Bestimmung des Trägheitsmoments von Ringkörpern

Autor(en): **Martin, O.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **72 (1954)**

Heft 23

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-61201

gefochten wird, bei dem es tatsächlich um Leben und Tod geht; daher bedarf er einer äussern Entsprechung, nämlich des Kampfes mit einem äussern Feind, in dem die Not konkret erlebt und nicht nur theoretisch gedacht wird. Aber es bedarf dazu eines offenen, ritterlichen, menschlichen Kampfes, wie er z. B. im mittelalterlichen Turnier, im Duell, in gewissem Sinne auch in den Freiheitsschlachten der alten Griechen und der alten Eidgenossen zum Ausdruck kam.

Man wird gegen die hier entwickelte Auffassung des Kampfes als persönliche, soziologische und psychologische Notwendigkeit einwenden, ein solcher Kampf, der ja zunächst immer gegen Mitmenschen geführt werden muss, sei das Gegenteil von Liebe und vertrage sich nicht mit der Nachfolge Christi. Dem ist zu entgegnen, dass Liebe nicht ein Gut ist, das wir nach unserem guten oder bösen Willen austeilen oder zurückbehalten können; vielmehr ist sie die reife Frucht eines langen, treu und tapfer durch alle Entwicklungsstufen hindurchgefochtenen Kampfes um die Selbstwerdung, und sie wird uns nicht zuteil, wenn wir diesem Kampf und der Not, in die er uns versetzt, ausweichen. Der gute Kampf des Glaubens, den zu führen Paulus nicht müde wurde, seine Brüder und Gemeinden zu ermahnen, ist nicht das Gegenteil der andern, primitiveren Kampfarten; vielmehr kann er nur geführt werden, nachdem der Mensch durch die Auseinandersetzungen mit seinen äusseren und inneren Feinden gelernt hat, sein Selbst zu finden.

3. Vom Kampf um Erkenntnis

Von ganz anderer Art ist der Kampf um Erkenntnis. Diesen Kampf führt der Mensch aus einer Notwendigkeit, die ebenso urtümlich aus der Tiefe seiner Seele emporsteigt, wie die andern bisher betrachteten menschlichen Notwendigkeiten. Er führt ihn, um zu erkennen, was ist; um die Wahrheit zu schauen.

Hier stellt sich die inhaltschwere Frage: «Was ist Wahrheit?» Der Abendländer setzt im allgemeinen die Wahrheit dem Ergebnis der wissenschaftlichen Forschung gleich. Insbesondere gilt für uns als naturwissenschaftliche Wahrheit das, was uns die Natur im Experiment erkennen lässt. Diese Interpretation bleibt im Bereich des Messbaren, Beweisbaren, rational Fassbaren, also im Bereich der Wissenschaft in der engen, heute üblichen Bedeutung. Dieser Bereich muss nach zwei Seiten erweitert werden.

Das wissenschaftliche Erkennen wird heute vielfach in Gegensatz zum technischen Gestalten gesetzt und als etwas der «reinen Wahrheit» Dienendes und daher «Höheres» gegen das zweckgebundene und daher minderwertige Schaffen der Techniker abgegrenzt. Diese Unterscheidung und Abgrenzung widerspricht sowohl dem Wesen des Menschen als auch seinem tatsächlichen Benehmen als Forschender und als Gestaltender. Denn in Wirklichkeit bestehen die engsten gegenseitigen Beziehungen zwischen Wissenschaftern aller Fakultäten und Technikern in der Industrie und auf Bauplätzen, und zwar einerseits dadurch, dass sie bei der Bearbeitung gemeinsamer Probleme gegenseitig aufeinander angewiesen sind, und anderseits einander aufs stärkste beeinflussen, befruchten und fördern [6]. Als ein Beispiel für viele sei hier die kernphysikalische Forschung angeführt, die ohne die intensive Mitarbeit der Industrie nicht möglich wäre. Ihre Ergebnisse wirken sich nicht nur in den verschiedensten Zweigen der Industrie aus, sondern haben auch in der Medizin und in der Philosophie zu grundlegenden Neuerungen geführt. Dieses Verhalten entspricht durchaus der wesensgemässen Zusammengehörigkeit; denn alles wissenschaftliche Forschen hat das Wenden spezifisch menschlicher Nöte zum Ziel und zwar ein Wenden durch Aufrichten geistiger Konstruktionen, Theorien und Weltanschauungen, also durch Herausarbeiten spezifisch menschlicher Profile. Daher ist es wesensgemäss Technik. Erkennen und Gestalten sind einander zugehörige Funktionen einer einheitlichen geistigen Haltung und können nur aus dieser Einheit heraus sinnvoll, fruchtbar, wahrhaft menschlich sein.

