

# Beitrag zur Frage der Kirchenakustik

Autor(en): **Furrer, W.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **70 (1952)**

Heft 33

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-59655>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Beitrag zur Frage der Kirchenakustik

DK 534.84:726.5

Von Ing. W. FURRER, Bern, Prof. an der ETH

### Einleitung

Beim Bau eines Theaters, eines Auditoriums, eines Konzertsalles oder eines Kinos ist die architektonische Gestaltung in erster Linie durch die Funktion des Raumes gegeben; Beweise hierfür finden sich zu allen Zeiten: Die antiken Freilufttheater, die italienischen Opernhäuser des 18. Jahrhunderts, die Hörsäle der alten Universitäten, die Konzertsäle des 19. Jahrhunderts, die modernen Kinos usw. In all diesen Fällen ist ein eindeutiger Verwendungszweck für den Raum gegeben: Schauspiel, Theater, Vortrag, symphonische Musik, Lautsprecherwiedergabe. Es ist bekannt, dass alle diese Räume in akustischer Beziehung durchaus sicher und zuverlässig beurteilt werden können; ihre akustischen Probleme lassen sich heute mit derselben Sicherheit lösen wie etwa Aufgaben der Festigkeit, der Beleuchtung, der Heizung und der Lüftung.

Grundsätzlich anders stellt sich aber die Frage der Akustik bei einer Kirche. F. Pfammatter sagt in seinem Buche «Betonkirchen»<sup>1)</sup>: «Die Stellung des religiösen Gedankengutes im menschlichen Leben findet seinen unmittelbaren Niederschlag stets am sichtbarsten im Kirchenbau». Mit diesem Satze ist eigentlich schon die ganze Problematik des Kirchenbaues charakterisiert. Die eigentliche Funktion tritt zurück hinter dem Bestreben, einer Idee, einer Religion, einer Weltanschauung sichtbaren architektonischen Ausdruck zu verleihen. Dies war zu allen Zeiten so und es wird wohl auch noch lange so bleiben, da wir offensichtlich noch recht weit von einem Idealzustand entfernt sind, bei dem das Geistige vom Materiellen so losgelöst ist und so überwiegt, dass die äussere Form der Kirche als Bauwerk zur unwesentlichen Nebensache wird und nur noch der eigentliche Gottesdienst zählt. Immerhin mehren sich heute die Stimmen, die die Kirche nicht mehr primär als Baudenkmal, sondern als «kirchlichen Raum» auffassen. So sagt Otto H. Senn: «Der Raum hat die beiden Erfordernisse der Sicht und der Hörsamkeit zu erfüllen. Von jedem Platze aus soll das Predigtwort verstanden werden, haben der Altarplatz und die Kanzel überschaubar zu sein. Was über diese allgemeinen Gesichtspunkte hinausgeht, muss als grundsätzlich umstritten betrachtet werden»<sup>2)</sup>. Heute ist diese Auffassung aber erst ganz vereinzelt anzutreffen, so dass sich der Akustiker meist mit der Tatsache abzufinden hat, dass beim Bau einer Kirche auf ihre technische Funktion primär wenig Rücksicht genommen wird. Er darf lediglich versuchen, Massnahmen zu treffen, die die architektonische Konzeption möglichst wenig beeinflussen.

### Alte Kirchen

Schon in den alten Kirchen sind solche rein technische Hilfsmittel, die mit der eigentlichen Architektur nichts zu tun haben, deutlich erkennbar; am sichtbarsten sind gewöhnlich die stark erhöhte Lage der Kanzel, sowie der grosse Kanzeldeckel. Bei den frühchristlichen Saalkirchen und den ersten noch verhältnismässig kleinen Basiliken gab es allerdings noch kaum irgendwelche akustischen Probleme. Mit dem Steigen der Raumvolumina komplizierten sich die Verhältnisse aber sehr merklich; lange Nachhallzeiten stellten sich ein, welche die Verständlichkeit des gesprochenen Wortes schwer beeinträchtigen, und schliesslich reichte die von einem Prediger erzeugte Schallenergie für grosse Kathedralen, deren Volumina mit der Zeit 30 000 m<sup>3</sup> oft überstiegen, keineswegs mehr aus. Besonders ungünstig waren in dieser Beziehung die grossen romanischen Kirchen mit ihren wuchtigen einfachen Formen, etwas besser die spätgotischen Kathedralen mit den zahlreichen feingegliederten Elementen und den grossen Fensterflächen, welche die tiefen Frequenzen wirksam absorbieren. Die Renaissance und vor allem der Barock schufen dann wieder Voraussetzungen, die sich akustisch sehr günstig auswirkten, und auch die Kirchenbauten des 18. und 19. Jahrhunderts können vom akustischen Standpunkt aus mehrheitlich als «vernünftig» gelten. Erst

die neueste Zeit gab den Kirchenbauern mit dem Eisenbeton wieder ein Mittel in die Hand, das sich in akustischer Beziehung wahrhaft katastrophal auswirken kann, wenn auch nicht muss.

