

Wahrscheinlichkeits-Betrachtungen im Zusammenhang mit Dauerkurven

Autor(en): **Escher, Arnold**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **70 (1952)**

Heft 28

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-59642>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Wahrscheinlichkeits-Betrachtung im Zusammenhang mit Dauerkurven

Von Dipl. Ing. ARNOLD ESCHER, Zürich

DK 627.133.5

Bei Entwurf und Ueberprüfung von Wasserkraftanlagen mit gegebenen oder zu schaffenden Speichermöglichkeiten für kurzfristigen Lastausgleich (z. B. über Woche oder Monat) ist die Kenntnis der minimalen, während bestimmter, relativ kleiner Zeitintervalle (t) verfügbaren Wassermengen (M_t) von Bedeutung. Wenn die Abflussmengen des zu nutzenden Gewässers in Funktion der Zeit (Q_z) über genügend lange Zeiträume bekannt sind, erfolgt die Bestimmung von M_t auf elementare Art gemäss Bild 1 durch statistische Feststellung des kleinsten der in Frage kommenden Werte, wobei:

$$(1) \quad M_t = \min \int_z^{z+t} Q_z dz = (\min Q_{mt}) t$$

Sind jedoch die Abflussmengen nur in Form von Dauerkurven (Bild 2) bekannt, so nimmt das Problem einen grundsätzlich anderen Charakter an. Durch die Anordnung der Q -Werte nach ihrer Grösse werden die zeitabhängigen Gruppierungen willkürlich gestört, und das tatsächliche Bild des Geschehens verschwindet, womit auch die Grundlage für die elementare Bestimmung der gesuchten M_t -Werte dahinfällt.

Im Folgenden stellen wir uns daher die Aufgabe, die minimale Gesamtwassermenge M_t , wie sie in Bild 1 durch die kreuzweise schraffierte Fläche gekennzeichnet ist, oder, was auf das selbe herauskommt, die für ein bestimmtes Zeitintervall t minimale mittlere Wassermenge $\min. Q_{mt}$ auf Grund von gegebenen Dauerkurven zu bestimmen. Diese Dauerkurven können an Hand von direkten Beobachtungen und Messungen, durch Analogieschlüsse aus vergleichbaren Gebieten, oder mit Hilfe von theoretischen Betrachtungen erhalten worden sein; es wird vorausgesetzt, dass sie ein genügend genaues Bild der hydrologischen Verhältnisse vermitteln.

Ein angenäherter Wert für $\min. Q_{mt}$ lässt sich in der Weise bestimmen, dass in der Dauerkurve, ausgehend vom Minimum, also von $x = 0$, das Mittel der Wassermengen über das gewünschte Zeitintervall gebildet wird, das heisst

$$(2) \quad \text{approx. } \min Q_{mt} = \frac{1}{t} \int_0^t Q_x dx$$

Das so erhaltene Mittel ist aber auf jeden Fall zu klein. Indem nämlich die Dauerkurve definitionsgemäss die nach der Grösse geordneten Werte darstellt, ist es klar, dass beim natürlichen, ungeordneten Ablauf der Ereignisse in einem, das minimale Mittel aufweisenden Zeitintervall immerhin auch noch einzelne grössere Werte auftreten, die in der Dauerkurve grössenordnungsmässig ausserhalb des für die angenäherte Bestimmung angenommenen Zeitintervalles fallen. Gleichermassen werden in der Wirklichkeit einzelne kleinere Werte ausserhalb des Zeitintervalles des minimalen Mittels auftreten.

Die Bestimmung eines mit den tatsächlichen Verhältnissen besser übereinstimmenden Mittelwertes, den wir als wahrscheinliches minimales Mittel bezeichnen können, erfordert daher gewissermassen die Befreiung der in der Dauerkurve geordneten Werte aus dieser Zwangsordnung und ihre Rückführung

in die im natürlichen Geschehen möglichen Gruppierungen, unter denen wir die das minimale Mittel ergebende Gruppe zu ermitteln haben.

Falls unsere Untersuchungen sich auf verhältnismässig kleine Zeitintervalle (t) innerhalb eines hydrologisch einheitlichen Zeitraumes (T) beziehen, darf wohl angenommen werden, dass die Gruppierung der fraglichen Q -Werte den Gesetzen des Zufalls unterworfen ist. Unter dieser Voraussetzung können die Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Lösung unserer Aufgabe herbeigezogen werden.

