verbindung übergehen. In der oben erwähnten Arbeit hat Prof. Stüssi die Knickfestigkeit des Rahmenstabes aus Holz untersucht und die verallgemeinerte Knickformel von Engesser angegeben:

$$(17)\qquad \lambda_y{}^2{}_{id} = \frac{\lambda_y{}^2}{\beta} + \lambda_1{}^2$$

In dem hier in Frage stehenden Fall ist $\lambda_1 = 0$, so dass β als Wirkungsgrad der Steifigkeit aufgefasst werden kann und die folgende Beziehung gilt:

$$(18)\qquad J_{id} = \beta\,J_0$$

mit dem Ansatz:

$$(19)\qquad \beta = \frac{i_1{}^2}{i_0{}^2} + C\,\frac{i_1}{i_0}$$

Wird demgegenüber der Wirkungsgrad β^* aus der Gleichung (16) gewonnen, so gilt mit $J_0 = 2\,J_1 + 2\,a^2 S$:

$$(20)\qquad \beta^* = \frac{i_1{}^2}{i_0{}^2} + \frac{a^2}{(1+R)\,i_0{}^2}$$

Die Aehnlichkeit des Aufbaues der beiden Gleichungen (19) und (20) ist augenfällig. Werden sie noch für den Fall der satt aneinander anstossenden Einzelteile angewendet, so ist mit:

$$i_1{}^2 = b^2/12;\; i_0{}^2 = b^2/3 \;\text{und}\; a = b/2$$

$$(19\,\text{b})\qquad \beta = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\,C$$

$$(20\,\text{b})\qquad \beta^* = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1{,}5}{1+R}$$

aus welchen sich durch Vergleich

$$(21)\qquad C = \frac{1{,}5}{1+R}$$

ergibt.

Im Falle einer geleimten Verbindung kann c gleich unendlich angenommen werden, woraus mit $R = 0$

$$C = 1{,}5$$

entsteht.

Für andere Verbindungsmittel mit $R > 0$ ist

$$C < 1{,}5$$

Diese Werte sind von Prof. Stüssi angegeben worden.

11. Zusammenfassung

Die aufgestellten Formeln geben, unter Berücksichtigung der Voraussetzungen und der Ergebnisse der Diskussion, eine Grundlage für die Bemessung der mehrteiligen Druckstäbe aus Holz.

Vor allem die Formel für den dreiteiligen Stab scheint wegen ihrer Einfachheit nützlich zu sein, während die Formel für den vier- und fünfteiligen Stab etwas umständlich zu handhaben ist.

Beim Grenzübergang kann eine gute Uebereinstimmung mit der verallgemeinerten Engesserschen Formel von Prof. Stüssi festgestellt werden. Es wäre indessen von grossem Interesse, wenn obige Formeln an Hand von Versuchen überprüft werden könnten, um insbesondere deren Brauchbarkeit im Gebiete der kleinen Schlankheiten feststellen zu können.

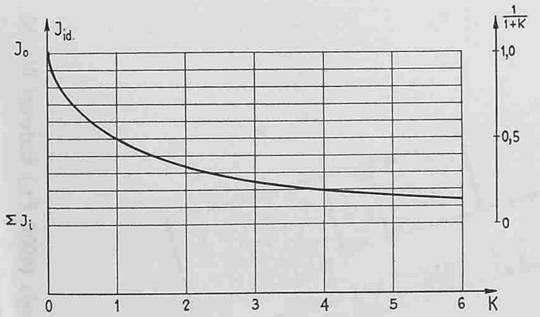

Bild 4. Variation des ideellen Trägheitsmomentes in Funktion von k

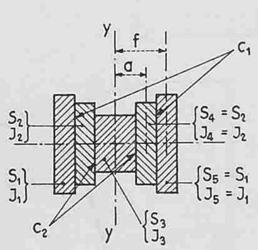

Bild 5. Fünfteiliger Druckstab

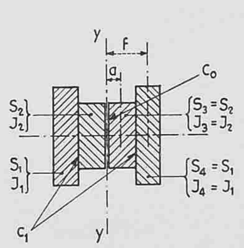

Bild 6. Vierteiliger Druckstab

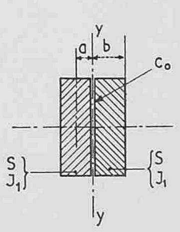

Bild 7. Zweiteiliger Druckstab