### Raumakustik

Durch welche baulichen Faktoren wird das akustische Verhalten eines Raumes bestimmt? Diese Frage müssen wir uns natürlich auch für eine Kirche stellen. Es gibt grundsätzlich verschiedene theoretische Möglichkeiten, um dieses Problem zu lösen; es würde aber hier zu weit führen, sie alle zu diskutieren. Praktisch konzentriert sich das Interesse auf Volumen, Form und Nachhallzeit eines Raumes, welche drei Grössen, von seltenen Spezialfällen abgesehen, die Akustik eines Raumes eindeutig bestimmen.

Das maximale Volumen, das für einen Sprecher (Prediger) nicht überschritten werden darf, liegt in der Grössenordnung von 10 000 m<sup>3</sup>. Bei grösseren Räumen (grosse Kathedralen) sind Schwierigkeiten unvermeidlich, die sich grundsätzlich nur mit Hilfe von Lautsprecheranlagen beheben lassen. Dafür gibt es neben sehr viel schlechten Beispielen auch ein gutes: Die neue Lautsprecheranlage (1951) der St. Paul's Cathedral in London.

Wesentlich komplizierter ist der Einfluss der Raumform auf die Akustik, doch lassen sich die grundlegenden Erfordernisse in einigen wenigen Regeln andeuten: Neben der Innehaltung einer maximalen Weglängendifferenz von 12 bis 15 m zwischen direktem und indirektem Schallweg und der Vermeidung konkaver Flächen ist es besonders wichtig, grosse glatte Wand- und Deckenelemente zu vermeiden, be-

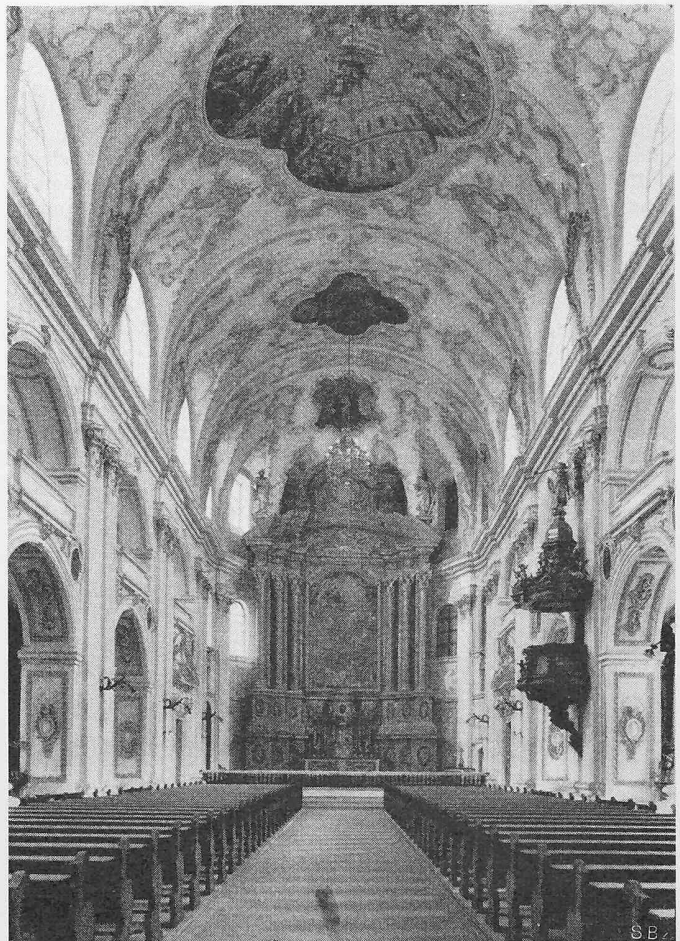


Bild 1. Jesuitenkirche in Luzern, 1677. Barockkirche mit sehr guter Akustik. (Phot. Th. Seeger, Basel)

<sup>1)</sup> Verlag Benziger, Einsiedeln 1948.