Das wahrscheinliche Mittel der Abflussmengen stellt sich demnach dar als der Mittelwert vom Zufall abhängiger Ereignisse, oder als die Summe der Produkte der möglichen Werte mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten, das heisst ganz allgemein:

$$(3) \quad \text{wahrscheinl. } Q_{mt} = \int_0^T Q_x \frac{w_{xt}}{\int_0^T w_{xt} dx} dx$$

Das Problem besteht nun darin, die Wahrscheinlichkeitsfunktion w_{xt} zu bestimmen, das heisst die Wahrscheinlichkeit, die ein in der Dauerkurve der Abszisse x zugeordneter Q -Wert besitzt, innerhalb des Zeitintervalles t aufzutreten. Analytisch gesprochen wird es sich bei der Funktion w_{xt} um eine Kurvenschar handeln, wobei der Parameter t die den einzelnen Zeitintervallen entsprechenden Wahrscheinlichkeitskurven w_x festlegt.

Zur Bestimmung der Funktion w_{xt} gehen wir, in Anlehnung an den klassischen Ansatz von Gauss, in folgender Weise vor:

A. Aufstellen der strengen oder plausibeln Bedingungen, denen das Wahrscheinlichkeitsgesetz auf Grund der Natur der Aufgabe und der gegebenen Voraussetzungen logischerweise zu genügen hat.

B. Wahl eines analytischen Ausdruckes, der den Bedingungen unter A genügt und einer weiteren mathematischen Behandlung zugänglich sein soll.

Als Bedingungen nach A stipulieren wir für die, dem $\min. Q_{mt}$ entsprechende Wahrscheinlichkeits-Kurvenschar:

a) Sämtliche Kurven weisen für $x = 0$, das heisst in der Ordinate des Q_{\min} , ein Maximum = 1 auf, indem wir annehmen, dass Q_{\min} auf jeden Fall im Zeitintervall des minimalen Mittels enthalten ist, und dass die unmittelbar benachbarten Q -Werte ebenfalls die grösste Wahrscheinlichkeit besitzen, im fraglichen Zeitintervall aufzutreten.

b) Auf Grund der selben Ueberlegung ergibt sich, dass die Wahrscheinlichkeitskurven w_{xt} für kleines t sich immer mehr der Ordinatenaxe $x = 0$ nähern, um für den Grenzwert $t = 0$ mit ihr zusammenzufallen.

c) In der Axe von Q_{\max} , bzw. für $x = T$ erreichen sämtliche Kurven ihren relativ kleinsten Wert, unter der Annahme, dass Q_{\max} von allen Werten die geringste Wahrscheinlichkeit besitzt, in das gleiche Zeitintervall mit Q_{\min} zu fallen. Für kleines t wird dieser Wert w_{Tt} auf jeden Fall ~ 0 sein, für grössere Zeitintervalle jedoch können wir erwarten, dass w_{Tt} zwischen 0 und 1 liegt.

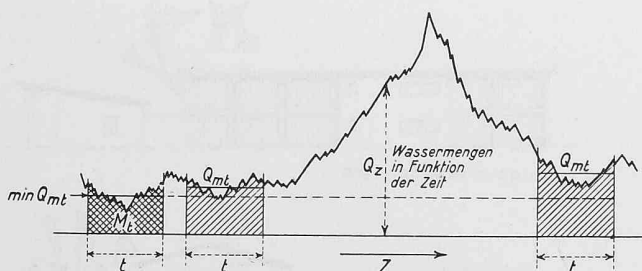


Bild 1. Ableitung des Begriffs der minimalen mittleren Wassermenge $\min Q_{mt}$ aus dem zeitlichen Verlauf der Wassermengenkurve Q_z

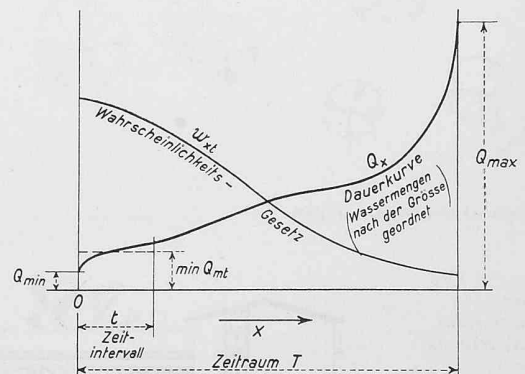


Bild 2. Ableitung der minimalen mittleren Wassermenge $\min Q_{mt}$ aus der Dauerkurve Q_x

