Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 70 (1952)

Heft: 44

Artikel: Berechnung der Druckspannnungs-Kurve im Stahlbeton-Biegequerschnitt

Autor: Hamann, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-59700

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Kontrollmass für ungerade Zähnezahl M_R'

$$(40) \qquad M_R' = m\, z_2 \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_R} \cos\frac{90^0}{z_2} - d_R = \frac{d_{b_2}}{\cos\alpha_R} \cos\frac{90^0}{z_2} - d_R$$

$$(41) \qquad \operatorname{inv}\alpha_R = \operatorname{inv}\alpha + \frac{0{,}5\,\pi + 2\,x_2 \operatorname{tg}\alpha}{z_2} - \frac{d_R - 0{,}5\,j}{m\, z_2 \cos\alpha}$$

Der Messrollendurchmesser soll so gewählt werden, dass die Rolle wenig über den Zahnkopf vorsteht. Für Räder mit geringer Profilverschiebung wird $d_R = 1{,}440$ m empfohlen.

Die Profilverschiebungen an Innengetrieben mit schrägen Zähnen lassen sich auf die gleiche Weise berechnen, sofern Stossmesser verwendet werden, bei denen das Nennmodul auf den Stirnschnitt bezogen ist; andernfalls ist die Rechnung mit Hilfe der ideellen Zähnezahl vorzunehmen.

Schluss folgt

Berechnung der Druckspannungs-Kurve im Stahlbeton-Biegequerschnitt

Von Dipl. Ing. H. HAMANN, Mülheim-Ruhr

DK 624.072.2.012.4

Haberstock bezeichnet die Klärung der Druckspannungsverteilung im Biegequerschnitt als das Hauptproblem der n-freien Rechnung und sagt schliesslich, dass eine exakte Aussage über die Form der Spannungsverteilung und über die Höchstspannung im Druckgurt derzeit nicht möglich sei [2] [1]). Die Durchführung direkter Spannungsmessungen, die dieses Problem einer abschliessenden Lösung entgegenführen könnte, ist bislang nicht bekannt geworden.

Bei dem Versuch, die Spannungsverteilung zutreffend zu beurteilen, tauchen immer wieder zwei Grundgedanken schon in den ersten Arbeiten der dreissiger Jahre auf:

1. Annahme einer Affinität der an mittig gedrückten Prismen gefundenen Spannungs-Stauchungslinie mit der Spannungsverteilung im Biegequerschnitt.

2. Bestimmung des Völligkeitsgrades und des Randabstandes des Druckschwerpunktes durch Auswertung von Bruchversuchen mittels Tastrechnung, wobei man sich zur besseren Veranschaulichung meist auch ein Bild der Spannungsverteilung entwirft.

Es soll hier ein Weg gezeigt werden, der genauere Aussagen zu machen gestattet. Er fusst auf Pucherschen Grundgedanken [5], weswegen auch die von Pucher gewählte Bezeichnungsweise im Wesentlichen beibehalten wurde.

Die Ableitung, die für den Rechteckquerschnitt durchgeführt wird, beruht auf folgenden Voraussetzungen:

a) Gültigkeit der Bernoullischen Hypothese. Es sei ausdrücklich betont, dass mit einem ganz geringen Mehraufwand auf die Verwendung dieser Hypothese in folgender Entwicklung verzichtet werden könnte. Es kann bewiesen werden, dass ein Abgehen von dieser Hypothese das Charakteristikum des Endergebnisses nicht wesentlich verändert [3].

b) Die Spannungs-Stauchungslinien aller Fasern der Balkendruckzone sind annähernd gleich. Diese Annahme erscheint berechtigt, da die Stauchungsdifferenz einer Faser gegenüber der darunterliegenden Faser, somit auch die gegenseitige Beeinflussung, immer gleich ist.

c) Keine Mitwirkung der Betonzugzone. Diese Annahme wurde getroffen, weil bei den Versuchsunterlagen gewisse Angaben fehlten. Der Einfluss dieser Vernachlässigung auf das Endergebnis ist nicht wesentlich.