<sup>2)</sup> Otto H. Senn, Protestantischer Kirchenbau, «Werk» 39 (1952), S. 33.

sonders wenn sie zueinander parallel stehen. Die beiden letzten Faktoren bestimmen die Homogenität des Schallfeldes, die man auch «Diffusion» nennt. Die Erkenntnis, dass diesem Faktor für die Akustik eines Raumes eine sehr wichtige, ja oft entscheidende Rolle zukommt, ist erst neueren Datums. Die Diffusion lässt sich aber leicht messen, so dass sie heute praktisch eine ebenso grosse Bedeutung hat wie die Nachhallzeit. Es ist ohne weiteres einleuchtend, dass eine reich ornamentierte Barockkirche die Forderung, grosse glatte Flächen zu vermeiden, in idealer Weise verwirklicht. Dies ist denn auch der wichtigste Grund für die sozusagen ausnahmslos hervorragende Akustik dieser Kirchen. Als Beispiel sei hier die Luzerner Jesuitenkirche erwähnt (Bild 1), die durch die Musikfestwochen bekannt ist, die sich aber auch als Predigtkirche erstaunlich gut eignet. Im Gegensatz dazu springen nun die bei modernen Kirchen auftretenden Schwierigkeiten sofort in die Augen. Im Bestreben, vor allem die Proportionen und das Material wirken zu lassen, bevorzugt die heutige Architektur grosse ungliederte Flächen. Dies ist der Hauptgrund, weshalb trotz den heute wissenschaftlich einwandfrei fundierten raumakustischen Kenntnissen immer wieder schwerwiegende Fehler begangen werden.

Die optimale Nachhallzeit eines Raumes ist einwandfrei bekannt. Bild 2 zeigt sie für verschiedene Raumvolumina, wobei zwischen Sprache, symphonischer Musik und Kirchenmusik (Orgel und Chor) zu unterscheiden ist, und die Werte für Räume mit Publikum gelten. Schon daraus geht hervor, dass eine Kirche ein besonders schwieriges Problem darstellen muss, da sich die optimalen Nachhallzeiten für Sprache (Predigt) und Orgel mindestens um den Faktor 2 unterscheiden. Dazu gesellt sich noch die weitere Schwierigkeit, dass die Nachhallzeit eines Raumes weitgehend auch durch die Publikumsabsorption bestimmt ist. Dieser Einfluss wird am einfachsten durch das spezifische Volumen, d. h. durch die auf einen Zuhörer fallende Anzahl  $m^3$  erfasst. Um bei voll besetztem Raum die optimale Nachhallzeit zu erreichen, sind etwa die folgenden spezifischen Volumina erforderlich:

Vortragssaal	3 bis 4 $m^3$ / Zuhörer
Kino	3 bis 4 $m^3$ / Zuhörer
Theater	4 bis 6 $m^3$ / Zuhörer
Konzertsaal	7 bis 9 $m^3$ / Zuhörer

In einer Kirche liegt das spezifische Volumen meist weit über 10  $m^3$  / Zuhörer; zudem ist noch zu berücksichtigen, dass die Kirche gewöhnlich nur an hohen Feiertagen wirklich gefüllt ist, so dass die mittlere Platzausnutzung zwischen 50 und 60 % liegt. Diese sehr stark schwankende Besetzung ist ein weiteres Charakteristikum der Kirche, das ihre akustische Dimensionierung sehr erschwert.

#### Rücksichtnahme auf die Orgel

Da die Werte der optimalen Nachhallzeit für Sprache (Predigt) und Orgel weit auseinanderliegen, muss ein Kompromiss zwischen diesen beiden Extremen gefunden werden. Für die protestantische Kirche, bei der die Predigt den dominierenden Hauptteil der liturgischen Handlung bildet, müsste diese Frage richtigerweise so gestellt werden: Wie weit darf