Der Erweiterung unserer Vorstellung über das Wesen des wissenschaftlichen Forschens in den Bereich des technischen Gestaltens entspricht eine Erweiterung in den Bereich der Erkenntnis der Wahrheit. Die Erkenntnis, um die es hier geht, ist nicht nur das Ergebnis rationalen Denkens und Experimentierens, sondern das innern Erlebens. Ja, diese erlebte Erkenntnis, an der der *ganze* Mensch beteiligt ist, die sich also nicht nur auf sein bewusstes Denken stützt, führt erst zur eigentlichen Wahrheit, während das rationale Denken eine Erkenntnis vermittelt, die mehr nur als «Vor-Wahrheit» oder «Wahrheitsprojektion» zu bezeichnen wäre.

Im Bereich des wissenschaftlichen Forschens ergibt sich eine eigentümliche Spannung: Einereits ist der Forscher zu strenger Sachlichkeit gehalten, und er muss sich durch dauernde Kontrollen verschiedenster Art vergewissern, dass keine subjektiven Momente die Objektivität seiner Feststellungen und Schlüsse stören. Anderseits ist er durch das aufs tiefste ergriffen und bewegt, was er als Mensch bei seiner Tätigkeit erlebt. Denn wie der Techniker den Kampf um sein Werk, so erlebt der Forscher den Kampf um die Erkenntnis als ein bewegtes, tiefgreifendes Geschehen. Einerseits ist es der Kampf selber, der so viel Mut und Ausdauer, Kühnheit und Geduld, Hingabe und Opferbereitschaft erfordert, und anderseits ist es das Ergebnis dieses Kampfes, die gewonnene Erkenntnis, von der eine geheimnisvolle Macht und Grösse ausgeht. Beides versetzt den Forscher in Staunen und in ehrfurchtsvolle Ergriffenheit. Ja, es kann geschehen, dass er in der Begegnung mit seinem Objekt und mit dem, was er an ihm erkannt hat, zugleich die Begegnung mit einer Seinskategorie erlebt, die seinem eigenen Wesen gemäss ist. Wir stossen hier wieder auf ein uraltes Menschheitsproblem, nämlich auf das Problem, das sich aus der Begegnung mit sich selbst in der eigenen Tätigkeit ergibt, und mit dem auch wir moderne Menschen uns in unserer Art auseinandersetzen müssen. Dass wir das tun, ist für uns im Grunde eine religiöse Notwendigkeit. Wenn wir es tun, gewinnen wir Einblick und Zutritt zum Reich der im eigentlichen Sinn geistigen Wahrheiten, jener Wahrheiten, die auf die eine Wahrheit zurückgehen, vor die sich Pilatus gestellt sah (Joh. 18, 38).

Schluss folgt

[6] Vergl. Prof. Dr. *D. Brinkmann:* Technik und Naturwissenschaft. SBZ 1954, Nr. 1.

Bestimmung des Trägheitsmoments von Ringkörpern

DK 531.231

Von Dr.-Ing. **O. Martin,** Zürich

Im Maschinenbau spielen Beschleunigungen an ring-, scheiben- oder walzenförmigen Körpern um ihre Drehaxe eine grosse Rolle. Zur Ermittlung der dabei auftretenden Drehmomente müssen die Trägheitsmomente dieser Körper bekannt sein. Diese ermittelt man nach der Gleichung:

$$I = \int r^2\, dm = \int r^2 \cdot \frac{\gamma}{g}\, dv = \frac{\gamma}{g} \cdot 2\pi \int r^3 \cdot b\, dr$$

Um für Rotationskörper mit beliebiger Querschnittsfläche zu einem leicht benutzbaren graphischen Verfahren zu gelangen, formt man den Integranten um und gelangt zu:

$$I = 2\pi \frac{\gamma}{g} \int b\, d\left(\frac{r^4}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\gamma}{g} \int b\, d\,(r^4)$$

