Der stationäre Wärmeübergang bei laminarer Strömung

69. Jahrgang
Nachdruck von Bild oder Text nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet
Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich
Nummer 46

Der stationäre Wärmeübergang bei laminarer Strömung

Von Dr. KARL ELSER, Institut für Thermodynamik an der ETH, Zürich

DK 536.24

PROF. DR. G. EICHELBERG ZUM 60. GEBURTSTAG (21. NOVEMBER) GEWIDMET

Die Berechnung des stationären Wärmeüberganges bei laminarer Strömung etwa in einem Kreisrohr ist weit schwieriger, als zunächst vermutet werden könnte. Ein direkter Weg, bzw. eine geschlossene Lösung des Problems, ist bisher nicht angegeben worden. Die Schwierigkeit liegt hauptsächlich in der Berücksichtigung der Bedingung, dass im stationären Fall die Temperaturprofile in verschiedenen Querschnitten untereinander ähnlich sein müssen. Man geht daher von einem willkürlichen Profil, beispielsweise einer über dem Radius konstanten Temperatur, aus und berechnet den Wärmeübergang in einer «thermischen Anlaufstrecke». Der stationäre Wärmeübergang ergibt sich schliesslich aus dem Temperaturfeld nach durchflossener Anlaufstrecke, d.h. nach dem Abklingen der durch die spezielle Anfangsverteilung bedingten Glieder des Summenausdruckes für die Temperaturverteilung.

Demgegenüber soll im Folgenden ein sozusagen elementares Verfahren zur Berechnung des stationären Temperaturprofiles und Wärmeüberganges in laminarer Strömung beschrieben werden. Es gleicht dem schrittweisen Näherungsverfahren, das von Reichardt[1]) für turbulente Strömungen angewendet wurde. In einigen Fällen können wegen des einfachen Ausdruckes für das Geschwindigkeitsprofil die Integrationen ohne Mühe analytisch ausgeführt werden, und die Konvergenz ist so gut, dass sich schon nach wenigen Schritten ausreichend genaue Resultate ergeben.

Für die Schubspannung τ und die Wärmestromdichte q in einem zur Wand parallelen Flächenelement gelten die Beziehungen:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \tag{1}$$

und:

$$q = \frac{\lambda}{c_p} \frac{di}{dy} \tag{2}$$

Die Division dieser Gleichungen ergibt mit der Prandtl-Zahl $\mathrm{Pr} = \mu c_p / \lambda$ allgemein:

$$\frac{di}{du} = \mathrm{Pr} \frac{q}{\tau}$$

und speziell an der Wand ($y = 0$):

$$\left(\frac{di}{du}\right)_0 = \mathrm{Pr}_0 \frac{q_0}{\tau_0}$$

Somit ist:

$$\frac{di/du}{(di/du)_0} = \frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}_0} \frac{q/q_0}{\tau/\tau_0} \tag{3}$$

Unter der vereinfachenden Annahme, dass $\mathrm{Pr} = \mathrm{Pr}_0$, d. h. dass Pr unabhängig vom Wandabstand sei, ist:

$$\frac{di/du}{(di/du)_0} = \frac{q/q_0}{\tau/\tau_0} \tag{3'}$$

Die Prandtl-Zahl fällt damit aus den Berechnungen heraus. Diese Vereinfachung bedeutet allerdings eine Beschränkung auf Strömungen mit kleinen Temperaturdifferenzen, da die Prandtl-Zahl jener Stoffe, bei denen laminare Strömungen praktisch auftreten (zähe Flüssigkeiten), ziemlich stark temperaturabhängig ist. Das Näherungsverfahren würde sich allerdings gerade auch zur Mitberücksichtigung einer beliebigen Temperaturabhängigkeit der Prandtl-Zahl eignen.

Aus (Gl. 3') folgt der Verlauf des Wärmeinhalts bzw. der Temperatur durch Integration über der Geschwindigkeit zu:

$$\frac{i}{(di/du)_0} = \int_0^u \frac{q/q_0}{\tau/\tau_0}\, du\,, \tag{4}$$

wenn die Wandtemperatur gleich Null gesetzt wird.