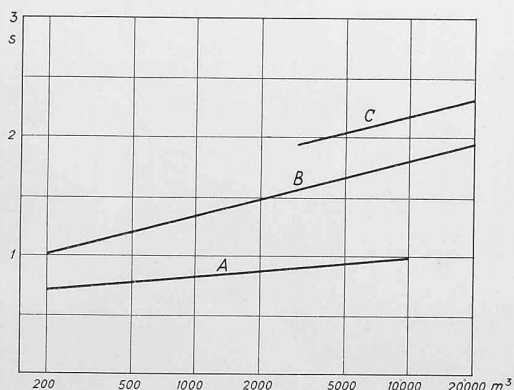


Bild 2. Optimale Nachhallzeiten für verschiedene Raumvolumina mit Publikum

- A: Vortragssäle (Sprache)  
 B: Konzertsäle (Symphonieorchester, Solisten)  
 C: Kirchenmusik (Orgel, Chöre)

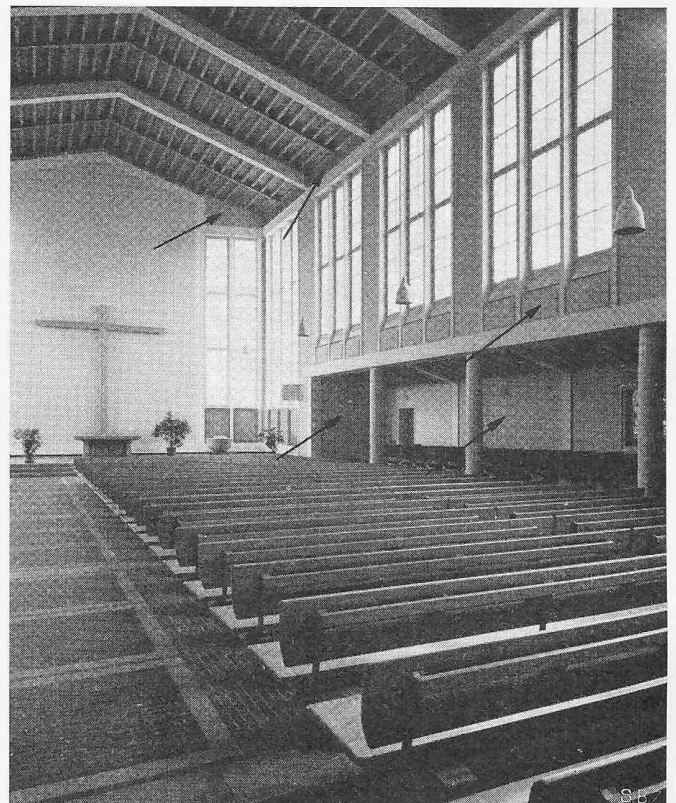


Bild 3. Blick gegen die Kanzelwand

die Akustik auf die Orgel überhaupt Rücksicht nehmen? Eigentümlicherweise ist nun aber bei uns diese Fragestellung in ihr gerades Gegenteil verkehrt worden; in den weitaus meisten Fällen ist es der Orgelfachmann, dem die akustische Gestaltung der Kirche völlig überlassen bleibt. Als ungünstiger Umstand tritt weiter hinzu, dass vielen unserer Orgelbauer und Orgelexperten die optimalen Nachhallzeiten für Orgelmusik (Bild 2) unbekannt sind, obschon diesen Werten die Verhältnisse der bekanntesten Kirchen, wie z. B. der Thomaskirche in Leipzig, zugrunde liegen. Für viele dieser Orgelfachleute scheint eine obere Grenze des Nachalles überhaupt nicht zu existieren, und sie widersetzen sich grundsätzlich jedem Versuche, ihn durch geeignete Massnahmen auf einen vernünftigen Wert herabzusetzen. Dass in einem möglichst hallenden «überakustischen» Raum die Lautstärke jeder Schallquelle sehr gross wird und damit auch entsprechende emotionelle Eindrücke erzielt werden können, ist von der Akustik der Badezimmer, Treppenhäuser usw. bekannt, die ja auch völlig unmusikalische Leute oft unwiderstehlich zum Singen, Pfeifen usw. anregt!

Dies hat dazu geführt, dass in der neuesten Zeit recht viele Kirchen gebaut wurden, die übermässig lange Nachhallzeiten aufweisen. Die Leidtragenden sind nicht nur der Pfarrer, dessen Wort kaum mehr verständlich ist, sondern vor allem die Gemeinde, die dadurch dem Gottesdienst entfremdet wird. Meistens werden dann bewusst oder unbewusst die Ursachen verkannt; die Akustik müsse gut sein, heisst es oft, da die Orgel herrlich töne, infolgedessen könne der Fehler nur beim Pfarrer liegen, der eben kein guter Kanzelredner sei!