Zur planimetrischen Bestimmung des Integrals zeichnet man aus der gegebenen Querschnittsfläche $F = \int b\, d\, r$ eine abgeleitete Fläche $F_{IV} = \int b\, d\,(r^4)$, indem man alle Ordinaten r durch eine Variable $\varphi = r/R$ ausdrückt und im Verhältnis $\varphi_4 = \varphi^4 \cdot R$ verzerrt (vgl. Bild 1). Dann ist:

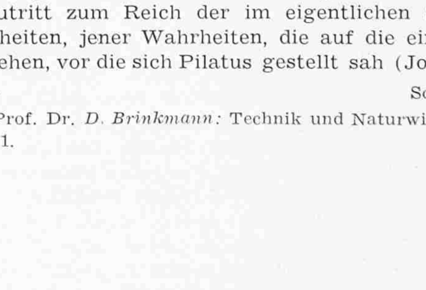

Bild 1

$$I = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot R^3 \int b\, d\,(\varphi_4) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot R^3 \cdot F_x$$

wobei F_x die auf Bild 1 schraffierte Fläche darstellt. Die starke Verzerrung mit Hilfe einer Parabel 4. Ordnung macht das Verfahren zuweilen etwas unhandlich und die hohe Potenz von R stört die Anschaulichkeit des Ergebnisses.

Ein anschaulicher Weg, Trägheitsmomente mit Hilfe einer Grösse zu bestimmen, die leicht in das Gedächtnis eingeht, und deren Grössenordnung in einfacher Beziehung zu den Abmessungen des Körpers steht, führt über den Trägheitradius r_T. Die ältere Ingenieurgeneration benutzte mit Vorliebe als Mass der Trägheit das Schwungmoment, wobei

$$G\,D^2 = m \cdot g \cdot (2\,r_T)^2$$

(G = Gewicht und $D/2$ = Trägheitshalbmesser). Die Masse m oder das Gewicht $G = m \cdot g$ des Körpers muss man gewöhnlich für eine ganze Reihe von Zwecken bestimmen, z. B. für die Kalkulation und den Transport. Man kann also voraussetzen, dass für die Bestimmung des Trägheitsmoments die Masse des Körpers bekannt ist. Um daraus das Trägheitsmoment $I = G\,D^2/4g$ zu erhalten, genügt es, den Trägheitshalbmesser r_T richtig zu bestimmen oder abzuschätzen, dann ist:

$$I = m \cdot r_T^2$$

Man muss also die Integration

$$r_T = \sqrt{\frac{I}{m}} = \sqrt{\frac{\int r^2\, d\,m}{m}}$$

durchführen. Für eine zylindrische Kreisscheibe (Bild 2a) erhält man:

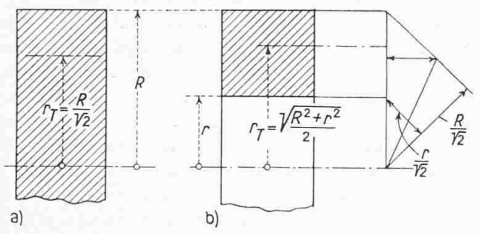

Bild 2

$$I = \varrho \cdot \frac{\pi}{2} \cdot b\, r^4 \text{ und } m = \varrho \cdot 2\pi\, b\, r^2,$$

woraus:

$$r_T = \sqrt{\frac{I}{m}} = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

Für den Hohlzylinder mit Aussenradius R und Innenradius r wird

$$r_T = \sqrt{\frac{(R^2 + r^2)}{2}}$$

ein nicht sehr bequemer Ausdruck, dessen graphische Lösung in Bild 2b gezeigt ist.

Wenn man als Ring-Querschnitt ein an die Drehaxe anstossendes Rechteck mit der radialen Höhe R betrachtet, Bild 3a, so ist sein Schwerpunktsradius $r_s = R/2$. Das Dreieck, dessen Spitze in der Drehaxe liegt, Bild 3b, hat einen Schwerpunktsradius $r_s = 2/3 \cdot R$. Man findet ihn aus:

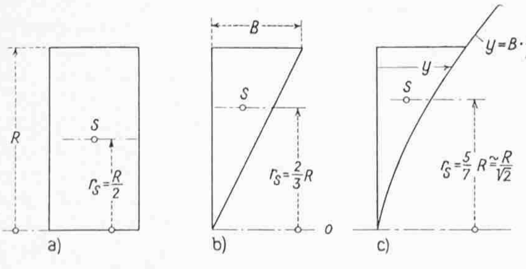

Bild 3

$$r_s = \frac{\int r\, d\,f}{\int d\,f} = \frac{\int_0^R r \cdot b\, d\, r}{\int_0^R b\, d\, r}$$

da $b = B \cdot r/R$, wird:

$$r_s = \frac{\int_0^R r^2\, d\, r}{\int_0^R r\, d\, r} = \frac{(R^3/3)}{(R^2/2)} = (2/3)\, R$$