[1]) *H. Reichardt*, «Z. ang. Math. Mech.» *20*, 297 (1940); Mitt. Nr. 3, Max Planck-Inst. f. Strömungsf., Göttingen 1950.

Im Folgenden soll der stationäre Wärmeübergang bei laminarer Strömung in einem Kreisrohr vom Radius R, sowie in einem ebenen Spalt (flach-rechteckigen Kanal) von der Spaltweite $2R$ untersucht werden. Bei der Spaltströmung sind zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich die beidseitig (symmetrisch) geheizte und die nur einseitig geheizte (einseitig wärmeisolierte) Strömung. Alle auftretenden Grössen werden auf ihre Maximalwerte bezogen und so die nachstehenden relativen (dimensionslosen) Grössen gebildet:

Radiuskoordinate, bzw. Abstand von der Mittelebene des Spaltes:

$$\varrho = r/R$$

Geschwindigkeit:

$$\varphi = u/U$$

Wärmeinhalt, bzw. Temperatur:

$$\vartheta = i/I$$

In beiden untersuchten Strömungen nimmt die Schubspannung τ vom Werte τ_0 an der Wand auf Null in der Mitte ab:

$$\tau/\tau_0 = \varrho \tag{5}$$

Für das Geschwindigkeitsprofil ergibt sich damit aus (Gl. 1) und unabhängig von der Reynolds-Zahl der Strömung die Hagen-Poiseuillesche Parabel:

$$\varphi = 1 - \varrho^2 \tag{6}$$

Mit den dimensionslosen Grössen sowie nach dem Uebergang auf den Radius ϱ als Integrationsvariable folgt aus (Gl. 4) für das Temperaturprofil in der Rohrströmung und in der beidseitig geheizten Spaltströmung der Ausdruck:

$$\vartheta = \frac{\int_\varrho^1 q/q_0\, d\varrho}{\int_0^1 q/q_0\, d\varrho} \tag{7}$$

Für die einseitig wärme-isolierte Spaltströmung gilt:

$$\vartheta = \frac{\int_\varrho^1 q/q_0\, d\varrho}{\int_{-1}^{+1} q/q_0\, d\varrho} \tag{7'}$$

Der Verlauf der relativen Wärmestromdichte q/q_0 ist jedoch zunächst unbekannt. Man geht nun zweckmässig so vor: In erster Näherung kann der Verlauf der Wärmestromdichte als linear, d. h. bei symmetrischem Temperaturprofil analog jenem der Schubspannung zu $q/q_0 = \varrho$, bei einseitiger Wärme-Isolierung zu $q/q_0 = {}^1/_2\,(1 + \varrho)$, angenommen und damit eine erste Näherung des Temperaturprofiles $\vartheta\,(\varrho)$ berechnet werden. Daraus ergibt sich dann eine zweite Näherung des Verlaufes von q/q_0 über ϱ. Weil nämlich die Temperaturprofile in verschiedenen Querschnitten untereinander ähnlich bleiben müssen, muss auf jedem Radius die dort radial fliessende Wärme proportional der innerhalb dieses Radius in axialer Richtung transportierten Wärme sein. Daher gilt für die Strömung im Kreisrohr:

$$q/q_0 = \frac{\frac{1}{\varrho}\int_0^\varrho \varrho\varphi\vartheta\, d\varrho}{\int_0^1 \varrho\varphi\vartheta\, d\varrho} \tag{8}$$

für die beidseitig geheizte Strömung im ebenen Spalt:

$$q/q_0 = \frac{\int_0^\varrho \varphi\vartheta\, d\varrho}{\int_0^1 \varphi\vartheta\, d\varrho} \tag{8'}$$

und für die einseitig wärmeisolierte Spaltströmung:

$$(8'')\qquad q/q_0 = \frac{\int\limits_{-1}^{\varrho} \varphi\,\vartheta\,d\varrho}{\int\limits_{-1}^{+1} \varphi\,\vartheta\,d\varrho}$$