#### Beispiel einer neuen Kirche

Die im Jahre 1951 fertiggestellte Markuskirche der Architekten K. Müller und H. Daxelhofer in Bern ist ein gutes Beispiel dafür, dass man heute eine Kirche auch in akustischer Hinsicht vernünftig gestalten kann, ohne unzulässig in die architektonische Konzeption eingreifen zu müssen. Die Bilder 3 und 4 zeigen einige akustisch wichtige Einzelheiten des Kirchenraumes: Eine tiefgegliederte Holzdecke mit sichtbaren Unterzügen, eine aufgelöste Fensterwand mit kleinem Seitenschiff, woraus sich eine wünschbare Vermeidung einer Symmetrie ergibt, und ein, wenn auch nur leicht, ansteigender Boden. Die der Fensterwand gegenüberliegende grosse, glatte Längswand ist bei den Tragpfeilern unterteilt, und die einzelnen Wandelemente sind schief gestellt, wodurch eine säge-

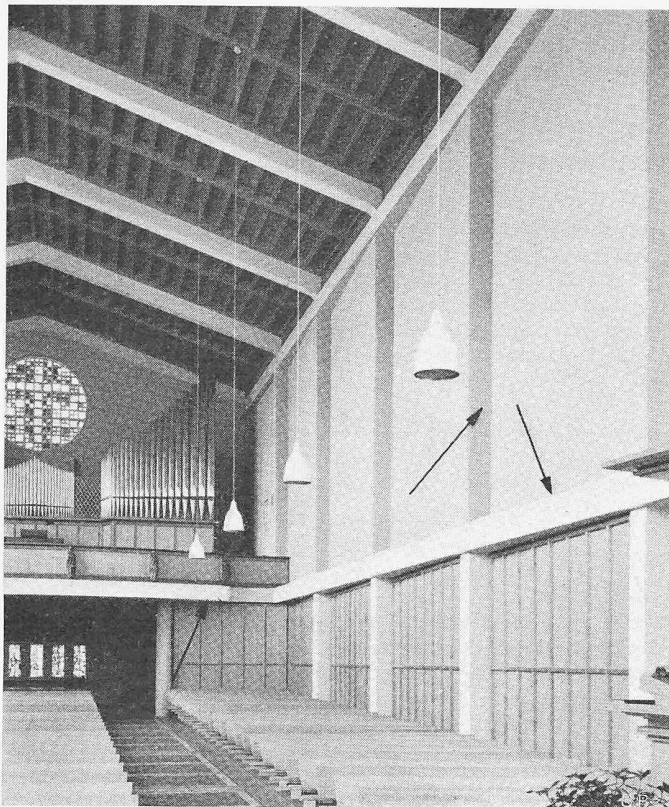
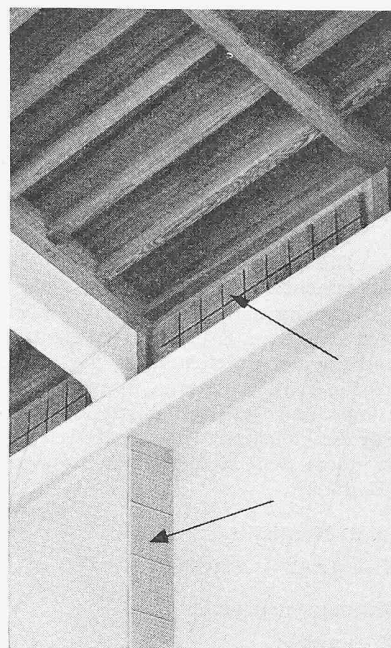


Bild 4. Blick gegen die Eingangsseite

Bilder 3, 4 und 6:  
Markuskirche in Bern.  
Architekten:  
K. MÜLLER und  
H. DAXELHOFER, Bern.



Die Pfeile bezeichnen die schallschluckenden Flächen.

Bild 6. Markuskirche, Detail

zahnähnliche Form entsteht (s. Bild 4). Diese Massnahme ist sowohl innen wie aussen sehr unauffällig und wirkt architektonisch gut.