Bei dieser Integration ist es ein grosser Vorteil, dass die Integrationsgrenzen im Zähler und Nenner gleich sind, also herausfallen. Wenn man weiterhin gemäss Bild 3c eine Figur betrachtet, deren Kontur durch die Parabel $y = B \cdot (r/R) \sqrt{r/R}$ begrenzt wird, so gilt für die Integration:

$$r_s = \frac{\int r \cdot r \cdot r\, dr}{\int r \cdot r\, dr} = \frac{\int r^{5/2}\, dr}{\int r^{3/2}\, dr}$$

Ausgeführt ergibt dies:

$$r_s = \frac{2/7\, R^{7/2}}{2/5 \cdot R^{5/2}} = \frac{5}{7} R$$

Dieser Wert ist angenähert gleich $R/\sqrt{2}$; der Fehler beträgt nur etwa 1 %, um den der Näherungswert zu gross ist. Will man also den Trägheitsradius einer Kreisscheibe vom Radius R und von der Dicke B finden, so kann man eine Parabel $y = B \cdot (r/R) \cdot \sqrt{r/R}$ zeichnen und den Schwerpunkt des von ihr umgrenzten Kurvendreiecks bestimmen. Der Schwerpunktsradius r_s dieser Figur ist mit guter Näherung dem Trägheitsradius r_T des Ringes mit Rechteckquerschnitt gleich. Der Vorteil dieses Verfahrens kommt dann zur Geltung, wenn man nicht rechteckig umgrenzte, sondern Ringe mit beliebiger Kontur betrachtet. Da die Integrationsgrenzen oben bei der Bestimmung von r_s herausfallen, gilt der Ersatz durch die verzerrte Fläche nicht nur für Scheiben, sondern auch für Ringe gleicher Dicke, weiter auch für aus Ringen gleicher Dicke, aber mit beliebigen Innen- und Aussenradien zusammengesetzter Ringkörper, d. h. für alle Querschnittsformen.

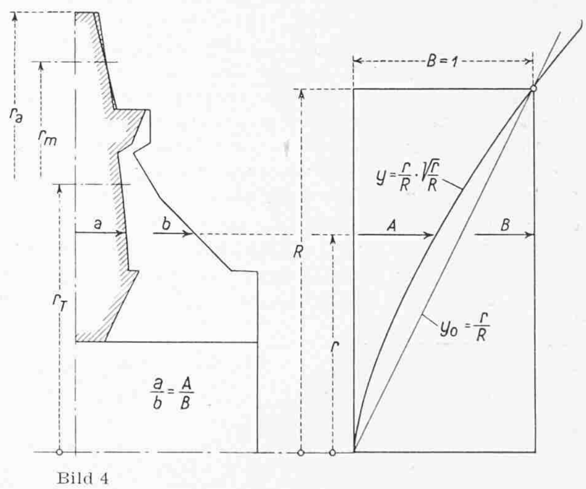

Bild 4

In Bild 4 ist gezeigt, wie man mit diesem Verfahren den Trägheitsradius einer beschaufelten Turbinenscheibe bestimmt. Die Schaufelung wird erst in einen Massivring mit den Breiten $b = f_p/t$ verwandelt (f_p Profilquerschnitt, t Teilung); dann wird sie zusammen mit der Scheibe zu der gestrichelt konturierten Fläche umgezeichnet, indem alle Breitenmasse verzerrt werden gemäss $a = b \cdot (A/B)$. Die Schwerpunktsordinate dieser Verzerrungsfigur liefert den Trägheitsradius r_T wie dargestellt.

Für ähnlich gestaltete Körper wird der Trägheitsradius r_T stets zu einem charakteristischen Radius, etwa dem des Aussenrandes, in gleichem Zahlenverhältnis stehen. Man bekommt also aus mehreren Aufzeichnungen sehr bald eine Vergleichszahl, die bei wiederholtem Vorkommen ähnlicher Scheiben oder Ringe zur ziemlich treffsicheren Abschätzung des Trägheitsmoments bei bekanntem Gewicht des Körpers benutzt werden kann.