Die verwendeten Bezeichnungen gehen aus Bild 1 hervor. Beim Bruch geht die Randstauchung ε_{br} in die Bruchstauchung ε_{bB} und die Betonrandspannung σ_{br} in die Betonbruchrandspannung σ_{bB} über. Es wird weiter verwendet:

$$\varphi = \frac{\varepsilon_{br}}{\varepsilon_{bB}} \leq 1;$$

$$\varphi' = \frac{\sigma_{br}}{\sigma_{bB}} \gtreqless 1;$$

$$(1) \quad x = \frac{\varepsilon_{br}}{\varepsilon_{br} + \varepsilon_e}\, h = \xi h$$

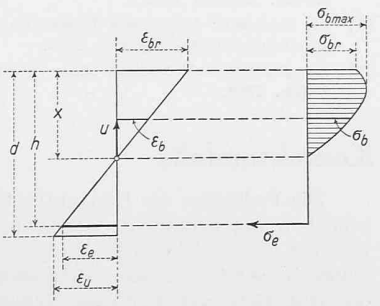

Bild 1. Bezeichnungen

Für den Belastungszustand φ wird mit der dimensionslosen Integrationsvariablen α

$$u = \frac{\alpha}{\varphi} x;\; du = \frac{\xi}{\varphi} h\, d\alpha$$

Die Betondruckkraft ist dann

$$D_b = \int_{u=0}^{u=x} \sigma_b\, b\, du = \xi\, \sigma_{bB}\, b\, h \frac{1}{\varphi} \int_{\alpha=0}^{\alpha=\varphi} \varphi'(\alpha)\, d\alpha = k\, \xi\, \sigma_{bB}\, b\, h$$

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis.

Das Moment von D_b um die Nullinie wird

$$M_0 = \int_{u=0}^{u=x} \sigma_b\, b\, u\, du = \xi^2\, \sigma_{bB}\, b\, h^2 \frac{1}{\varphi^2} \int_0^{\varphi} \varphi'(\alpha)\, \alpha\, d\alpha$$

Bezeichnen wir mit $\lambda = 1 - \frac{1}{\varphi^2 k} \int \varphi'(\alpha)\, \alpha\, d\alpha$, so ergibt sich

$$z = h - x + \frac{M_0}{D_b} = h\,(1 - \lambda\, \xi)$$

Es gilt die Gleichgewichtsbedingung

$$(2) \qquad k\, \xi\, \sigma_{bB}\, b\, h = F_e\, \sigma_e \qquad\qquad k = \mu \frac{\sigma_e}{\sigma_{bB}} \frac{1}{\xi}$$

und

$$M = k\, \xi\, \sigma_{bB}\, b\, h\, z = k\, \xi\, \sigma_{bB}\, b\, h^2\, (1 - \lambda\, \xi)$$

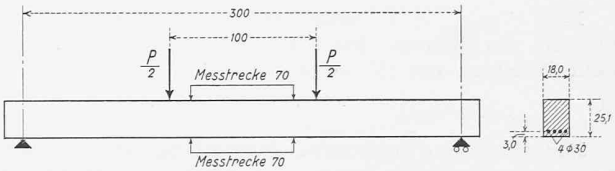

Bild 2. Versuchsbalken

Wir führen unsere Ueberlegungen an einem stark bewehrten Versuchsbalken nach Bild 2 weiter. Misst man bei stufenweiser Aufbringung der Belastung jeweils die einander zugeordneten Verlängerungen der Stahleinlagen und die Zusammendrückungen der Betons an der oberen Balkenfläche bis zum Bruch, so erhält man eine Funktion $\varepsilon_e(\varphi) = \Phi$. (1) etwas umgewandelt in (2) eingesetzt ergibt nämlich mit $\sigma_e = E_e\, \varepsilon_e$:

$$k = \mu \frac{E_e\, \varepsilon_e}{\sigma_{bB}} \left(1 + \frac{\varepsilon_e}{\varphi\, \varepsilon_{bB}}\right)$$

$$\frac{1}{\varphi} \int_0^{\varphi} \varphi'(\alpha)\, d\alpha = \frac{\mu\, E_e}{\sigma_{bB}}\, \Phi \left(1 + \frac{\Phi}{\varphi\, \varepsilon_{bB}}\right)$$

$$(3) \qquad \varphi'(\varphi) = \frac{\mu\, E_e}{\sigma_{bB}} \left[\frac{d}{d\varphi}(\varphi\, \Phi) + \frac{1}{\varepsilon_{bB}} \frac{d}{d\varphi} \Phi^2\right] + c$$

Diese Funktion gilt allgemein, also nicht nur für eine bestimmte Faser des gedrückten Querschnittes. Die Konstante c wollen wir hier nicht weiter beachten, da wir annehmen wollen, dass unsere Balken bei Versuchsbeginn spannungsfrei sind, das heisst z. B. keiner Schwindvorspannung unterliegen.