Die Diffusion wurde gemessen und erwies sich als sehr gut, durchaus vergleichbar mit einer Barockkirche. Dagegen war die Nachhallzeit mit über 5 Sekunden im mittleren Frequenzgebiet bei einem Volumen von 6700 m<sup>3</sup> noch wesentlich zu lang, was aus Bild 2 leicht ersichtlich ist. Trotzdem wurde die Kirche in diesem Zustande der Gemeinde übergeben, wobei es sich aber erwartungsgemäss sofort zeigte, dass die Orgel wohl sehr gut und vor allem sehr laut tönnte, dass aber alle drei Pfarrer der Kirchgemeinde im mittleren und hinteren Teil der Kirche nur teilweise oder überhaupt nicht verstanden werden konnten. Daraufhin wurde der Entschluss gefasst, die Nachhallzeit zu korrigieren. Bild 5 zeigt die gemessenen Nachhallzeiten für die verschiedenen Frequenzen. Der Verlauf dieser Kurve ist typisch; bei den tiefen Frequenzen bewirken die Holzverkleidungen, vor allem die Decke, sowie die Fenster ein Absinken der Nachhallzeit; bei den hohen Frequenzen entsteht der gleiche Effekt durch die Porosität der verschiedenen Materialien sowie durch die Luftabsorption. Aus diesen Gründen ist die Nachhallzeit im mittleren Frequenzbereich am längsten. Wenn man sich vergegenwärtigt, dass in diesem Frequenzbereich nicht nur die ganze Energie der menschlichen Sprache, sondern auch die grösste Empfindlichkeit des menschlichen Ohres liegt, ist

seine praktische Bedeutung evident. Glücklicherweise absorbieren die meisten handelsüblichen Akustikplatten gerade in diesem Gebiet gut, und auch die Publikumsabsorption hat hier ihr Maximum, so dass eine Korrektur keine grundsätzlichen Schwierigkeiten bietet.

Während für die Wahl der zu verwendenden Akustikplatten vor allem ästhetische Gesichtspunkte ins Gewicht fallen, ist der Ort ihrer Verlegung akustisch sehr wichtig. Die Verkleidung einer ganzen Decke mit Absorptionsmaterial, was oft für die Lärmbekämpfung gemacht wird, ist raumakustisch fast immer schlecht. Es muss darnach getrachtet werden, die Schluckflächen möglichst gleichmässig im ganzen Raum zu verteilen. Um die Nachhallzeit der Markuskirche im mittleren Frequenzbereich von über 5 Sekunden auf etwas über 3 Sekunden zu vermindern, wurde eine Oberfläche von 200 m<sup>2</sup> Akustikplatten berechnet. Die Bilder 3, 4 und 6 zeigen, wo das Absorptionsmaterial angebracht wurde; die Fläche ist in Streifen und kleine Einzelflächen aufgeteilt, die der Architektur so angepasst sind, dass sie gar nicht auffallen und kaum gesehen werden. Lediglich an der Wand des Seitenschiffes und an der Unterseite der Empore mussten grössere zusammenhängende Flächen verlegt werden. Bei der Wahl des Materials hat man weitgehend auf die architektonischen Belange Rücksicht genommen; im Seitenschiff wurde eine stossfeste gelochte Platte verwendet, an den Wänden und der Emporenunterseite eine Glasfaserplatte, die sich in ihrem Aussehen kaum vom Verputz der Wandflächen unterscheidet. Am hölzernen Deckenfries wurden die Glasfaserplatten mit durchlässigen «Tecto»-Platten aus Holz abgedeckt (Bild 6).

Die Kurve B in Bild 5 zeigt, dass die gemessenen Nachhallzeiten genau der Berechnung entsprechen. Eine weitere Nachhallkurve C wurde während eines Gottesdienstes, also mit Publikum, unter Benützung der Orgel als Schallquelle gemessen; diese letzten Werte sind massgebend für das «Betriebsverhalten» der Kirche. Ein Vergleich mit den optimalen Werten von Bild 2 lässt erkennen, dass die Nachhallzeit für Sprache mit etwas über 2 Sekunden noch reichlich lang und für Musik und auch Orgel immer noch ausgezeichnet ist, dass mit andern Worten der Kompromiss deutlich zugunsten der Orgel und des Gemeindegesangs ausgefallen ist. Trotzdem ist heute die Predigt in der ganzen Kirche mühelos verständlich, vorausgesetzt dass der Pfarrer mindestens ein mittelguter Redner ist. Dies ist vor allem auch der sehr guten Diffusion zuzuschreiben, die mit der beschriebenen günstigen Form erreicht wurde. Ohne diesen Umstand wäre die Verständlichkeit merklich schlechter. Die Orgel tönt heute bei leerer Kirche weniger laut als vor der Verminderung der Nachhallzeit; ihre musikalische Qualität hat aber keineswegs gelitten.