Nach Einsetzen der zweiten Näherung von q/q_0 in (Gl. 7), bzw. (7′) liefert die neuerliche Integration eine zweite Näherung für das Temperaturprofil $\vartheta\,(\varrho)$, aus der sich eine dritte Näherung des Verlaufes der relativen Wärmestromdichte berechnen lässt, usf. Auf diese Weise ergeben sich als dritte Näherungen die folgenden Ausdrücke:

Strömung im Kreisrohr:

$$(9)\qquad q/q_0 = \frac{40}{21}\,\varrho\,\left(\frac{11}{6} - \frac{29}{12}\,\varrho^2 + \frac{3}{2}\,\varrho^4 - \frac{11}{24}\,\varrho^6 + \frac{1}{15}\,\varrho^8\right)$$

$$(10)\qquad \vartheta = \frac{800}{819}\cdot\left(\frac{819}{800} - \frac{11}{6}\,\varrho^2 + \frac{29}{24}\,\varrho^4 - \frac{1}{2}\,\varrho^6 + \frac{11}{96}\,\varrho^8 - \frac{1}{75}\,\varrho^{10}\right)$$

Beidseitig geheizte Strömung im Spalt:

$$(11)\qquad q/q_0 = \frac{189}{352}\,\varrho\,\left(\frac{11}{3} - \frac{26}{9}\,\varrho^2 + \frac{4}{3}\,\varrho^4 - \frac{2}{7}\,\varrho^6 + \frac{1}{27}\,\varrho^8\right)$$

$$(12)\qquad \vartheta = \frac{3780}{4919}\cdot\left(\frac{4919}{3780} - \frac{11}{6}\,\varrho^2 + \frac{13}{18}\,\varrho^4 - \frac{2}{9}\,\varrho^6 + \frac{1}{28}\,\varrho^8 - \frac{1}{270}\,\varrho^{10}\right)$$

Einseitig wärmeisolierte Strömung im Spalt:

$$(13)\qquad q/q_0 = \frac{945}{3856}\cdot\left(\frac{39437}{15120} + \frac{10}{3}\,\varrho - \frac{71}{60}\,\varrho^2 - \frac{29}{18}\,\varrho^3 + \frac{27}{40}\,\varrho^4 + \frac{11}{30}\,\varrho^5 - \frac{13}{180}\,\varrho^6 - \frac{11}{210}\,\varrho^7 + \frac{1}{80}\,\varrho^8 + \frac{1}{270}\,\varrho^9\right)$$

$$(14)\qquad \vartheta = \frac{4725}{22112}\left(\frac{276599}{75600} - \frac{39437}{15120}\,\varrho - \frac{5}{3}\,\varrho^2 + \frac{71}{180}\,\varrho^3 + \frac{29}{72}\,\varrho^4 - \frac{27}{200}\,\varrho^5 - \frac{11}{180}\,\varrho^6 + \frac{13}{1260}\,\varrho^7 + \frac{11}{1680}\,\varrho^8 - \frac{1}{720}\,\varrho^9 - \frac{1}{2700}\,\varrho^{10}\right)$$

Sie sind in den Bildern 1, 2 und 3 dargestellt. Die mittlere Temperatur ϑ_m der strömenden Flüssigkeit ist bei der Strömung im Kreisrohr:

$$(15)\qquad \vartheta_m = \frac{\int\limits_0^1 \varrho\,\varphi\,\vartheta\,d\varrho}{\int\limits_0^1 \varrho\,\varphi\,d\varrho} = 4\int\limits_0^1 \varrho\,\varphi\,\vartheta\,d\varrho$$

und bei der Strömung im ebenen Spalt:

$$(15')\qquad \vartheta_m = \frac{\int\limits_{-1}^{+1} \varphi\,\vartheta\,d\varrho}{\int\limits_{-1}^{+1} \varphi\,d\varrho} = \frac{3}{4}\int\limits_{-1}^{+1} \varphi\,\vartheta\,d\varrho$$