In den meisten Fällen wird es ausreichen, $\varepsilon_e(\varphi)$ durch eine Parabel 2. Grades anzunähern:

$$\Phi = a_1\, \varphi + a_2\, \varphi^2$$

Wir erhalten dann nach Gleichung (3)

$$(4) \qquad \varphi'(\varphi) = \frac{\mu\, E_e}{\sigma_{bB}} \times$$

$$\times \left[\frac{4\, a_2^2}{\varepsilon_{bB}}\, \varphi^3 + \left(\frac{6\, a_1\, a_2}{\varepsilon_{bB}} + 3\, a_2\right) \varphi^2 + \left(\frac{2\, a_1^2}{\varepsilon_{bB}} + 2\, a_1\right) \varphi\right]$$

Die Betonbruchrandspannung erhält man, wenn man $\varphi = \varphi' = 1$ setzt:

$$(5) \qquad \sigma_{bB} = \frac{2\, \mu\, E_e}{\varepsilon_{bB}} \left[2\, a_2^2 + 3\, a_1\, a_2 + 1{,}5\, a_2\, \varepsilon_{bB} + a_1^2 + a_1\, \varepsilon_{bB}\right]$$

Tabelle 1

P	M	Δe auf unterer Balkenfläche	ε_e	Δe auf oberer Balkenfläche	ε_b	φ
kg	kg.m	$^1/_{200}$ cm	$^0/_{00}$	$^1/_{200}$ cm	$^0/_{00}$	
Eig.-G.	160	0	0	0	0	0
1000	660	0,70	0,050	1,20	0,086	0,037
2000	1160	1,44	0,103	2,58	0,184	0,079
2750	1535	2,06	0,147	3,81	0,272	0,117
3000	1660	2,36	0,169	4,32	0,309	0,133
4000	2160	3,48	0,249	6,29	0,449	0,194
5000	2660	4,78	0,342	8,75	0,625	0,270
6000	3160	6,10	0,436	11,82	0,856	0,365
7000	3660	7,87	0,562	16,72	1,194	0,515
8000	4160	9,93	0,710	24,09	1,720	0,741
8500	4310	11,64	0,832	32,29	2,320	1,000

Führt man jetzt noch (5) in (4) ein, so ist der gesuchte Zusammenhang gefunden. Um festzustellen, ob am oberen Balkenrand ein Spannungsabfall im Augenblick des Bruchs vorhanden ist, setzen wir die ersten Ableitungen der Gl. (3) = 0 und lösen nach φ auf:

$$(6) \qquad \varphi_{\sigma_{b\,\max}} = -\frac{a_1 + 0{,}5\,\varepsilon_{bB}}{2\,a_2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2\,a_1\,(a_1 + \varepsilon_{bB})}{3\,(a_1^2 + 0{,}25\,\varepsilon_{bB}^2 + a_1\,\varepsilon_{bB})}}\right)$$

Ist $0 < \varphi_{\sigma_{b\,\max}} < 1$, dann liegt ein Spannungshöchstwert innerhalb des Balkens. Die maximale Spannung erhält man durch Einsetzen von (6) in (3) zu

$$\sigma_{b\,\max} = \varphi'\,\sigma_{bB}$$

Für eine erste praktische Auswertung der rechnerisch hergeleiteten Formeln eignen sich schon vor längerer Zeit durchgeführte Versuche [1]. Aus einer Reihe von Balken wählen wir zur Demonstration den Balken Nr. 328. Die uns in diesem Zusammenhang interessierenden Messungsergebnisse und deren Auswertung, Balkenabmessungen und Belastungsbild gehen aus Bild 2 und der Tabelle 1 hervor. Es werden gebraucht:

1. Stauchungen auf oberer Balkenfläche (siehe Tabelle 1).
2. Dehnungen in Höhe der Eiseneinlagen (siehe Tabelle 1). Da die Dehnungen an der unteren Balkenfläche gemessen wurden (ε_u), waren die Dehnungen der Eiseneinlagen unter der Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte bestimmbar.
3. Bestimmung der Würfelfestigkeit (30×30×30) an zwei Würfeln. Im Mittel ergab sich $W_b = 122$ kg/cm².
4. Bestimmung des Spannungs-Stauchungsdiagramms an zwei Prismen 20×20×80. Es interessieren hier die elastischen und plastischen Formänderungen. — Prismenfestigkeit i. M. = 115,5 kg/cm².

Die Funktion Φ wurde mit der Newtonschen Näherungsmethode in ausreichender Genauigkeit als Parabel 2. Grades bestimmt, dann die gefundenen Konstanten in Gl. (3) bis (6) eingesetzt. Man erhält:

$$\varphi'(\varphi) = 0{,}540\,\varphi^3 - 3{,}945\,\varphi^2 + 4{,}392\,\varphi$$

$$\sigma_{bB} = 91{,}9\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_{b\,\max} = 123\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

Trägt man die gefundene Funktion im Spannungs-Stauchungsdiagramm ein (Bild 3), dazu zum Vergleich die an Prismen allerdings nur bis zu einer Stauchung von etwa 0,1 % festgestellten Stauchungslinien, dann gilt für diesen Balken:

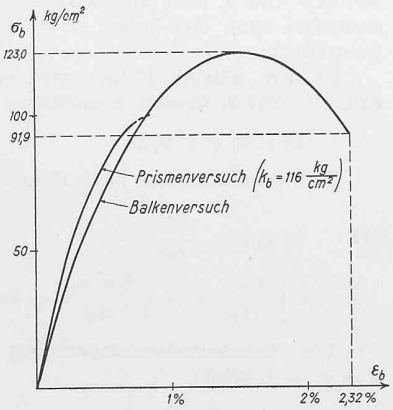

Bild 3. Spannungs-Stauchungs-Diagramm

1. Setzt man $W_b\,(20 \times 20 \times 20) = \dfrac{W_b\,(30 \times 30 \times 30)}{0{,}9}$

so ergibt sich nachstehender Zusammenhang:

$$\sigma_{bB} : k_b : \sigma_{b\,\max} : W_b = 0{,}68 : 0{,}86 : 0{,}91 : 1{,}00$$

Am oberen Balkenrand tritt ein überraschend hoher Spannungsabfall auf. Die maximale Druckspannung liegt zwischen Prismen- und Würfelfestigkeit.

2. Setzt man voraus, dass der wesentliche Unterschied zwischen Prismen- und Biegeversuch in der Stützung der höherliegenden Fasern durch die weniger gestauchten, tieferliegenden (beim Biegeversuch) besteht, dann lassen sich sowohl die höheren Stauchungen am oberen Balkenrand als auch der im aufsteigenden Ast etwas gestrecktere Verlauf der errechneten Spannungs-Stauchungslinie erklären.

3. Allgemein gilt folgende Kontrollmöglichkeit: Ist die errechnete Spannungs-Stauchungslinie richtig, dann müssen sich auch die Momente für jeden beliebigen Belastungszustand bestimmen lassen. Es werden beliebig gewählt:

Stauchungszustand $\varphi = 1$: Bruchmoment;
Stauchungszustand $\varphi = 0{,}365$.

Die Völligkeit k ist hier auf die Würfelfestigkeit (20×20×20) umgerechnet und nicht wie bisher auf σ_{br} bezogen.

φ	k	λ	Moment nach	
			Rechnung	Versuch
1,000	0,707	0,423	4420	4310
0,365	0,430	0,357	2960	3160

Zusammenfassung. Versuch und Auswertung nach vorstehendem Beispiel geben die Möglichkeit, auf Tastrechnungen bisheriger Art zu verzichten. Vermutlich werden sie die Auffassung vom «plastischen» Verhalten des Betons nachdrücklich untermauern. Sie könnten, z. B. auf andere Festigkeiten ausgedehnt, weitere interessante Ergebnisse zu Tage fördern und würden es gestatten, Ergebnisse von Spannungs-Stauchungsversuchen an Prismen im Hinblick auf Uebertragung auf den Biegequerschnitt zutreffend einzuschätzen.

Literaturverzeichnis

[1] *C. Bach* und *O. Graf:* Versuche mit Eisenbetonbalken, 3. Teil. Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 90 und 91. Verlag Springer, Berlin, 1910.
[2] *K. B. Haberstock:* Die n-freien Berechnungsweisen. Berlin 1951. Verlag Wilh. Ernst & Sohn.
[3] *H. Hamann:* Bemessungsverfahren für bewehrten Leichtbeton unter Zugrundelegung einer erweiterten n-freien Theorie. Dissertation. Aachen 1952.
[4] *H. Hamann:* Ueber die Bemessung bewehrten Leichtbetons. «Betonsteinzeitung», Heft 5, 1952.
[5] *A. Pucher:* Lehrbuch des Stahlbetonbaues. Springer-Verlag, Wien, 1949.

Kontaktmetalle

DK 621.316.5.066.6

Die Probleme der Kontaktmetalle werden in der Literatur relativ wenig behandelt. Trotzdem ist dieses Gebiet der Technik von ungewöhnlicher Bedeutung; man denke nur an die vielen tausend Relaiskontakte einer Telephonzentrale oder an die Kontakte der Schütze, Schalter usw. der Starkstromtechnik, deren Lebensdauer die Betriebssicherheit dieser Apparate entscheidend beeinflusst. Um den Fachleuten einen Gedankenaustausch über diese Fragen zu ermöglichen, veranstaltete der Schweizerische Verband für die Materialprüfungen der Technik (SVMT) zusammen mit dem Schweizerischen Elektrotechnischen Verein (SEV) am 16. Oktober 1952 in der ETH eine Diskussionsversammlung.

Der erste Referent, Dr. R. Palme vom Metallwerk Plansee GmbH, Reutte (Tirol), untersuchte die massgebenden