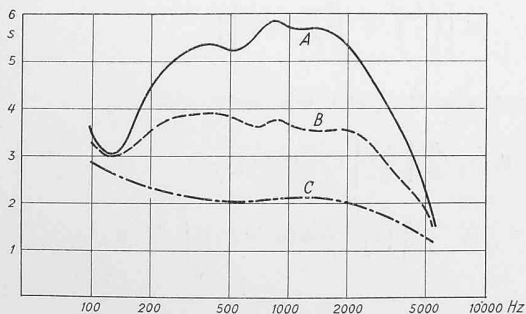


Bild 5. Markuskirche Bern, Gemessene Nachhallkurven

- A: Ohne Akustikplatten, leer
- B: Mit Akustikplatten, leer
- C: Mit Akustikplatten und 450 Personen (75% der Plätze)

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass es heute durchaus möglich ist, akustisch gute Kirchen zu bauen, ohne ihre architektonische Konzeption unzulässig zu beeinflussen; das grösste Hindernis für eine befriedigende Lösung

sind häufig die Forderungen der Orgelfachleute, die auf die primäre Wichtigkeit einer genügenden Sprachverständlichkeit keinerlei Rücksicht nehmen.

### Knickprobleme an geraden Stäben, Kreisbogensegmenten und Zylindern

Von Oberingenieur H. JUILLARD, Bern

DK 624.075.2:624.19

Fortsetzung von Seite 454

#### 1. Fall des eingespannten Bogens

Die Veröffentlichung des Verfassers «Influence de l'encastrément latéral dans les grands barrages»<sup>1)</sup> enthält eine Berechnung der Beanspruchung und der Durchbiegungen des eingespannten Kreisbogensegmentes für radiale Einzellasten und für einen gleichmässig verteilten Druck. Dabei wurde der Einfluss aller inneren Spannungen, d. h. der Normal-, Biegungs- und Querkräfte auf die Deformation berücksichtigt. Für die gleichmässig verteilte Last beträgt die Beanspruchung in einem Schnitt mit Winkel  $x$  gegenüber der Symmetrieaxe (Bild 7):

axiale Normalkraft:  
 $N = pr(1 - \Delta \cos x)$

Bieugungsmoment:  
 $M = pr^2 \times$   
 $\times \left( \cos x - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)$

Querkraft:  
 $Q = pr \Delta \sin x$

wo

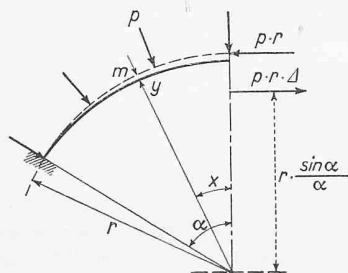


Bild 7

$$\Delta = \frac{\sin \alpha \left( \frac{i}{r} \right)^2}{\frac{a\alpha}{2} + \frac{b \sin 2\alpha}{4} - \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha}}$$

$$i^2 = \frac{J}{F} = \frac{e^2}{12}; \quad e = \text{Bogenstärke}$$

$$a = 1 + \left( \frac{E}{G} + 1 \right) \left( \frac{i}{r} \right)^2$$

$$b = 1 - \left( \frac{E}{G} - 1 \right) \left( \frac{i}{r} \right)^2$$

Die radiale Deformation  $y$  beträgt:

$$(5) \quad y = \frac{pr^2}{EF} \left[ 1 - \cos(\alpha - x) - \sin \alpha \frac{\delta_{mx}}{\delta_{xx}} \right]$$

wo

$$(5a) \quad \frac{EJ}{r^3} \delta_{mx} = \frac{b}{2} \sin \alpha \sin(\alpha - x) - \frac{a}{2} \sin x (\alpha - x) - \frac{\sin \alpha}{\alpha} [1 - \cos(\alpha - x)]$$

$$\frac{EJ}{r^3} \delta_{xx} = \frac{a\alpha}{2} + \frac{b \sin 2\alpha}{4} - \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha}$$