In dritter Näherung ist bei der Rohrströmung:

$$\vartheta_m = \frac{28780}{51597} = 0{,}558$$

bei der beidseitig geheizten Spaltströmung:

$$\vartheta_m = \frac{533504}{703417} = 0{,}758$$

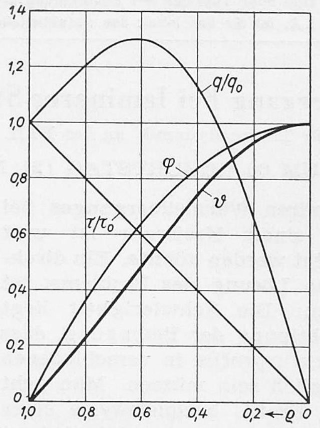

Bild 1. Stationäre Laminarströmung in einem Kreisrohr

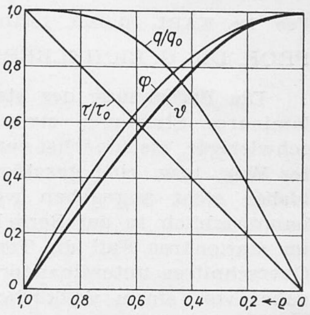

Bild 2. Stationäre Laminarströmung in einem ebenen, beidseitig geheizten Spalt

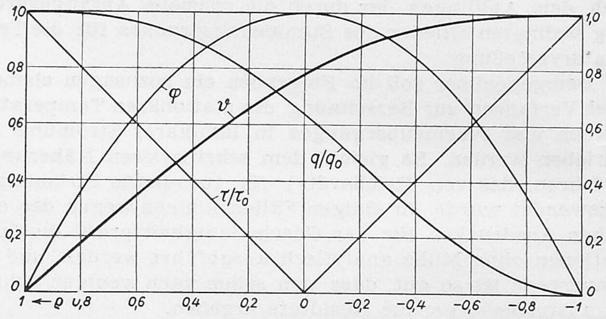

Bild 3. Stationäre Laminarströmung in einem ebenen, einseitig wärmeisolierten Spalt

und bei der einseitig wärmeisolierten Spaltströmung:

$$\vartheta_m = \frac{141773}{197626} = 0{,}717$$

Mit der Wärmeübergangszahl α lässt sich für die an die Wand übergehende Wärme schreiben:

$$(16)\qquad q_0 = \alpha\,t_m = \lambda\left(\frac{d\,t}{d\,y}\right)_0$$

Damit wird die mit dem Durchmesser, bzw. mit der Spaltweite als charakteristische Länge gebildete Nusselt-Zahl:

$$\mathrm{Nu} = \frac{2\,\alpha\,R}{\lambda} = \frac{2\,R}{t_m}\left(\frac{d\,t}{d\,y}\right)_0$$

oder in dimensionslosen Grössen ausgedrückt:

$$(17)\qquad \mathrm{Nu} = -\,\frac{2}{\vartheta_m}\left(\frac{d\,\vartheta}{d\,\varrho}\right)_{\varrho\,=\,1}$$

In dritter Näherung ergibt sich für die laminare Strömung im Kreisrohr:

$$\mathrm{Nu} = \frac{5292}{1439} = 3{,}678$$

für die beidseitig geheizte, laminare Strömung im ebenen Spalt:

$$\mathrm{Nu} = \frac{7865}{2082} = 3{,}778$$

und für die einseitig wärmeisolierte, laminare Strömung im ebenen Spalt:

$$\mathrm{Nu} = \frac{344630}{141773} = 2{,}431$$

Graetz [2]) und Nusselt [3]) fanden für das Kreisrohr Nu = 3,65, Ehret und Hahnemann [4]) für den ebenen Spalt Nu = 3,75. Das angegebene Näherungsverfahren liefert demnach bei weit geringerem Aufwand schon mit der dritten Näherung Ergebnisse, deren Fehler weniger als 1 % betragen.

[2]) L. *Graetz*, «Ann. Phys.» 18, 79 (1883); 25, 337 (1885).
[3]) W. *Nusselt*, «Z. VDI» 54, 1154 (1910).
[4]) L. *Ehret*, H. *Hahnemann*, «Wärme- und Kältetechnik» 44, 167 (1942).