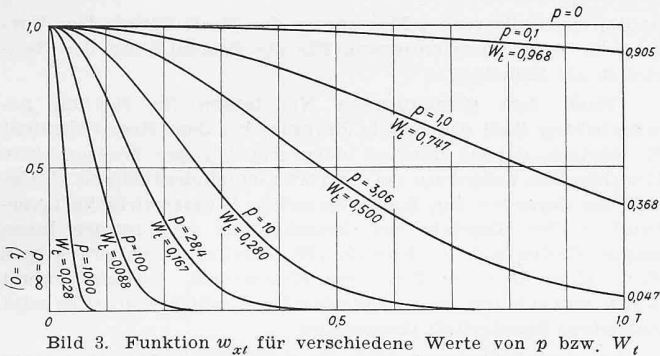


Bild 3. Funktion $w_{x,t}$ für verschiedene Werte von p bzw. W_t

d) Wird das Zeitintervall $t = T$, so ist Gewissheit vorhanden, dass sämtliche Q -Werte im betrachteten Zeitintervall enthalten sind. Der vom Zufall abhängige Mittelwert fällt daher für diese Grenze mit dem gewöhnlichen Mittelwert zusammen, das heisst:

$$\frac{\int_0^T Q_x w_{x,T} dx}{\int_0^T w_{x,T} dx} = \frac{\int_0^T Q_x dx}{\int_0^T dx}$$

oder

$$w_{x,T} = \text{const.} = 1$$

$$W_T = \int_0^T w_{x,T} dx = T$$

e) Für ein beliebiges Zeitintervall kann angenommen werden, dass die entsprechende Wahrscheinlichkeitskurve derart beschaffen sei, dass:

$$\frac{W_t}{W_T} = \frac{\int_0^T w_{x,t} dx}{\int_0^T w_{x,T} dx} = \frac{t}{T}$$

Der Ausdruck:

$$W_t = \int_0^T w_{x,t} dx$$

stellt nämlich in der Terminologie der Wahrscheinlichkeitsrechnung nichts anderes dar als «die Summe aller überhaupt möglichen Fälle» und muss dementsprechend im direkten Verhältnis zur Grösse des Zeitintervalles stehen.

Die Wahl des analytischen Ausdruckes nach B ist offensichtlich mit einer gewissen Willkür behaftet, da sich aus der Problemstellung nicht genügend Bedingungen zur eindeutigen Definition des Verlaufes der $w_{x,t}$ -Kurven ableiten lassen. Im Hinblick auf verwandte Probleme, wo analoge Verhältnisse auftreten, ist jedoch die Annahme naheliegend, dass eine Exponentialfunktion den geeignetsten Ansatz darstellt, und zwar in der für die Wahrscheinlichkeitstheorie grundlegenden Form:

$$(4) \quad y = e^{-px^2} = w_{x,t}$$

Mit diesem Ansatz, in dem p den Parameter $= f(t)$ darstellt, werden die Bedingungen a) und c) auf jeden Fall erfüllt, ferner die Bedingung b) mit $p = \infty$ und d) mit $p = 0$.

Bedingung e) ergibt, wenn wir zugleich den Zeitraum T als Abszissen-Einheit wählen:

$$W_t = \int_0^T e^{-px^2} dx = t$$

oder für kleines t , wobei $w_{T,t} \sim 0$

$$W_t \sim \int_0^\infty e^{-px^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{p}} = t$$

woraus

$$(5) \quad p = \frac{\pi}{4t^2}$$

Das Wahrscheinlichkeitsgesetz, das in Verbindung mit Formel (3) die Bestimmung der gesuchten minimalen Mittelwerte ermöglicht, lautet demnach:

$$(6) \quad w_{x,t} = e^{-\frac{\pi}{4} \left(\frac{x}{t}\right)^2}$$

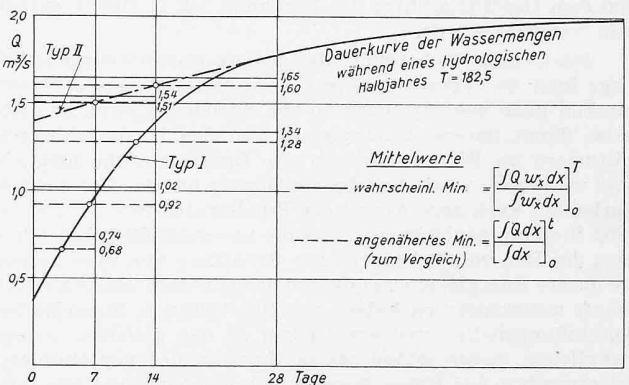
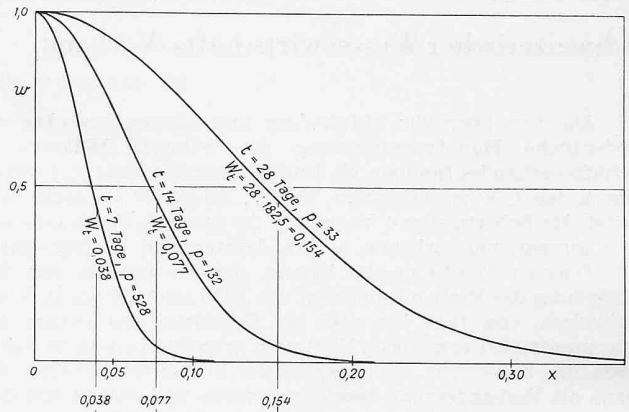


Bild 4. Bestimmung der wahrscheinlichen minimalen mittleren Wassermengen für die Zeitintervalle von 7, 14 und 28 Tagen aus der Dauerkurve der Wassermengen während eines hydrologischen Halbjahres

In Bild 3 sind die $w_{x,t}$ -Kurven für verschiedene Werte von t bzw. W_t wiedergegeben. Aus der graphischen Darstellung ist leicht ersichtlich, dass in dem für unsere Aufgabe in Frage kommenden Bereich von im Maximum $t/T = 1$ Monat auf 6 Monate, oder $W_t < 0,67$ die Formel (6) als praktisch genau angesehen werden kann, indem die Differenz von \int_0^T und \int_0^∞ , die vernachlässigt wird, sehr schnell verschwindend kleine Werte annimmt.

In Bild 4 skizzieren wir den Gang der praktischen Anwendung der Methode, wobei wir den für die Bestimmung des 7- bis 28-tägigen minimalen Mittels in Frage kommenden Teil einer Halbjahres-Dauerkurve in zwei typischen Formen (Typ I und Typ II) wiedergeben. Darauf werden die $w_{x,t}$ -Kurven nach Formel (6) aufgezeichnet für $W_t = 7/182,5$ Tage $= 0,038$, bzw. $0,077$ für 14 Tage und $0,154$ für 28 Tage. Der gesuchte Mittelwert lässt sich nun nach Gleichung 3 wie folgt anschreiben:

$$\min Q_{mt} = \frac{1}{W_t} \int_0^T Q_x w_{x,t} dx$$

wobei das Integral ohne weiteres auf Grund der gegebenen Q_x und $w_{x,t}$ -Kurven nach einer der geläufigen Methoden ausgewertet werden kann.

Die Ergebnisse dieser Berechnung sind ebenfalls in Bild 4 wiedergegeben, und zum Vergleich sind noch die angenäherten Mittelwerte nach Formel 2 über die entsprechenden Zeitintervalle eingetragen. Mit den zu Grunde gelegten, der Praxis entnommenen Annahmen ergibt sich dabei eine maximale Verbesserung der wahrscheinlichen gegenüber den angenäherten minimalen Mittelwerten von rund 10%. Da diese Werte auch die minimale Jahreskonstantleistung bestimmen, die ihrerseits für die Bewertung einer Wasserkraft von ausschlaggebender Bedeutung sein kann, mag sich eine Untersuchung nach der vorliegenden Methode in manchen Fällen als lohnend erweisen.

Abschliessend sei noch bemerkt, dass sich die gleiche Methode auch auf den Bereich der Maxima einer Dauerkurve anwenden lässt, wobei die über ein bestimmtes Zeitintervall wahrscheinlich zu erwartenden Hochwassermengen abgeschätzt werden können.