Es ist hervorzuheben, dass der Zähler der statisch unbestimmten Grösse  $\Delta$  nur von der Deformation unter dem Einfluss der Normalkräfte abhängig ist. Wenn dieser Einfluss vernachlässigt wird, ergibt sich  $\Delta = 0$  und  $N = pr$ ;  $M = 0$  und  $y = 0$ . Aus diesem Ergebnis geht der Unterschied zwischen dem Bogensegment und dem vollen Zylinder hervor. Während im Zylinder die Normalkräfte nur eine in allen radialen Schnitten gleich grosse elastische Deformation und somit keine Abweichung von der Kreisform verursachen, ist dies beim Segment nicht der Fall. Die Differentialgleichung, die zur Formel (4) führte und nur den Einfluss der Momente berücksichtigt, ist für den vollen Zylinder zweckmässig; ihre Anwendung beim eingespannten Bogensegment wäre hingegen unzulässig.

Bei der Ableitung der Formel (5) für die Durchbiegung  $y$  wurde der Einfluss der Veränderung der Belastung infolge der elastischen Deformation nicht berücksichtigt. Diese bei allen Problemen der Baustatik ohne weiteres zulässige Ver-

einfachung gestattet aber eine strenge mathematische Analyse der Knickvorgänge nicht. Die unter Berücksichtigung des Einflusses der Deformation auf die Lage und die Grösse der wirkenden Belastung durchgeführte Berechnung der im Querschnitt mit Winkel  $x$  gegenüber der Symmetrieaxe auftretenden Beanspruchung ergibt:

$$M_1 = pr^2 \left[ \Delta_1 \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} - \cos x \right) - \frac{y_x}{r} + \int_0^\alpha \frac{y_x}{r\alpha} dx \right]$$

$$N_1 = pr \left[ 1 - \frac{y_x}{r} - \Delta_1 \cos x \right]$$

$$Q_1 = -pr \Delta_1 \sin x$$

worin  $\Delta_1$  die statisch unbestimmte Grösse bezeichnet, die in der horizontalen Schweraxe des Bogens wirkt (Bild 8). Es ergibt sich aus einer längeren, jedoch einfachen Berechnung, die gleich wie in der oben zitierten Publikation des Verfas-

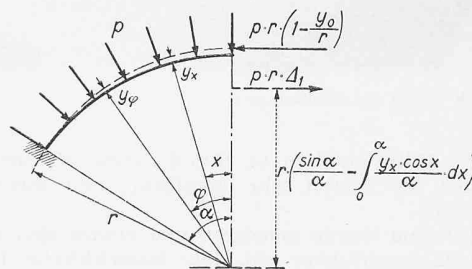


Bild 8

sers vom Jahre 1921 nach der Methode der virtuellen Arbeiten durchgeführt wurde:

$$(6a) \quad \Delta_1 = \frac{\left( \frac{i}{r} \right)^2 \sin \alpha - \int_0^\alpha \frac{y_x}{r} \left( \cos x - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) dx}{\frac{a\alpha}{2} + \frac{b \sin 2\alpha}{4} - \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha}}$$

und

$$(7) \quad y_x = \frac{pr^4}{EJ} \left\{ \Delta_1 \left[ \frac{a \sin x (\alpha - x)}{2} - \frac{b \sin \alpha \sin(\alpha - x)}{2} + \frac{\sin \alpha}{\alpha} (1 - \cos(\alpha - x)) \right] - \int_x^\alpha \frac{y_\varphi}{r} \sin(\varphi - x) d\varphi + [1 - \cos(\alpha - x)] \times \left[ \left( \frac{i}{r} \right)^2 + \int_0^\alpha \frac{y_\varphi}{r\alpha} d\varphi \right] \right\}$$

oder auch zum Vergleich mit der Formel (5a)

$$y_x = \frac{p}{E} \left\{ \frac{r^2}{F} \left[ 1 - \cos(\alpha - x) - \sin \alpha \frac{\delta_{mx}}{\delta_{xx}} \right] + \frac{r^4}{J} \left[ (1 - \cos(\alpha - x)) \int_0^\alpha \frac{y_\varphi}{r\alpha} d\varphi - \int_x^\alpha \frac{y_\varphi}{r} \sin(\varphi - x) d\varphi + \frac{\delta_{mx}}{\delta_{xx}} \int_0^\alpha \frac{y_\varphi}{r} \times \left( \cos \varphi - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) d\varphi \right] \right\}$$

1) SBZ, Bd. 78, S. 271\* (3. Dez. 1921).